Zárthelyi dolgozat

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Egy urnában 10 piros, 10 fehér és 10 sárga golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk visszatevés nélkül öt darabot. Mi a valószínűsége, hogy a húzott golyók között nincs piros? Feltéve, hogy nem húztunk pirosat, mi a valószínűsége, hogy legalább egy sárgát húztunk?

   Megoldás:

   (1 pont) Összesen 30 golyó van az urnában, ezek közül $\binom{30}{5}$ féleképp húzhatunk ki 5 darabot. (Ez tehát az "összes eset" száma, azaz az eseménytér elemszáma.)

   (1 pont) Az, hogy a húzott golyók közt nincs piros, éppen azt jelenti, hogy a sárga és fehér golyók közül húztunk csak,

   (1 pont) ebből pedig összesen 20 van, tehát ezt $\binom{20}{5}$ féleképp tehetjük meg (ennyi a "jó esetek" száma, tehát azoknak a kimeneteleknek a száma, amelyek a leírt eseményt alkotják).

   (1 pont) A klasszikus valószínűség képlete alapján

   $$\mathbb{P}(\text{nem húzunk pirosat}) = \frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}1088.$$

   (0 pont) A rövidség kedvéért vezessük be az

   $$NP = \{\text{nem húzunk pirosat}\} \qquad \text{és} \qquad S = \{\text{húzunk legalább egy sárgát}\}$$

   jelöléseket. (Ha ez nem történik meg, hanem szöveges leírással szerepelnek az események, nem jár pontlevonás.)

   (1 pont) A második kérdésben a keresett feltételes valószínűség tehát $\mathbb{P}(S \mid NP)$.

   (1 pont) A feltételes valószínűség valószínűségi mérték, ennek tulajdonságai alapján pedig

   $$\mathbb{P}(S \mid NP) = 1 - \mathbb{P}(\overline{S} \mid NP).$$

   (A pontért elég, ha a formula szerepel.)

(1 pont) A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathbb{P}(\overline{S} \mid NP) = \frac{\mathbb{P}(\overline{S} \cap NP)}{\mathbb{P}(NP)}$$

(1 pont) Mivel $\overline{S} = \{\text{nem húzunk ságát}\}$, így $\overline{S} \cap NP = \{\text{csak fehéret húzunk}\}$.

(1 pont) Mivel 10 fehér golyó van, ezt $\binom{10}{5}$ féleképp tehetjük meg, ezért

$$\mathbb{P}(\overline{S} \cap NP) = \mathbb{P}(\text{csak fehéret húzunk}) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}.$$

(1 pont) Tehát

$$\mathbb{P}(S \mid NP) = 1 - \mathbb{P}(\overline{S} \mid NP) = 1 - \left(\frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}\right) / \left(\frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}}\right) = 1 - \frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0{,}9837.$$

Ha a megoldó kiszámolja négy tizedesjegyre kerekítve a

$$\frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}0018$$

értéket, és a tizedestörtekkel számol tovább, akkor 0,9835 adódik végeredménynek 4 tizedesjegyre kerekítve. Ebben az esetben is jár a maximális pontszám (ha minden jó). Rossz kerekítés miatt 1 pont levonás jár, de kerekítési hibáért csak egyszer vonunk le pontot.

A komplementerre való áttérés a feltételes valószínűség definíciójának felírása után is megtehető, tehát az 5. és 6. pont a következőképp is megszerezhető:

(1 pont) A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathbb{P}(S \mid NP) = \frac{\mathbb{P}(S \cap NP)}{\mathbb{P}(NP)}.$$

(1 pont) Mivel S és $\overline{S}$ közül pontosan az egyik teljesül, így

$$\mathbb{P}(S \cap NP) + \mathbb{P}(\overline{S} \cap NP) = \mathbb{P}(NP),$$

vagyis

$$\mathbb{P}(S \mid NP) = \frac{\mathbb{P}(S \cap NP)}{\mathbb{P}(NP)} = \frac{\mathbb{P}(NP) - \mathbb{P}(\overline{S} \cap NP)}{\mathbb{P}(NP)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(\overline{S} \cap NP)}{\mathbb{P}(NP)}.$$

A $\mathbb{P}(S \cap NP)$ valószínűség kiszámolásához más érvelés is elvezethet, pl. a feltételes valószínűség definíciójának felírása után a 6. és 7. pont megszerezhető a következőképp.

