1. feladat (18 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2+2x-15}, & \text{ha } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{4\operatorname{th}(x^2)}{x+6}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x = 3$, $x = -6$ pontban van, valamint az $x = 0$ pontban lehet szakadása. **(3p)** ($x = -5$ esetén nincs baj, hiszen máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to 3\pm} f(x) = \lim_{x\to 3\pm} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} \cdot \frac{1}{x+5} = 1 \cdot \frac{1}{8}, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to -6\pm} f(x) = \lim_{x\to -6\pm} \frac{4\operatorname{th}(x^2)}{x+6} = \pm\infty, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = \frac{\sin 3}{15} \neq 0 = \frac{4\operatorname{th}(0^2)}{0+6} = \lim_{x\to 0-} \frac{4\operatorname{th}(x^2)}{x+6}, \textbf{(3p)}$$

így az $x = 0$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Írja le egy f függggvény x_0 pontbeli deriváltjának definícióját!
b) A definíció alapján számolja ki az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+5}}$ függvény deriváltját az $x_0 = 5$ pontban!

Mo. *a*) Tegyük fel, hogy x belső pontja az f függvény értelmezési tartományának, ekkor $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, amennyiben létezik véges határérték **(5p)** .

b) $$f'(5) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{4(5+h)+5}} - \frac{1}{5}}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{5-\sqrt{25+4h}}{5h\sqrt{25+4h}} =$$

$$\overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{25-(25+4h)}{5h\sqrt{25+4h}(5+\sqrt{25+4h})} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-4}{5\sqrt{25+4h}(5+\sqrt{25+4h})} \overset{\textbf{(2p)}}{=} -\frac{2}{125}.$$

---

3. feladat (10+12+10=32 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{arctg}(2x-6)}{\sin(9-3x)} \qquad b)\ \lim_{x\to 0+}(\operatorname{sh}x)^x \qquad c)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{ch}(4x+2)}{\operatorname{sh}(4-4x)}$$

Mo. *a)* $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így használható a L'Hospital-szabály **(1p)**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{arctg}(2x-6)}{\sin(9-3x)} \overset{\textbf{(6p)}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{1+(2x-6)^2}}{-3\cos(9-3x)} \overset{\textbf{(3p)}}{=} -\frac{2}{3}.$$

b) 0^0 típusú határérték **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0+}(\operatorname{sh}x)^x \overset{\textbf{(1p)}}{=} \lim_{x\to 0+}\left(e^{\ln\operatorname{sh}x}\right)^x \overset{\textbf{(1p)}}{=} \lim_{x\to 0+} e^{x\ln\operatorname{sh}x} \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{\lim_{x\to 0+} x\ln\operatorname{sh}x} \overset{\textbf{(1p)}}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\operatorname{sh}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\operatorname{sh}x}{\frac{1}{x}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$
$$\overset{\textbf{(1p)}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2}{\operatorname{sh}x} \overset{\textbf{(1p)}}{=} -\lim_{x\to 0+}\frac{2x}{\operatorname{ch}x} \overset{\textbf{(1p)}}{=} 0$$

c) A függvények definíciója szerint

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{ch}(4x+2)}{\operatorname{sh}(4-4x)} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{4x+2}+e^{-4x-2}}{e^{4-4x}-e^{4x-4}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-4x}}{e^{-4x}}\cdot\frac{e^{8x+2}+e^{-2}}{e^{4}-e^{8x-4}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{e^{-2}}{e^{4}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{-6}.$$

---

4. feladat (17 pont)
Határozza meg az $f(x)=2\pi-\arcsin(2+4x)$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, igazolja, hogy a függvény invertálható, majd adja meg a függvény inverzét, annak értelmezési tartományát és értékkészletét!

Mo. $D_{\arcsin}=[-1,1]$, így $-1\le 2+4x\le 1 \iff -3\le 4x\le -1 \iff -\frac{3}{4}\le x\le -\frac{1}{4}$, így $D_f=\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right]$ **(3p)** . $R_{\arcsin}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, így $R_f=\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ **(2p)** .

$$f'(x)=\frac{-4}{\sqrt{1-(2+4x)^2}}<0, \textbf{(3p)}$$

így a függvény szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható **(2p)** .

$$y = 2\pi - \arcsin(2+4x) \iff 2\pi - y = \arcsin(2+4x) \iff$$
$$\iff \sin(2\pi - y) = 2+4x \iff \frac{\sin(2\pi - y) - 2}{4} = x(\mathbf{4p}),$$

tehát $f^{-1}(x) = \dfrac{\sin(2\pi - x) - 2}{4} = -\dfrac{\sin(x)+2}{4}$ **(1p)** , és $D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ **(1p)** és $R_{f^{-1}} = D_f = \left[-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{4}\right]$ **(1p)** .

---

5. feladat (18 pont)
Melyek azok a legbővebb intervallumok, amelyeken az $f(x) = (x+2)\operatorname{arctg}(x-3)$ függvény konvex, illetve konkáv? Hol vannak inflexiós pontjai a függvénynek?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)** , és

$$f''(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \left(\operatorname{arctg}(x-3) + \frac{x+2}{1+(x-3)^2}\right)' =$$
$$\overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{1+(x-3)^2} + \frac{1+(x-3)^2 - 2(x+2)(x-3)}{\left(1+(x-3)^2\right)^2} =$$
$$\overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2+2(x-3)^2 - 2(x+2)(x-3)}{\left(1+(x-3)^2\right)^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{-10x+32}{\left(1+(x-3)^2\right)^2},$$

így $f''\left(\dfrac{16}{5}\right) = 0$, $f''(x) < 0$, ha $x > \dfrac{16}{5}$, $f''(x) > 0$, ha $x < \dfrac{16}{5}$ **(3p)** , vagyis a függvény a $\left(-\infty, \dfrac{16}{5}\right]$ intervallumon konvex, **(1p)** , a $\left[\dfrac{16}{5}, \infty\right)$ intervallumon konkáv **(1p)** , és a $\dfrac{16}{5}$ pontban inflexiós pontja van **(1p)** .
