ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2010. április 29.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n^2} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n^2} x^{2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n^2} (2x+4)^n$

a.) $\boxed{5}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{e}{e^4} = \frac{1}{e^3} = \frac{1}{R_a}$

$\Rightarrow R_a = e^3$

b.) $\boxed{3}$ $u = x^2$ helyettesítéssel az a.)-beli feladatot kapjuk. Így

$-e^3 < x^2 < e^3$ -ben konv. a sor (a végpontok most nem érdekesek).

$\Rightarrow |x| < e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow R_b = e^{\frac{3}{2}}$

c.) $\boxed{5}$ $\sum_1^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n^2} 2^n}_{a_n} (x-(-2))^n$ $(x_0 = -2)$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n \cdot 2 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{e^3}}_{\text{a.)-ból}} \cdot 2 = \frac{1}{R_c}$

$\Rightarrow R_c = \frac{e^3}{2}$

2. feladat (21 pont)

$$f(x) = x^3 \cos\frac{x^2}{2} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x^4}}$$

a) Írja fel az f és g függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!
Írja fel mindkét esetre x^{12} együtthatóját elemi műveletekkel!

an2z2p100429/1.

b) Számítsa ki az

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hetedfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

a.) $\boxed{15}$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{x^4}{2!\,2^2} + \frac{x^8}{4!\,2^4} - \frac{x^{12}}{6!\,2^6} + \cdots\right) =$$

$$= \underbrace{x^3 - \frac{x^7}{2!\,2^2}}_{T_7(x)} + \frac{x^{11}}{4!\,2^4} - \frac{x^{15}}{6!\cdot 2^6} + \cdots \quad (4) \qquad x \in \mathbb{R};\ R_f = \infty \quad (2)$$

$a_{12} = 0$ (1) (x^{12} együtthatója)

$$g(x) = \left(1 + (-2x^4)\right)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} (-2x^4)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} (-2)^n x^{4n} \quad (4)$$

$$|-2x^4| = 2|x|^4 < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = R_g \quad (2)$$

$$a_{12} = \binom{-1/3}{3}(-2)^3 = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^3 \quad (2)$$

b.) $\boxed{6}$ Az egyenletes konvergencia miatt szabad tagonként integrálni.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{2!\,2^2\cdot 8} + \frac{x^{12}}{4!\,2^4\cdot 12} - \cdots \Big|_0^1 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{64}}_{:=a} + \underbrace{\frac{1}{4!\,2^4\cdot 12}}_{:=b} - \cdots \approx a$$

$|H| < b$, mert Leibniz sorról van szó.

an2z2p100429/2.

3. feladat (20 pont)

a) Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{x+4}$$

függvény $x_0 = 0$ és $x_0 = -3$ körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

b) FELHASZNÁLVA az előző sorfejtések egyikét, írja fel az

$$f(x) = \ln(x+4)$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.) $x_0 = 0$

$\boxed{11}$

$$f(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^n$$

$$|q| = \left|-\frac{x}{4}\right| = \frac{|x|}{4} < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow R = 4$$

5

$x_0 = -3$

6

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)+1} = \frac{1}{1-(-(x+3))} = \sum_{n=0}^{\infty}(-(x+3))^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+3)^n$$

$$|q| = |-(x+3)| = |x+3| < 1 \Rightarrow R = 1$$

b.)

$\boxed{9}$

$$f'(x) = \frac{1}{x+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^n \qquad R = 4 \quad (a.)\text{-ből})$$

$$\int_0^x \underbrace{f'(t)}_{\frac{1}{t+4}}\,dt = \ln(t+4)\Big|_0^x = \ln(x+4) - \ln 4 = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}t^n\,dt =$$

$[0,x] \subset (-4,4)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)}x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln(x+4) = \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)}x^{n+1}; \qquad R = 4$$

(változatlan)

4. feladat (22 pont)

$$f(x,y) = e^{(-x^3y^4)}, \qquad P_0 = P_0(-1,1)$$

a) $f'_x = ?$, $f'_y = ?$
Hol differenciálható totálisan az f függvény ?

b) $grad\, f(P_0) = ?$ $\quad df\big((-1,1),(dx,dy)\big) = ?$

c) Írja fel a P_0-hoz tartozó érintősík egyenletét!