(1 pont) A szita-formulából

$$\mathbb{P}(S \cap NP) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(NP) - \mathbb{P}(S \cup NP).$$

(1 pont) Az utolsó unió éppen azt az eseményt írja le, hogy vagy húzunk sárgát, vagy pedig ha azt nem húzunk, akkor viszont pirosat sem, azaz csak fehéret húzunk. Így

$$\mathbb{P}(S \cup NP) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(NP \setminus S) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(\text{csak fehéret húzunk}),$$

azaz

$$\mathbb{P}(S \cap NP) = \mathbb{P}(NP) - \mathbb{P}(\text{csak fehéret húzunk}).$$

2. Egy terméket három gyárban állítanak elő. Az üzemek eltérő kapacitással működnek, így az elsőben a termékek 30%-át, a másodikban a 20%-át gyártják, a maradék pedig a harmadik üzemben készül. Az első gyárban lévő gyártósoron minden 1000 legyártott termékből 10, míg a második gyárban minden 2000-ből 15 hibás. A harmadik gyártósoron legyártott termékek 98%-a hibátlan. A boltban véletlenszerűen leveszünk egy ilyen terméket a polcról, azonban a megvásárlása után azt tapasztaljuk, hogy hibás. Mi a valószínűsége, hogy a termék az első gyárban készült?

Megoldás:

(0 pont) A rövidség kedvéért vezessünk be jelöléseket a következő eseményekre:

$$H = \{\text{a megvásárolt termék hibás}\}, \qquad G_i = \{\text{a termék az } i. \text{ gyárban készült}\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(Ha nincs bevezetve külön jelölés az eseményekre, hanem szövegesen vannak körülírva, nem jár pontlevonás.)

(1 pont) A kérdéses valószínűség: $\mathbb{P}(G_1 \mid H)$.

(1 pont) A G_1, G_2, G_3 események teljes eseményrendszert alkotnak,

(2 pont) ezért alkalmazható rájuk a Bayes-tétel:

$$\mathbb{P}(G_1 \mid H) = \frac{\mathbb{P}(H \mid G_1)\,\mathbb{P}(G_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(H \mid G_i)\,\mathbb{P}(G_i)}.$$

Ha esetleg a tétel nincs nevesítve, akkor is hivatkozni kell rá, hogy ez a formula az előadás anyagának része. Az előadásra való hivatkozás nélkül a formulára nem jár pont. Ha valaki külön alkalmazza az egyerű Bayes-tételt, majd utána a teljes valószínűség tételét (mindkettőnél a tétel nevére vagy az előadásra hivatkozva), akkor is jár ez a két pont (egy-egy a két tétel alkalmazásáért). Hivatkozás nélkül ebben az esetben sem jár az adott pont. Kizárólag hibátlanul felírt formulá(k)ra adható pont.

(2 pont) A feladat szövege alapján

$$\mathbb{P}(H \mid G_1) = \frac{10}{1000} = 0{,}01, \qquad \mathbb{P}(H \mid G_2) = \frac{15}{2000} = 0{,}0075, \qquad \mathbb{P}(H \mid G_3) = 0{,}02,$$

(2 pont) továbbá

$$\mathbb{P}(G_1) = 0{,}3, \qquad \mathbb{P}(G_2) = 0{,}2, \qquad \mathbb{P}(G_3) = 0{,}5.$$

(1 pont) Tehát behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(G_1 \mid H) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}3}{0{,}01 \cdot 0{,}3 + 0{,}0075 \cdot 0{,}2 + 0{,}02 \cdot 0{,}5}.$$

Ha a megoldó nem írja le általános alakban a formulát, csak a behelyettesített értéket, akkor a formuláért járó 2 pontot is megkapja, amennyiben *hivatkozik a tételre*, és a behelyettesített értékek *midegyikének* jelentése *pontosan* tisztázott, valamint a helyettesítés *hibátlan*.

(1 pont) A műveleteket elvégezve

$$\mathbb{P}(G_1 \mid H) = \frac{0{,}003}{0{,}003 + 0{,}0015 + 0{,}01} = \frac{0{,}003}{0{,}0145} = \frac{6}{29} \approx 0{,}2069$$

Kerekítési hibáért 1 pont levonás jár.

3. Két szabályos dobókockával dobunk, jelölje X a dobott számok összegét, Y pedig a szorzatukat. Döntsük el, hogy függetlenek-e az $\{X \text{ páros}\}$ és az $\{Y \le 4\}$ események.

