

5. előadás

Másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek, törtes egyenlőtlenségek.

Másodfokú egyenlet

Kanonikus alak: $a x^2 + b x + c = 0$, ahol $a \neq 0$

Gyöktényezős alak: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Diszkrimináns: $D = b^2 - 4 a c$

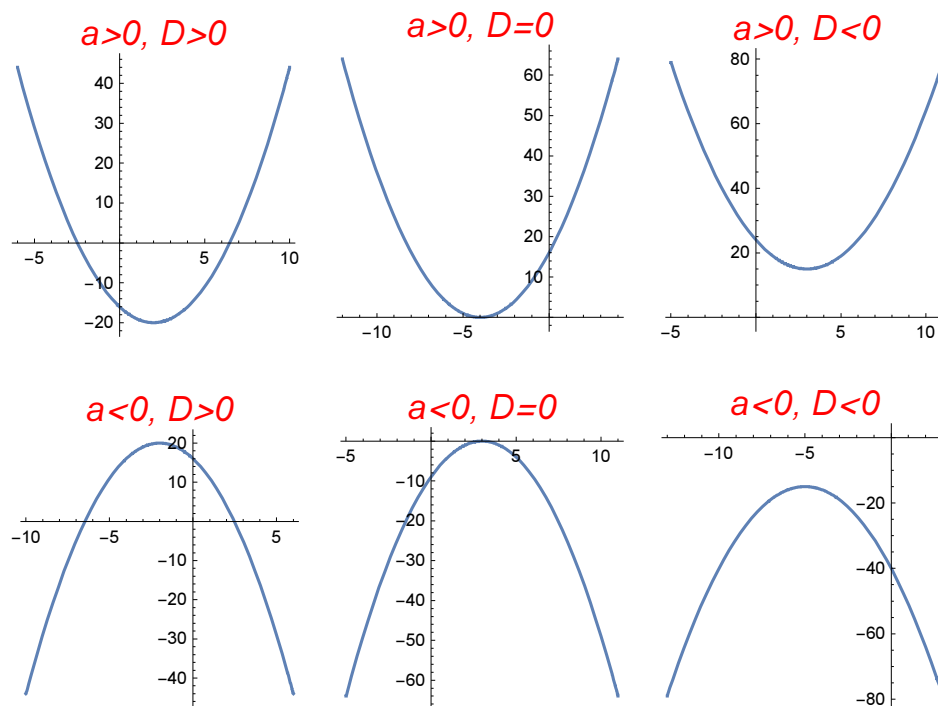
Megoldóképlet: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$

Ha $D > 0$: két különböző valós gyök.

Ha $D = 0$: két azonos valós gyök.

Ha $D < 0$: nincs valós gyök (két komplex gyök).

Az $f(x) = a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) függvény grafikonja az a főegyüttható és a D diszkrimináns előjelétől függően:



Gyökök és együtthatók közti összefüggések

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 - (x_1 + x_2) x + x_1 x_2 \right)$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Feladatok

Teljes négyzetté alakítás

1. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb, illetve legkisebb értékét:

a) $f(x) = 2x^2 - 6x - 5$

b) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

c) $f(x) = -4x^2 + 2x + 7$

d) $f(x) = -6x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = 5x^2 - 20x - 3$

