---

1. feladat (13 pont)

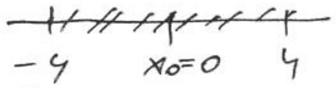
Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergencia tartományát:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}\ 8^n}\, x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}\ 8^n}\, x^{2n}$

a.) $\boxed{8}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}\ 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4$ 5

$\sqrt[n]{\sqrt{n}} \to 1$

Végpontok:



$x = -4$: $\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (-4)^n = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ div.

$(\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ div.)

$x = 4$: $\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{4}\right)^n 4^n = \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$: konv.

(Leibniz sor)

K.T: $(-4, 4]$ 3

b.) $u = x^2$ helyettesítéssel az a.) feladatot kapjuk: $\boxed{5}$

$\sum^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}\ 8^n} u^n$

$\Rightarrow$ K.T. $-4 < u \leq 4$

$\underbrace{-4 < x^2}_{\forall\, x\text{-re igaz}} \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2$

Tehát a K.T. $[-2, 2]$

2. feladat (26 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor-sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{x+3}$; $\quad x_0 = -4$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$; $\quad x_0 = 5$

c) $h(x) = x^3 \cos(2x^2)$; $\quad x_0 = 0$

$h^{(103)}(0) = ?$, $h^{(102)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

a.) $\boxed{5}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\right)$$

$$f(x) = e^{x+3} = e^{x+4-1} = e^{-1} e^{x+4} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n!}$$

K.T. : $(-\infty, \infty)$

b.) $\boxed{7}$

$$g(x) = \frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-5)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{-(x-5)}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(x-5)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-5)^n$$

KT.: $\left|\frac{x-5}{2}\right| = \frac{|x-5|}{2} < 1 \Rightarrow |x-5| < 2$

KT. : $(3, 7)$

c.) $\boxed{13}$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

$$h(x) = x^3 \cos 2x^2 = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^2)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{4n+3} \quad 6 \qquad \text{KT.} : (-\infty, \infty) \quad 2$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ : \quad a_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\Rightarrow h^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad 2$$

$$h^{(103)}(0) = 103!\, a_{103} = 103!\, (-1)^{25} \frac{2^{50}}{50!} \quad 2$$

$4n+3 = 103 \Rightarrow n = 25$

$$h^{(102)}(0) = 102!\, a_{102} = 0 \quad 1$$

$4n+3 = 102 \quad \nexists\, n \in \mathbb{N}$

tehát $a_{102} = 0$

an2Xz2pp101213/2

3. feladat (18 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 + x^4}}$$

$x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!
Határozza meg

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

értékét közelítően az integrálandó függvényt nyolcadfokú Taylor-polinomjával közelítve!
Adjon becslést az elkövetett hibára!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}} = \frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^4\right)^{-1/2} = \quad \text{(binomiális sor)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^4\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{16^n}x^{4n} \overset{(6)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\frac{1}{16^2}x^8 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{16^3}x^{12} + \dots\right) =$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^7}x^4 + \frac{3}{2^{11}}x^8}_{T_8} - \frac{5}{2^{18}}x^{12} + \dots\Big)$$

KT: $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^4\right| < 1 \Rightarrow |x|^4 < 16 \Rightarrow |x| < 2$ (3) $R = 2$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2^7}\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2^{11}}\frac{x^9}{9} - \frac{5}{2^{18}}\frac{x^{13}}{13} + \dots\Big|_0^1 =$$

$[0,1] \subset (-R, R)$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^7\cdot 5} + \frac{3}{2^{11}\cdot 9}}_{:=a} \underbrace{- \frac{5}{2^{18}}\frac{1}{13}}_{:=b} + \dots \approx a \qquad |H| \le |b|$$

Leibniz sor (9)

4. feladat (30 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-6)\,x^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) Írja fel az f'_x függvényt, ahol az létezik! Az origóban a definícióval dolgozzon!

c) Totálisan deriválható-e f a $(0,0)$ pontban?

d) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel \underline{i} + 3\underline{j}$

an2Xz2pp 101213/3.