Megoldás:

(1 pont) Jelöljük a dobások kimenetelét rendezett párokkal, ekkor az eseménytér:

$$\Omega = \{(i; j) : 1 \le i, j \le 6\}$$

(Ha ez nincs külön kiemelve vagy akár formalizálva, de a megoldásból egyértelműen kiderül, akkor is jár a pont.)

(1 pont) Ha X a dobott számok összege, akkor az $A = \{X \text{ páros}\}$ esemény azon kimenetelekből áll, melyekre a két dobás eredményének paritása megegyezik (mindkettő páros vagy mindkettő páratlan).

(1 pont) Ilyen párokból $2 \cdot 3^2 = 18$ darab van, így

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont) Ha Y a dobott számok szorzata, akkor

$$B = \{Y \leq 4\} = \{(1;1), (1;2), (2;1), (1;3), (3;1), (1;4), (4;1), (2;2)\}.$$

(1 pont) Tehát

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

(1 pont) Továbbá

$$A \cap B = \{(1;1), (1;3), (3;1), (2;2)\},$$

(1 pont) ezért

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

(1 pont) Mivel $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$,

(2 pont) így $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$, azaz a függetlenség definíciója szerint A és B függetlenek. (Ha a megoldó tudja, hogy ezt kell leellenőrizni, de elrontja a számolást, akkor a 2 pontból 1 jár.)

4. Jordán Mihály, a 12. A testneveléstanára kosárlabdát tanít a diákoknak, és hogy szórakoztatóbbá tegye az órát, fogadni akar az osztállyal, hogy be tud dobni egymás után 7 büntetőt. A diákok, ismerve Mihály képességeit és ízlését is egyben, belemennek a fogadásba a következő, Mihály számára igen előnyös szabályokkal: Mihály legfeljebb 7-szer, de csak az első kihagyott büntetőig próbálkozhat. Ha már az elsőt elrontja, nem kap semmit (az osztály pedig egész órán játszhat). Ha az első bemegy, 1 darab Túró Rudit nyer, ezután minden bedobott büntetővel duplázza a nyereményét, tehát két bedobott büntetőért 2, háromért 4 Túró Rudi jár, stb. Az első elrontott vagy a hetedik bedobott büntető után a játék véget ér, és Mihály megkapja a már elért nyereményét. Határozzuk meg a Mihály által nyert Túró Rudik számának várható értékét, ha tudjuk, hogy a büntetőket egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel dobja be.

Megoldás:

(1 pont) Jelölje X a Mihály által nyert Túró Rudik számát. Ekkor X egy valószínűségi változó. (Ez utóbbi megállapítás nélkül jár a pont, ha a megoldó bevezet egy valószínűségi változót a Túró Rudik számára.)

(1 pont) Felírjuk X eloszlását. Először is, az értékkészlete $0, 1, 2, 2^2, \ldots, 2^6$. (Ha ez külön nincs megállapítva, de a megoldásból egyértelműen kiderül, akkor is jár a pont.)

(1 pont) Ha $X = 0$, az azt jelenti, hogy az első büntető kimaradt (és így véget ért a játék), tehát $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$.

(1 pont) Ha $X = 2^{k-1}$, ahol $1 \leq k \leq 6$, az azt jelenti, hogy az első k dobás bement, a $(k+1)$-edik dobás pedig sikertelen volt.

(1 pont) Mivel ezek a dobások egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel mennek be, így tehát ezek a valószínűségek szorzódnak, ezért ekkor

$$\mathbb{P}(X = 2^{k-1}) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

(1 pont) Ha $X = 2^6$, az azt jelenti, hogy mind a 7 dobás bement (és véget ért a játék), azaz

$$\mathbb{P}(X = 2^6) = \frac{1}{2^7}.$$

(1 pont) Az X várható értéke a várható érték definíciója alapján

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathrm{ran} X} k \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

(2 pont) Behelyettesítve:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \left(\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \right) + 2^6 \cdot \frac{1}{2^7}$$

(ha a definíció nem szerepel, de a jó helyettesítés igen, akkor mindhárom pont jár)

(1 pont)

$$= 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2.$$

5. Véletlenszerűen választunk egy r_1 és egy r_2 számot a $(0;1)$ intervallumból, majd rajzolunk a síkon egy origó középpontú, r_1 sugarú kört, illetve egy r_2 sugarú kört, melynek középpontja az $(1;0)$ pont. Mi a valószínűsége, hogy a két körvonal metszi egymást?

