BSZ2 tételek

1. tétel

Ismétlés nélküli:

- Permutáció: n darabra → $n!$
- Variáció: k kiválasztása n-ből $\frac{n!}{(n-k)!}$ permutációval, tehát egy kombinációt k!-szor számolunk
- Kombináció: Hányféle kiválasztás létezik? $\binom{n}{k}$

Ismétléses:

- Permutáció: A, A, B, B, B, C, C, C, C, D esetén ha különböző ek lennének ⇒ 10! Ha adott a 2A azonos ⇒ $\frac{10!}{2!}$ mert minden kombinációt 2!-szer számoltunk (a 2 db A miatt) ⇒ a végleges: $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 1!}$
- Variáció: k-t n-ből n^k féle képpen lehet kiválasztani.
- Kombináció: n-ből k darabot ismétléssel legyen mind az n lehetőségnek egy "rekesze" melyeket vonalak határolják ez n-1 vonal. Egy "rekeszbe" rajzunk egy pöttyöt ha onnan az adott kiválasztásban kiválasztunk egy elemet, ez k pötty.

  | | | | • • | | | • | | | | | egy kiválasztás

  n=11 és k=3-ra. ⇒

  ⇒ összes kiválasztás: $\binom{n-1+k}{k}$

Binomiális tétel:

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

Az összeg összes tagjában a kitevők összege n

az n kitevőből hány b ?

n elemű halmaznak $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}$ eleme van, ez pont 2^n

Pascal △

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

1	$= 2^0$
1 1	$= 2^1$
1 2 1	$= 2^2$
1 3 3 1	$= 2^3$
1 4 6 4 1	$= 2^4$
1 5 10 10 5 1	$= 2^5$
1 6 15 20 15 6 1	$= 2^6$
1 7 21 35 35 21 7 1	$= 2^7$
1 8 28 56 70 56 28 8 1	$= 2^8$

2. tétel

Gráf: pontok s összeköttetések matematikai halmaza.

Egyszerű gráf: Olyan gráf melyben nincs hurokél, vagy párhuzamos él

Komplementer gráf: G-nek G' komplementere ha G és G' pontjainak halmaza azonos és G' egy éle pontosan akkor van behúzva, ha az azonos él G-ben nincs behúzva (G egyszerű)

Izomorfia: G és H izomorf gráf, ha létezik H csúcsainak olyan megnevezése mellyel azonos lesz G gráffal (x, y szomszédos G-ben k él mentén ⇔ x_H, y_H szomszédos H-ban k él mentén

Részgráf: G-nek G' részgráfja ha G'-ben G-nek néhány éle s azok összes végpontja benne van

Feszített részgráf: G-nek G' feszített részgráfja ha G' ∀ csúcsa közt G összes éle megvan.

Élsorozat: felváltva élek sorozata él, csúcs, él, csúcs ... ∀ különböző él.

Út: Olyan élsorozat melyben ∀ csúcs különböző

Kör: Olyan élsorozat melyben ∀ csúcs különböző, kivéve az első s utolsó, ezek azonosak

Összefüggőség: G összefüggő ha bármely két csúcsa közt ∃ út

Komponens: G-nek G' komponense, ha G' összefüggő, s G-ből G'-hez bárhogy veszünk új csúcsot a keletkezett G'' gráf már nem összefüggő.

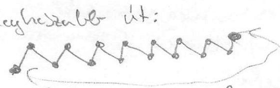
Fa: G fa ha összefüggő s nincs benne kör

G n csúcsú e élű gráf ⇒

1) G öf ⇒ $e \geq n-1$
2) G körmentes ⇒ $e \leq n-1$
3) G fa ⇒ $e = n-1$

Ha G fa és $n \geq 2$ csúcsa van ⇒ van ≥ 2 1 fokú pontja

↳ Leghosszabb út:



Feszítőfa: G-nek F feszítő fája, ha F G részgráfja, F fa, F s G csúcsai megegyeznek