f) $f(x) = -2x^2 - 20x - 35$

A diszkrimináns

2. Milyen p valós paraméter esetén van az alábbi egyenletnek egy valós megoldása?

a) $x^2 - 2px + p = 0$

b) $x^2 - px + p + 3 = 0$

c) $x^2 + px - 2 = 0$

d) $px^2 + 4x + p - 3 = 0$

3. Milyen p valós paraméter esetén nincs valós megoldása az alábbi egyenletnek?

a) $x^2 + px - p - 2 = 0$

b) $x^2 + px + 2p - 3 = 0$

c) $x^2 + (p+2)x - p + 1 = 0$

d) $x^2 - 2px + 3p^2 + 1 = 0$

4. Milyen p valós paraméter esetén van az alábbi egyenletnek két különböző valós megoldása?

a) $x^2 - (p+3)x - 3p + 7 = 0$

b) $x^2 + (p+5)x - 2p + 2 = 0$

c) $x^2 + (p-2)x - 1 = 0$

d) $px^2 + (p+8)x - 1 = 0$

Gyökök és együtthatók közti összefüggések

5. Legyen x_1 és x_2 a $px^2 - 2x + p + 1 = 0$ egyenlet két valós gyöke ($p \neq 0$). Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a gyökökre az alábbi összefüggések teljesüljenek?

a) $x_1 + x_2 = 2$

b) $x_1 x_2 = 3$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$

d) $x_1^2 + x_2^2 = 4$

Törtes egyenlőtlenségek

6. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\text{a) } \frac{x-6}{2x+4} > 1 \quad \text{b) } \frac{5x+1}{7-x} \leq -3 \quad \text{c) } \frac{x-3}{2-x} - 5 \geq \frac{4}{x-2} \quad \text{d) } \frac{x+4}{5-x} < \frac{1}{2}$$

7. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x-6 + \frac{3}{x-2} \geq 0 & \text{b) } x+2 + \frac{4}{x-3} \leq 0 \\ \text{c) } \frac{x^2-3x+2}{x^2-9} \geq 0 & \text{d) } \frac{x^2-16}{x^2-x-2} \leq 0 \\ \text{e) } \frac{x+3}{x+1} > \frac{x+1}{x} & \text{f) } \frac{x+2}{x} < \frac{x}{x-1} \\ \text{g) } x-3 - \frac{2x}{x-2} < 0 & \text{h) } x+4 - \frac{3x}{x-1} > 0 \\ \text{i) } 2 - \frac{1}{x-1} > \frac{2}{x} & \text{j) } \frac{2}{x+1} \geq 1 - \frac{1}{x-1} \end{array}$$

Megoldások

1. a) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}$, így f -nek minimuma van $x = \frac{3}{2}$ -nél, és a minimum értéke $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{2}$.

b) $f(x) = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$, így f -nek minimuma van $x = -\frac{4}{3}$ -nál, és a minimum értéke $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{14}{3}$.

c) $f(x) = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{29}{4}$, így f -nek maximuma van $x = \frac{1}{4}$ -nél, és a maximum értéke $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{29}{4}$.

d) $f(x) = -6\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{7}{6}$, így f -nek maximuma van $x = -\frac{1}{6}$ -nál, és a maximum értéke $f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$.

e) $f(x) = 5(x-2)^2 - 23$, így f -nek minimuma van $x = 2$ -nél, és a minimum értéke $f(2) = -23$.

f) $f(x) = -2(x+5)^2 + 15$, így f -nek maximuma van $x = -5$ -nél, és a maximum értéke $f(-5) = 15$.

2. a) A $D = 4p^2 - 4p = 4p(p-1) = 0$ egyenletből $p = 0$ vagy $p = 1$ esetén lesz egy (kétszeres) valós gyök.

b) A $D = p^2 - 4p - 12 = (p+2)(p-6) = 0$ egyenletből $p = -2$ vagy $p = 6$ esetén lesz egy (kétszeres) valós gyök.

c) Az egyenlet diszkriminánsa $D = p^2 + 8$, ami minden p valós szám esetén pozitív. Így $D = 0$ nem teljesülhet, tehát a p paraméter értéke nem adható meg úgy, hogy egy valós megoldás legyen (minden p -re két valós megoldás van).

d) Az egyenlet elsőfokú, ha $p = 0$, ekkor a valós gyök $x = \frac{3}{4}$. Az egyenlet másodfokú, ha $p \neq 0$, ekkor

a $D = -4(p^2 - 3p - 4) = (p+1)(p-4) = 0$ egyenletből $p = -1$ vagy $p = 4$ esetén lesz egy (kétszeres) valós gyök. A megoldás tehát $p = 0$ vagy $p = -1$ vagy $p = 4$.