   Megoldás:

   (2 pont) A r_1 és r_2 számok választása ekvivalens egy $(r_1; r_2)$ pont választásával az $N = (0;1) \times (0;1)$ négyzeten.

   (1 pont) A két megadott kör akkor metszi egymást, ha a két sugár összege legalább 1,

   (1 pont) tehát az $r_1 + r_2 \geq 1$ egyenlőtelenség által leírt halmazba esés valószínűségét kell meghatároznunk.

   (Ha a feltétel csak formalizálva szerepel, akkor is jár mindkét pont.)

   (1 pont) Ez a halmaz nem más, mint az N négyzetnek az $r_2 = 1 - r_1$ egyenesre és az egyenes fölé eső pontjai.

   (1 pont) Ezen területet az origó, a $(0;1)$ és $(1;1)$ pontok által meghatározott H derékszögű háromszög határolja.

   (Ha ez a terület csak egy rajzon szerepel (pontosan), akkor is jár mindkét pont.)

   (2 pont) Így a keresett valószínűség

   $$\mathbb{P}(\text{a körök metszik egymást}) = \frac{T(H)}{T(N)},$$

   ahol $T(\cdot)$ a területet jelöli.

   (1 pont) Mivel $T(N) = 1$ és $T(H) = \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$,

   (1 pont) ezért a keresesett valószínűség $\dfrac{1}{2}$.

6. Az X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

   $$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ \alpha\sqrt{t}, & \text{ha } t \in (0;4], \\ 1, & \text{ha } t > 4, \end{cases}$$

   ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy paraméter. Határozzuk meg α értékét és az X várható értékét.

   Első megoldás:

   (1 pont) Mivel F_X egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ezért folytonos kell legyen.

   (1 pont) Speciálisan a $t = 4$ pontban is folytonosnak kell lennie.

   (1 pont) Itt a jobb oldali határértéke 1, míg a bal oldali határértéke 2α.

(1 pont) Ez a két érték a folytonosság miatt meg kell egyezzen, tehát $\alpha = \frac{1}{2}$.

(1 pont) Mivel F_X folytonos, és a 0 és 1 pontokon kívül mindenütt deriválható, így az X sűrűségfüggvénye

$$f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t) & \text{ha } t \neq 0, 1 \\ 0 & \text{ha } t = 0 \text{ vagy } 1 \end{cases}$$

(1 pont) Azaz

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{t}} & \text{ha } 0 < t < 4, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(Ha az általános formula nem szerepel, de világos, hogy hogyan számolja a megoldó a sűrűségfüggvényt, akkor is jár mindkét pont. Ha viszont az eredmény nincs minden egyes t-re definiálva, akkor 1 pont levonás jár.)

(1 pont) A várható érték definíciója alapján

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt.$$

(1 pont) Behelyettesítve

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{4}\, dt.$$

Ha nics hivatkozás a definícióra, csak a behelyettesített integrál szerepel helyesen, akkor is jár a mindkét pont.

(1 pont) A Newton–Leibniz-formula alapján ez $\left[\dfrac{t^{3/2}}{6}\right]_0^4$. (Ha nincs hivatkozás a formulára, akkor is jár a pont.)

(1 pont) Azaz $\mathbb{E}(X) = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

Második megoldás:

(1 pont) Mivel F_X egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ezért folytonos kell legyen.

(1 pont) Mivel F_X folytonos, és a 0 és 1 pontokon kívül mindenütt deriválható, így az X sűrűségfüggvénye

$$f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t) & \text{ha } t \neq 0, 1 \\ 0 & \text{ha } t = 0 \text{ vagy } 1 \end{cases}$$

(1 pont) Azaz

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}} & \text{ha } 0 < t < 4, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(Ha az általános formula nem szerepel, de világos, hogy hogyan számolja a megoldó a sűrűségfüggvényt, akkor is jár mindkét pont. Ha viszont az eredmény nincs minden egyes t-re definiálva, akkor 1 pont levonás jár.)

(1 pont) Mivel ez sűrűségfüggvény, ezért az integrálja 1:

(1 pont)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = \int_0^4 \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\, dt.$$

(1 pont) A Newton–Leibniz-formula szerint ez

$$= \left[\alpha\sqrt{t}\right]_0^4 = 2\alpha,$$

azaz $\alpha = \frac{1}{2}$. (Ha nincs hivatkozás a formulára, akkor is jár a pont.)

Az utolsó 4 pont ugyanaz, mint az első megoldásban.