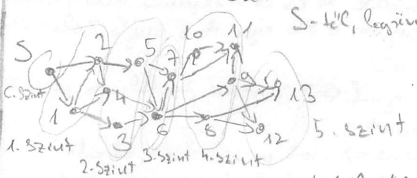
G-nek ∃ feszítőfája ⇔ G összefüggő

↳ Tetsz kör tetsz élét elhagyva az öf. nem romlik el

3. tétel

BFS Algoritmus: In: G egyszerű gráf, S kezdőcsúcs

Out: Tetsz csúcs távolsága S-től, legrövidebb út



A BFS feszítő részfát is talál (bejárás sorrendje)

BFS lineáris futásidejű

Minimális súlyú feszítőfa: G-nek az a feszítőfája melyben az élek súlyának összege minimális

Kruskal algoritmus: Sorbarakja az éleket súly szerint. Ezután sorban nézzük az éleket s ha a korábban levett élekkel nem alkot kört akkor levesszük, ha igen akkor nem vesszük be

↳ A keletkező F gráf körmentes ⇒ fa. Összefüggő, mert ha nem lenne akkor két komponens közti él nem alkotna kört tehát be lenne választva ⇒ F fa és öf ⇒ feszítőfa

F min összsúlyú? Tfh nem de Fopt az Legyen F és Fopt olyan, hogy a lehető legtovább azonosak a kiválasztás szempontjából

I. F-ben nincs benne a j. él Fopt-ban benne van. Ha F-ben nincs benne ⇒ a korábbiakkal kört alkot ⇒ Fopt-ban van kör ↯

II. F-ben benne van de F opt-ban nincs Foptban kell e_k mely F-ben nincs benne

Tudjuk: $w(e_j) < w(e_k)$
$F': F_{opt} + e_j - e_k$ } ⇒ $F' < F_{opt}$ ↯

e_k tagja e_j által zárt körnek

Ha $w(e_j) = w(e_k)$ akkor F' előáll a Kruskal algoritmus eredményeként az élek megfelelő rendezésével

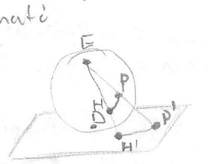
4. tétel

Síkbarajzolt gráf: G síkbarajzolt, ha élei csak a csúcsokban metszik egymást

Síkbarajzolható gráf: G síkbarajzolható ha van síkbarajzolt "variációja"

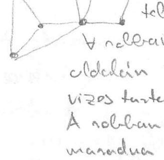
Ha G síkbarajzolható akkor G gömbre rajzolható

"Biz"



Euler tétel: G n csúcsú e élű t tartományú síkbarajzolható gráf ⇒ $n+t = e+2$

Biz: Legyenek az élek "gátak" a külső tartomány pedig legyen eredetileg elárasztva Hány gátat kell felrobbantani a teljes elárasztáshoz?



∀ robbantás egyik oldalán száraz másik oldalán vizes. A robbantások végén t vizes tartomány, eredetileg 1 ⇒ t-1 él robbantva A robbantás után feszítőfa marad. Ha maradna kör ⇒ a belseje vizes lenne kész fa ⇒ n-1 él van benne

⇒ $n-1+t-1 = e$ / +2

$n+t = e+2$

Ha G síkba rajzolható n csúcsú, e élű ⇒

⇒ $e \leq 3n-6$

Biz: C_i: i. tartományt határoló élek száma

$2e \geq C_1 + C_2 + \dots + C_t \geq 3t$

($C_1, C_2, \dots, C_t \geq 3$)

max az élek számának duplája

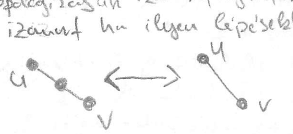
Euler formula ⇒ $t = e+2-n$

⇒ $3t = 3e+6-3n \leq 2e$

⇒ $e \leq 3n-6$

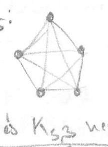
(Ha C_i ∀i-re $> k$ ⇒ $k \cdot t \leq 2e$)

Topologikusan izomorf gráfok: G és H topologikusan izomorf ha ilyen lépésekkel egymásba alakítható

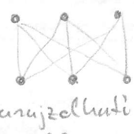


Ha G-nek van nem síkbarajzolható részgráfja akkor G sem síkba rajzolható.