a.) $\boxed{8}$

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{(\varrho_n \sin\varphi_n - 6)\,\varrho_n^2\cos^2\varphi_n}{\varrho_n^2\cos^2\varphi_n + \varrho_n^2\sin^2\varphi_n} = \lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{(\varrho_n\sin\varphi_n - 6)\,\varrho_n^2\cos^2\varphi_n}{\varrho_n^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{\frac{\varrho_n^2}{\varrho_n^2}}_{=1} \big(\underbrace{\overset{\to 0 \text{ korl.}}{\varrho_n \sin\varphi_n}}_{\to 0} - 6\big)\cos^2\varphi_n = -6\cos^2\varphi_n$$

Mivel függ φ_n-től $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$

b.) $\boxed{11}$

$$f'_x(x,y) = \frac{(y-6)\,2x\,(x^2+y^2) - (y-6)\,x^2\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y-6)\,2x\,y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad 4$$

$(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \; 3 \; = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-6h^2}{h^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-7}{h} = \nexists \quad 4$$

c.) $\boxed{2}$ Mivel $f'_x(0,0) \nexists$, f nem deriválható az origóban (nem teljesül a szükséges feltétel).

d.) $\boxed{9}$

$$f'_y = \frac{x^2(x^2+y^2) - (y-6)\,x^2\,2y}{(x^2+y^2)^2}, \text{ ha } (x,y)\neq(0,0) \quad 4$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \underbrace{\operatorname{grad} f(1,0)}_{} \cdot \underline{e} \quad 2$$

$\exists$, mert $P_0(1,0)$ egy környezetében a parciálisok léteznek és folytonosak.

$$\underline{v} = \underline{i} + 3\underline{j} \quad |\underline{v}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \Rightarrow \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j} \quad 1$$

$$\operatorname{grad} f(1,0) = f'_x(1,0)\,\underline{i} + f'_y(1,0)\,\underline{j} = 0\cdot\underline{i} + 1\cdot\underline{j}$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \underline{j}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad 2$$

$$f(x,y) = \frac{x\,e^{3y}}{x^2+1}$$

a) $f'_x = ?$; $f'_y = ?$, $\operatorname{grad} f|_{(1,0)} = ?$

b) Írja fel az f függvény $P_0(1,0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+1}\,e^{3y}$

$f_x' = e^{3y}\,\frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ (3)

$f_y' = \frac{x}{x^2+1}\,e^{3y}\cdot 3$ (3)

$\operatorname{grad} f(1,0) = f_x'(1,0)\,\underline{i} + f_y'(1,0)\,\underline{j} = 0\,\underline{i} + \frac{3}{2}\,\underline{j}$ (2)

b.) $f_x'(P_0)(x-x_0) + f_y'(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ (3)

$f(P_0) = \frac{1}{2}$

$0\cdot(x-1) + \frac{3}{2}(y-0) - (z-\frac{1}{2}) = 0$ (2)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

6. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-6}$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = e^{-3x}$, $x_0 = 0$

a.) $f(x) = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{6^{n+1}}\,x^{2n}$ (4)

K.T.: $\left|\frac{x^2}{6}\right| = \frac{|x|^2}{6} < 1 \Rightarrow |x|^2 < 6 \Rightarrow |x| < \sqrt{6}$

K.T.: $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ (2)

b.) $e^{-3x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}\,x^n$ (3)

K.T.: $(-\infty, \infty)$ (1)

7. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = y^3\,\mathrm{e}^{3x} + 2y^2 - 5x + 7$$

a) $f'_x = ?\,, \qquad f'_y = ?$

b) $\mathrm{grad} f|_{(0,1)} = ?\,, \qquad \mathrm{d}f\,((0,1),(h,k)) = ?$

a.) $f'_x = y^3 e^{3x} \cdot 3 - 5$ 2

$f'_y = 3y^2 e^{3x} + 4y$ 2

b.) $\mathrm{grad}\, f(0,1) = f'_x(0,1)\,\underline{i} + f'_y(0,1)\,\underline{j} = -2\underline{i} + 7\underline{j}$ 3

$df((0,1),(h,k)) = f'_x(0,1)\cdot h + f'_y(0,1)\,k = -2h + 7k$ 3

an2xz2pp101213/6.