d) Számolja ki az f függvénynek a $P_0(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} = (-5,-1)$ irányú iránymenti deriváltját!

an2z2p10042913.

a.) $\boxed{6}$

$f'_x = e^{-x^3y^4}(-3x^2y^4)$ (2)

$f'_y = e^{-x^3y^4}(-4x^3y^3)$ (2)

(2) $\left.\begin{matrix} f'_x, f'_y \end{matrix}\right\}$ mindenütt létezik és folytonos $\Rightarrow f$ mindenütt tot. deriválható

b.) $\boxed{5}$

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = -3e\,\underline{i} + 4e\,\underline{j}$ (2)

$df((-1,1),(dx,dy)) = f'_x(-1,1)dx + f'_y(-1,1)dy = -3e\,dx + 4e\,dy$ (3)

c.) $\boxed{5}$ Az érintősík egyenlete:

$f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ (2)

$-3e(x+1) + 4e(y-1) - (z-e) = 0$ (3)

d.) $\boxed{6}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e}$ (2)

$\underline{v} = -5\underline{i} - \underline{j}$; $|\underline{v}| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$; $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -\frac{5}{\sqrt{26}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (-3e\,\underline{i} + 4e\,\underline{j})\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}\right) = \frac{15e}{\sqrt{26}} - \frac{4e}{\sqrt{26}} \left(= \frac{11e}{\sqrt{26}}\right)$ (3)

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+y^2}{x^2+2y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 4 \quad, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Létezik-e a határértéke f-nek az origóban?
Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

b) $f'_x(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

a.) $\boxed{9}$

$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{4x^2+y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{4x^2}{x^2}}_{=1} = 4$

$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{y^2}{2y^2}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

} Nem egyenlők.

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \not\exists \Rightarrow f$ nem folytonos (0,0)-ban (6)

$\Rightarrow f$ nem differenciálható totálisan (0,0)-ban. (3)

an2z2p100429/4.

b.) $f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$ 3

$\boxed{7}$

$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\frac{4h^2}{h^2} - 4}{h}}_{= \frac{0}{h} = 0} = 0$ 4

6. feladat (8 pont)

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\dfrac{3x}{y^2+1}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x, y)$-nal!

$$f'_x(x,y) = ?\,, \qquad f'_y(x,y) = ?\,, \qquad f''_{xy}(x,y) = ?$$

$f(x,y) = g\left(\frac{3x}{y^2+1}\right)$

$f'_x = g'\left(\frac{3x}{y^2+1}\right) \cdot \frac{3}{y^2+1}$ 2

$f'_y = g'\left(\frac{3x}{y^2+1}\right) \cdot 3x \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$ 2

$f''_{xy} = \left(g''\left(\frac{3x}{y^2+1}\right) \cdot 3x \cdot \frac{-2y}{(y^2+1)^2}\right) \cdot \frac{3}{y^2+1} + g'\left(\frac{3x}{y^2+1}\right) \cdot 3 \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$

4

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Legyen

$$f(x,y) = (2x+3y)^5\ e^{5(x-1)}\,, \qquad P_0\,(1,-1)$$

a) Határozza meg az f függvény gradiensét a P_0 pontban!

b) $\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

an2z2p100429/5.

$$f'_x = 5(2x+3y)^4 \cdot 2 \cdot e^{5(x-1)} + (2x+3y)^5 e^{5(x-1)} \cdot 5 \quad 3$$

$$f'_y = 5(2x+3y)^4 \cdot 3 \cdot e^{5(x-1)} \quad 2$$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = 5\underline{i} + 15\underline{j} \quad 1$$

$$\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{5^2+15^2} \;(=\sqrt{250}) \quad 4$$

8. feladat (10 pont)

Írja fel az $f(x) = e^{x+8}$ függvény $x_0 = 0$ és $x_0 = -2$ körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

$$4 \begin{cases} x_0 = 0: \\ f(x) = e^8 e^x = e^8\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \end{cases} \qquad R = \infty$$

$$6 \begin{cases} x_0 = -2: \\ f(x) = e^{(x+2)+6} = e^6 e^{x+2} = e^6\left(1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \dots\right) \end{cases}$$

$$R = \infty$$

an2z2p100429/6.