K_5:



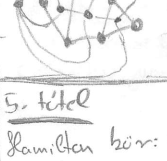
$K_{3,3}$:



K_5 és $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható

Kuratowski tétele: G síkba rajzolható, ha nem létezik K_5-el vagy $K_{3,3}$-al topologikusan izomorf részgráfja. Ez fordítva is igaz G s.r. ⇔ ∄ K_5 | $K_{3,3}$-al top. izomorf részgráf

Síkgráf duálisa: csúcsokból tartományok élekből élek, tartományokból csúcsok



G	G*
n	$n^* = t$
e	$e^* = e$
t	$t^* = n$

A duális is síkbarajzolható

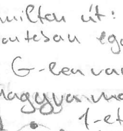
5. tétel

Hamilton kör: Olyan kör mely a gráf ∀ csúcsát pontosan egyszer tartalmazza

Hamilton út: Olyan út mely a gráf ∀ csúcsát pontosan egyszer tartalmazza

Ha G-ben van Hamilton kör ⇒ k csúcsot elhagyva max k komponens lesz

Biz



1-et elhagyva 1 komponens lesz (Ham kör)

n > 1-et elhagyva a Ham kör n darabra esik szét ⇒ ez max n komponens lesz

Ha G-ben van Ham út ⇒ k csúcsot elhagyva max k+1 komponens lesz

Biz: körrel azonos érvelés.

Dirac tétel Ha G n csúcsú egyszerű gráf s ∀ csúcsra $d(v) \geq \frac{n}{2}$ ($d(v)$ fokszáma) => G-ben van Ham kör

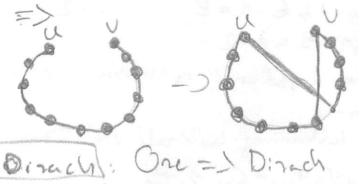
Ore tétel: Ha G n csúcsú egyszerű gráf s ∀ v,w nem szomszédos csúcsokra: $d(v)+d(w) \geq n$ => G-ben van Ham kör

Lemma Ha G-ben van Hamilton út u-ból v-be és $d(v)+d(u) \geq n$ => G-ben ∃ Hamilton kör

Biz: Lemma => Ore: Tfh ∃ ellenpélda:
G-ben ∀ v,u-ra $d(v)+d(u) \geq n$ de nincs Hamilton kör.
Legyen G' azonos G-vel, csak u s v szomszédos benne => G'-ben ∃ H kör => G-ben ∃ Hh út => mivel $d(u)+d(v) \geq n$ G-ben ∃ H kör ↯

Biz Lemma: Színezzük u szomszédjait pirosra, v szomszédait pedig kékre $|P|=d(u)$, $|K|=d(v)$ mivel $d(u)+d(v) \geq n$ ezért u-ból v-be vezető Hamilton úton lesz szomszédos piros s kék csúcs

=>



Biz Dirach: Ore => Dirach

Euler út: Olyan út egy gráfban mely a gráf minden csúcsát pontosan egyszer érinti

Euler kör: Olyan kör egy gráfban mely a gráf minden csúcsát pontosan egyszer érinti

∃ Euler út => ≤2 kivétellel ∀ csúcs foka páros
∃ Euler kör => nincs ptln fokú csúcs
+ Max 1 db 1-nél nagyobb komponense van
Ezek oda vissza igazak

Biz: Járjuk be G-t elakadásig: biztosan a kezdőpontban akadunk el.
Keressünk egy új kezdőpontot melynek élei közt van nem kiválasztott él, innen is kezdjünk egy lejárást
Ezt folytassuk amíg minden csúcs ki nincs választva

6. tétel

$\chi(G)$: Legyen G egy gráf és $k \geq 1$. A G k színnel színezhető, ha G ∀ csúcsa kiszínezhető k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsnak színe különböző, de k-1 színnel már nem színezhető. Jele $\chi(G)=k$