3. a) Az egyenlet diszkriminánsát felírva, majd teljes négyzetté alakítva,

$D = p^2 + 4p + 8 = (p + 2)^2 + 4$, ami minden p valós szám esetén pozitív. Így $D < 0$ nem teljesülhet, tehát a p paraméter értéke nem adható meg úgy, hogy ne legyen valós megoldás (minden p -re két valós megoldás van).

b) $A D = p^2 - 8p + 12 = (p - 2)(p - 6) < 0$ egyenlőtlenségből $2 < p < 6$ esetén nem lesz valós gyök.

c) $A D = p^2 + 8p = p(p + 8) < 0$ egyenlőtlenségből $-8 < p < 0$ esetén nem lesz valós gyök.

d) $A D = -8p^2 - 4 < 0$ egyenlőtlenség minden p valós számra teljesül, így tetszőleges p valós paraméter esetén az egyenletnek nincs valós gyöke.

4.a) $A D = p^2 + 18p - 19 = (p - 1)(p + 19) > 0$ egyenlőtlenségből $p < -19$ vagy $p > 1$ esetén lesz két különböző valós gyök.

b) $A D = p^2 + 18p + 17 = (p + 1)(p + 17) > 0$ egyenlőtlenségből $p < -17$ vagy $p > -1$ esetén lesz két különböző valós gyök.

c) Az egyenlet diszkriminánsát felírva, majd teljes négyzetté alakítva, $D = p^2 - 4p + 8 = (p - 2)^2 + 4$, ami minden p valós szám esetén pozitív, így tetszőleges p valós paraméter esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

d) Az egyenlet $p = 0$ esetén elsőfokú, melynek egyetlen valós gyöke van. Az egyenlet $p \neq 0$ esetén másodfokú, így a $D = p^2 + 20p + 64 = (p + 4)(p + 16) > 0$ egyenlőtlenségből $p < -16$ vagy $p > -4$. A feladat megoldása tehát $p < -16$ vagy $-4 < p < 0$ vagy $p > 0$.

5. Az egyenlet együtthatói: $a = p$, $b = -2$, $c = p + 1$. Így a gyökök és együtthatók közti összefüggések felhasználásával:

$$\mathbf{a)} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2}{p} = 2 \implies p = 1$$

$$\mathbf{b)} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p+1}{p} = 3 \implies p = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{c)} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c} = \frac{2}{p+1} = -2 \implies p = -2$$

$$\mathbf{d)} \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \left(\frac{2}{p}\right)^2 - 2 \cdot \frac{p+1}{p} = 4$$

$$\implies 3p^2 + p - 2 = 0 \implies p = -1 \text{ vagy } p = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{6. a)} -10 < x < -2 \quad \mathbf{b)} x \leq -11 \text{ vagy } x > 7 \quad \mathbf{c)} \frac{3}{2} \leq x < 2 \quad \mathbf{d)} x < -1 \text{ vagy } x > 5$$

$$\mathbf{7. a)} 2 < x \leq 3 \text{ vagy } x \geq 5 \quad \mathbf{b)} x \leq -1 \text{ vagy } 2 \leq x < 3$$

$$\mathbf{c)} x < -3 \text{ vagy } 1 \leq x \leq 2 \text{ vagy } x > 3 \quad \mathbf{d)} -4 \leq x < -1 \text{ vagy } 2 < x \leq 4$$

$$\mathbf{e)} -1 < x < 0 \text{ vagy } x > 1 \quad \mathbf{f)} x < 0 \text{ vagy } 1 < x < 2$$

$$\mathbf{g)} x < 1 \text{ vagy } 2 < x < 6 \quad \mathbf{h)} -2 < x < 1 \text{ vagy } x > 2$$

$$\mathbf{i)} x < 0 \text{ vagy } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ vagy } x > 2 \quad \mathbf{j)} -1 < x \leq 0 \text{ vagy } 1 < x \leq 3$$