1. feladat (4+9=13 pont)
a) Ismertesse speciális rendőrelvet! (Bizonyítás nélkül.)
b) Hova tart az $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{3n-1}\right)^{9n^2}$ sorozat?

Mo. *a*) Ha $a_n \to \infty$, és $n \geq N$ esetén $b_n \geq a_n$, akkor $b_n \to \infty$ **(4p)**
b) $\dfrac{\left(1+\frac{5}{3n}\right)^{3n}}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}} \to \dfrac{e^5}{e^{-1}} = e^6$ **(4p)** , így $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $a_n \geq (e^6-\varepsilon)^{3n} \to \infty$ **(4p)** , így a speciális rendőrelv miatt $a_n \to \infty$ **(1p)** .

2. feladat (8+10=18 pont)
a) Mit mondhatunk korlátos és monoton sorozat kovergenciájára? Állítását bizonyítsa!
b) Konvergens-e az $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 10}$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Mo. *a*) Ha a_n monoton és korlátos, akkor konvergens **(2p)** . Tegyük fel, hogy a_n monoton növő, és legyen $A = \sup(a_n)$, ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N, melyre $a_N > A - \varepsilon$ **(2p)** . Ekkor a monotonitás miatt $n \geq N$ esetén $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A$ **(2p)** , tehát $|a_n - A| < \varepsilon$, így $a_n \to A$. **(2p)**
b) Ha létezik $A = \lim a_n$, akkor $A = \sqrt{7A-10}$, tehát $A = 2$ vagy $A = 5$ **(2p)** . $2 \leq a_1 \leq 5$, és $2 \leq a_n \leq 5$ esetén $2 = \sqrt{7\cdot 2 - 10} \leq a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 10} \leq 5 = \sqrt{5\cdot 7 - 10}$ **(2p)** , tehát a sorozat korlátos **(1p)** . $a_2 = \sqrt{18} > a_1$ **(1p)** , és $a_n < a_{n+1}$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 10} < \sqrt{7a_{n+1} - 10} < a_{n+2}$, tehát a sorozat monoton növő. **(2p)** Így a sorozat konvergens, és a határérték csak a felső korlát lehet, vagyis 5. **(2p)**

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Milyen típusú szakadási helyei lehetnek egy függvénynek? Definiálja ezeket!
b) Osztályozza az $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2+4x}$ függvény szakadási helyeit!

Mo. *a*) Legyen x_0 a vizsgált függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! A függvénynek az x_0 pontban

- *elsőfajú, megszüntethető* szakadása van, ha x_0-ban létezik és megegyezik a bal és jobb oldali határérték (és mindkettő valós szám), de a függvény nem folytonos x_0-ban. **(2p)**
- *elsőfajú, véges ugrás típusú* szakadása van, ha x_0-ban a bal és jobb oldali határérték is létezik és valós, de nem egyeznek meg. **(2p)**
- *másodfajú* vagy *lényeges szakadása* van, ha a függvény nem folytonos x_0-ban, és nem elsőfajú szakadása van ott. **(2p)**

b) Szakadási helyek: $0, 1, -4$ **(1p)**
$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, mert az arctg függvény korlátos, a szorzat másik tagja pedig 0-hoz tart **(2p)** , így itt megszüntethető szakadás van. **(1p)**
$\lim_{x\to -4\pm} f(x) = \frac{4}{5} \cdot \left(\mp \frac{\pi}{2} \right)$ **(2p)** , tehát ebben a pontban véges ugrás van. **(1p)**
$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$ **(2p)** , tehát ebben a pontban lényeges szakadás van. **(1p)**

---

4. feladat (4+9=13 pont)
a) Definiálja egy függvény x_0 pontbeli deriváltját!
b) Határozza meg az $f(x) = \sqrt[5]{2x^2} \sin \sqrt[5]{16x^3}$ függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban.

Mo. a)

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\text{vagy} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right) \qquad (\mathbf{4p})$$

b) $f(0) = 0$ **(1p)** , és
$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2} \sin \sqrt[5]{16x^3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \sqrt[5]{16x^3}}{\sqrt[5]{16x^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2x^2}}{\sqrt[5]{2x^2}} \cdot \sqrt[5]{32} = 2.$ **(2+3+1p)** Az érintő egyenlete tehát: $y = 2x$ **(2p)**

---

5. feladat (4+9=13 pont)*
a) Mit mondhatunk integrálható függvények lineáris kombinációjának primitív függvényéről?
b) Határozza meg az $f(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{x^2} - \frac{5}{\operatorname{sh}^2 x}$ függvény határozatlan integrálját!

Mo. a) $\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$ **(4p)**
b) $\int f(x)\, dx = \int \frac{3 + \sqrt{x}}{x^2} - \frac{5}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\frac{3}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5 \operatorname{cth} x$ (Mindhárom tagért **(3p)**)

---

6. feladat (4+9=13 pont)*
a) Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát!
b) Számolja ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 (2x - 5)e^{3x-2}\, dx.$$

Mo. *a*) Ha az $[a, b]$ intervallumon f Riemann-integrálható **(1p)** és $f = F'$ **(1p)** , akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ **(2p)** .

b) Parciális integrálással $\displaystyle\int (2x-5)e^{3x-2}\,dx = \frac{(2x-5)e^{3x-2}}{3} - \frac{2e^{3x-2}}{9} + c$ **(7p)**

így $\displaystyle\int_0^1 (2x-5)e^{3x-2}\,dx = -e - \frac{2e}{9} + \frac{5}{3e^2} + \frac{2}{9e^2}$ **(2p)**

---

7. feladat (14 pont)*

Használja a $t = \sqrt{x}$ helyettesítést, és számolja ki az $\displaystyle\int \frac{2}{x^{3/2} - 9x^{1/2}}\,dx$ integrált!

Mo. $x = t^2$, $dx = 2tdt$, így a helyettesítés után az integrál $\displaystyle\int \frac{4t\,dt}{t^3 - 9t} = 4\int \frac{dt}{t^2-9}$. **(4p)**

$\displaystyle\frac{1}{t^2-9} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-3}$ **(2p)** , megkapható, hogy $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$ **(4p)** , így:

$$\int \frac{2}{x^{3/2} - 9x^{1/2}}dx = 4\left(-\frac{1}{6}\ln|t+3| + \frac{1}{6}\ln|t-3| + c\right)\Bigg|_{t=\sqrt{x}} = \qquad \mathbf{(2p)}$$

$$= -\frac{2}{3}\ln\left(\sqrt{x}+3\right) + \frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x}-3\right| + c. \qquad \mathbf{(2p)}$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy mindenütt differenciálható függvény. Igazolja, hogy ha $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, akkor f nem egyenletesen folytonos a $[0, \infty)$ halmazon!

Mo. Tegyük fel, indirekt, hogy f egyenletesen folytonos, azaz például az $\varepsilon = 1$ értékhez található olyan $\delta > 0$, melyre $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$, **(5p)** és így f folytonossága miatt $|x_1 - x_2| \leq \delta$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$. **(1p)** Az $[x, x+\delta]$ intervallumra felírt Lagrange-tétel alapján $\exists \xi \in (x, x+\delta)$: $|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\right| \leq \frac{1}{\delta} < \infty$. **(5p)** Mivel itt x tetszőlegesen nagy lehet, ez ellentmond a $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ feltételnek, tehát az állítást beláttuk. **(3p)**