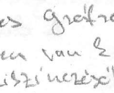
$\omega(G)$: A G gráf klikkszáma k ha G-ben található k csúcsú teljes részgráf, de k+1 csúcsú már nem. Jele $\omega(G)=k$

∀ hurokmentes gráfra $\omega(G) \leq \chi(G)$

Biz: Ha G-ben van k tagú teljes részgráf => ennek kiszínezéséhez kell legalább k szín. (Mert ∀ csúcs ∀ csúccsal szomszédos)

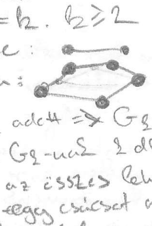
Zykov konstrukció: ∀ k-ra ∃ G_k hogy $\omega(G_k)=2$ de $\chi(G_k)=k$. $k \geq 2$

Biz: k=2-re:
k=3-ra:



Ha G_k adott => G_{k+1}-et adjuk meg: vegyük G_k-nak k db diszjunkt példányát. Ezután az összes lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot a k diszjunkt példányból s kössük őket egy-egy új csúcshoz

k=2 =>
k=3 =>



Az így képzett új csúcsok halmaza legyen Z

G_{k+1}-ben az eredeti diszjunkt példányokban nem lesz háromszög, $\omega(G_k)=2$.
Z-beli csúcsok nincsenek összekötve => Δ csak úgy lehet, ha benne 1 Z beli csúcs van csak. De Z ∀ csúcsa különböző példányokhoz van kötve, melyek közt nem fut él => $\omega(G_{k+1})=2$
A példányok megszínezhetők k színnel.
=> Ha k színnel akarnánk megszínezni G_{k+1}-et minden példányban van mind a k szín => Z-nek van olyan csúcsa mely szomszédos ∀ k színnel => kell k+1. szín.
Ha a G_k-at megszínezzük k színnel Z ∀ tagját pedig egy k+1-el => van legális k+1 színezésünk

Mohó színezés: Sorba vesszük s színezzük a csúcsokat

$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$: $\Delta(G)$ a csúcsok fokszámának maximuma.

Biz Ha a legnagyobb fokszámú csúcs összes szomszédját is különböző színnel kell megszínezni akkor is $\Delta(G)+1$ színnel ∀ csúcs megszínezhető
Vagyis mohó színezés soha nem megy $\Delta(G)+1$ fölé

Intervallumgráf: G egyszerű gráf intervallumgráf ha ∃ olyan $I_1, I_2 .. I_n \in R$ intervallumok hogy G ∀ csúcsa megfelel egy intervallumnak s két csúcsnak akkor van közös éle, ha intervallumaik metszik egymást.

Ha intervallumgráfot intervallumok szerint növekvő sorrendbe helyezzük s alkalmazzuk a mohó színezést => opt $\chi(G)$-t kapunk

Intervallumgráfra: $\omega(G)=\chi(G)$

Páros gráf: G páros gráf ha G csúcsai feloszthatóak A és B diszjunkt halmazokra úgy, hogy G ∀ éle egy A s egy B beli csúcsot köt össze.

G páros gráf ⟺ G nem tartalmaz páratlan hosszú kört

Biz G páros => csak páros hosszú kör, draw.
Legyen G-ben ∀ kör páros hosszú.
=> BFS-nek az egyes szintjein nem fut él ha futna akkor lenne ptln kör: 2·táv+1

7. tétel

Párosítás: G gráfban M élhalmaz párosítás ha (M nem tartalmaz hurokélt) s M semelyik két élének nincs közös végpontja.
M maximális párosítás, ha G-nek nincs M-nél nagyobb párosítása.
M teljes párosítás ha G ∀ csúcsára illeszkedik M-beli él. Max párosítás jele: $\nu(G)$

Lefogó ponthalmaz: G gráfban X ponthalmazt lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha G-nek ∀ élének ~~ke~~ egyik végpontja X-beli. X minimális ha a legkisebb, Jele: $\tau(G)$

Független ponthalmaz: G gráfban Y ponthalmaz fgtlen ha semelyik két tagja nem szomszédos. Maximális ha a legnagyobb. Jele: $\alpha(G)$

Lefogó élhalmaz: G gráfban Z élhalmaz lefogó, ha G ∀ csúcsára illeszkedik legalább 1 Z-beli tag. Minimális ha a legkisebb. Jele: $\rho(G)$

∀ G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$

Biz: Legyen M max párosítás, X min lefogó ponthalmaz. Ekkor ∀ M-beli élre másik X-beli csúcsnak kell illeszkednie => $|M| \leq |X|$ => $\nu(G) \leq \tau(G)$

∀ G gráfra $\alpha(G) \leq \rho(G)$

Biz Legyen Y max fgtlen ponthalmaz s Z min lefogó ~~pont~~élhalmaz. Ekkor ∀ Y-beli csúcsra másik Z-beli élnek kell illeszkednie. => $|Y| \leq |Z|$ => $\alpha(G) \leq \rho(G)$

Lemma Legyen G egy n csúcsú izolált pontot nem tartalmazó gráf, k pedig tetsz nemnegatív egész =>
(i) Ha G-ben van k élű párosítás => G-ben van legfeljebb n-k élű lefogó élhalmaz
(ii) Ha G-ben van k élű lefogó élhalmaz => G-ben van legalább n-k élű párosítás

Biz (i): Legyen M egy k élű párosítás. ∀ v csúcs esetén melyre nem illeszkedik M-beli él válasszunk egy v-re illeszkedő élt s ezt rakjuk hozzá M-hez -> Z => Z lefogó élhalmaz
M által le nem fedett csúcsok száma n-2k => Z-ben van k él (M-ből) + n-2k él a v-kből => $|Z| \leq k+(n-2k) = n-k$

(ii): Legyen Z egy k élű lefogó élhalmaz G-ben. H: G csúcsai, Z élei. Ha H-nak van 1 csúcsú komponense => itt hurokél
Legyen H legalább 2 csúcsú komponenseinek száma c. Mivel ezek összefüggők ezért élszámuk: ezen komponensek élszáma csúcsszáma -c. H összesített élszáma n-c nál nagyobb => $k \geq n-c$ -> $c \geq n-k$
=> H ∀ legalább 2 csúcsú komponenséből válasszunk ki egy élet -> M. M párosítás s $c \geq n-k$

Gallai tétele ∀ n csúcsú G gráfra
(i) $\alpha(G)+\tau(G)=n$
(ii) $\nu(G)+\rho(G)=n$ (ha G-nek nincs izolált pontja)

Biz (i): Legyen X min lefogó ponthalmaz, ekkor $Y=V(G)/X$ max fgtlen ponthalmaz (innen következik mert $|X|=\alpha(G)$, $|Y|=\tau(G)= n-\alpha(G)$ => $\alpha(G)+\tau(G)=n$)
MERT:
Legyen $\bar{H}=V(G)/H$. H pontosan akkor lefogó ponthalmaz ha $\bar{H}$ fgtlen ~~pont~~halmaz.
G-nek ∀ {u,v} élére $u \in H$ vagy $v \in H$ => G-nek nincs olyan {u,v} éle hogy $u \in \bar{H}$ és $v \in \bar{H}$ => fgtlen ponthalmaz
Tfh X min lefogó ponthalmaz => $Y=\bar{X}$ fgtlen ponthalmaz. Ha Y nem maximális => ∃ Y_1: $|Y_1|>|Y|$ => ∃ X-nél kisebb lefogó ponthalmaz ↯

(ii) Legyen M max párosítás $|M|=\nu(G)$ => G-ben ∃ max $n-\nu(G)$ élű lefogó élhalmaz =>
=> $\rho(G) \leq n-\nu(G)$ => $\rho(G)+\nu(G) \leq n$
Megfordítva: $\nu(G) \geq n-\rho(G)$ =>
=> $\nu(G)+\rho(G) \geq n$ =>
=> $\nu(G)+\rho(G)=n$

Tutte tétele G gráfban létezik teljes párosítás ⟺ G-ben a csúcsok ∀ részhalmazára $X \subseteq V(G)$
$C_p(G-X) \leq |X|$
Ahol G-X az a gráf mely G X csúcsai nélkül
$C_p(H)$ pedig H ptln sok csúcsot tartalmazó komponenseinek a száma

Biz =>: Legyen G-ben M egy teljes párosítás s X egy tetsz részhalmaz. G-X-nek pedig l db ptln csúcsú komponense van: $C_1, C_2 .. C_l$
Bármely C_i ∀ csúcsára illeszkedik M-beli él. Mivel C_i ptln csúcsú ezért legalább egy M-beli él párja C_i-n kívüli. Legyen v_i ∀ C_i-hez ez a csúcs => $v_i \in X$ ∀ $i \in \{1..l\}$
=> $|X| \geq l = C_p(G-X)$

8. tétel

Javító út: Legyen G egy páros gráf és M egy párosítás G-ben. Ekkor egy G-beli P utat javító útnak M-re nézve ha:
(1) P egy M által fedetlen A beli csúccsal indul
(2) P egy M által fedetlen B-beli csúcsban végződik
(3) P-nek ∀ páros számú éle M-beli

Javítás algoritmus: Ha van javító út => csere, ezt a végtelenségig... Tadá

Alternáló út: Olyan "javítóút" melyre (1) és (3) teljesül de (2) nem feltétlen

$\boxed{\text{Lemma}}$ Legyen G páros gráf, M párosítás melyre nincs javítóút G-ben

(1) Jelölje A_1 s B_1 az M által nem fedett csúcsok halmazát

(2) Jelölje A_2 azokat az M által fedett A-beli csúcsokat melyekbe vezet alternáló út.

(3) A_3 a maradék A-beli M által fedett csúcsot

(4) Jelölje B_2 A_2 párjait B_3 pedig A_3 párjait.

Ekkor G-nek nincs éle mely $A_1 \cup A_2$ és $B_1 \cup B_3$ közt vezet

$\boxed{\text{Biz}}$ Legyen $e=\{a,b\}$

Ha $a \in A_1$ és $b \in B_1$ => $a \to b$-be egyetlen élű javítóút vezetne

Ha $a \in A_1$ és $b \in B_3$ => $a \to e \to b \to a_3$ egy kétélű alternáló út lenne A_3-ban mely ellentmondás

Ha $a \in A_2$, $b \in B_1$ => a-ba vezet alternáló út ezt e-n felfutva B-be jutunk => javító út (ↁ)

Ha $a \in A_2$, $b \in B_3$ => a-ba vezet alternáló út: P. P-t e-vel megtoldva B_3-ban vagyunk. Innen M-en továbbmenve A_3-ba jutunk egy P' alternáló úton (ↁ)

Ha G páros gráf M párosításra nincs javítóút => M max párosítás

$\boxed{\text{Biz}}$ Legyen M elszámának. Legyen $X = A_3 \cup B_2$. Legyen $e=\{a,b\} \in X$ lefogó ponthalmaz mert: ha $a \in A_3$ => $e \in X$, ha $a \in A_1 \cup A_2$ => $b \in B_2$ a lemma miatt => $e \in X$.

X M minden élének pontosan egyik végpontját tartalmazza => $|X| = k$

$\left.\begin{array}{l} \nu(G) = |M| \geq k \\ \tau(G) = |X| \leq k \end{array}\right\} k \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq k$ =>

M max párosítás.

$\boxed{\text{Kőnig tétel}}$ $\forall$ G páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$

$\boxed{\text{Biz}}$ Look above feel

Ha G páros s nem tartalmaz izolált pontot => $\rho(G) = \rho(G)$

$\boxed{\text{Hall tétel}}$ G páros gráfban létezik A-t lefedő párosítás <=> $\forall X$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$ ahol N(X) az a részhalmaz mely X szomszédait adja.

$\boxed{\text{Biz}}$ <= Futtassuk javítutas algoritmust. Tfh M nem fedi A-t => $N(A_1 \cup A_2) = B_2$. Mivel $|A_2| = |B_2|$ => $|A_1 \cup A_2| > |B_2|$ => $X = A_1 \cup A_2$ esetén sérül az $|N(X)| \geq |X|$ feltétel. (ↁ)

$\boxed{\text{Frobenius tétele}}$ G páros gráfban $\exists$ teljes párosítás <=> $|A| = |B|$ és $\forall$ X részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$

Ha G páros gráf $d \geq 1$ reguláris => G-ben van teljes párosítás

9. tétel

Frobenius tétele... you know... in general

Gráfok élszínezése: Legyen G gráf s $k \geq$ egész. G gráf k színnel élszínezhető, ha $\forall$ szomszédos élének színe különböző, és k-1 színnel már nem színezhető így. Jele: $\chi_e(G)$

$\forall$ hurokmentes gráfra $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$, hisz a legnagyobb fokú csúcs éleinek mind különböző színűnek kell lennie.

$\boxed{\text{Vizing tétel}}$ $\forall$ egyszerű gráfra teljesül $\chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$

$\boxed{\text{Kőnig tétel}}$ $\forall$ G páros gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$ teljesül

$\boxed{\text{Biz}}$ Legyen $d = \Delta(G)$. Tfh G d-reguláris => $\exists$ ... M teljes párosítás ...

élt 1. színűre, majd hagyjuk el élet. Ezt folytatva kapunk egy d színű párosítást.

Most legyen G nem d-reguláris. Egészítsük ki! Ha $|A| \neq |B|$ vegyünk fel csúcsokat a kellő helyre. Válasszunk tetsz $a \in A$, $b \in B$ csúcspontot melyekre $d(a) < d$ s $d(b) < d$ s húzzuk őket össze. Így egy d reguláris gráfot kapunk (legalább az egyik halmazból $|A| \cdot k$ él kell ki, mivel $|A| = |B|$ ezért B-be is $|B| k$ élt kell). A kapott gráf élszínezhető d színnel, így az eredeti is.

10. tétel

Hálózat: Legyen G egy irányított gráf melyben minden élhez van egy kapacitás értéke, mely nem negatív (c). Ezenkívül egy kijelölt s és t csúcsa $s \neq t$. Ekkor (G,s,t,c) hálózat

Folyam: Egy hálózatban folyam az az f fgv mely minden élhez egy pozitív számot rendel úgy hogy: $f(e) \leq c(e)$ $\forall$ él esetén, $\sum\limits_{e:\to v} f(e) = \sum\limits_{e:v\to} f(e)$ $\forall v \neq s,t$ csúcs esetén. A folyam értéke: $m_f = \sum\limits_{e:s\to} f(e) - \sum\limits_{e:\to s} f(e)$

Vágás: Egy folyamban vágásnak nevezzük azt az X csúcshalmazt melyre $s \in X$ de $t \notin X$. Kapacitása $c(X) = \sum\{c(e): e$ kilép X-ből$\}$

Legyen f folyam a (G,s,t,c) hálózatban. Ekkor legyen f-hez tartozó H_f segédgráf. H_f irányított s csúcsai megegyeznek G csúcsaival.

↳ Ha $e=(u,v)$ olyan éle G-nek melyre $f(e) < c(e)$ akkor $e \in H_f$ (előreél)

↳ Ha $e=(u,v)$ olyan él G-nek melyre $f(e) > 0$ akkor e megfordítása: $e' \in H_f$ (visszaél)

Ekkor f-re javítóút H_f-ben egy irányított út s-ből t-be

Javítóalgoritmus: Javítóutak keresése amíg lehet. Az új f-ben minden érték nő a $\delta = \min\{c(e) - f(e)$ előreélek; $f(e)$ él visszaélek$\}$ értékkel

$\boxed{\text{Biz}}$ Legyen X olyan vágás hogy $c(X) = m_f$ => $\forall f'$ folyamra $m_{f'} \leq c(X) = m_f$

Legyen X az az élhalmaz melyekre $\exists$ irányított út H_f-ben => $t \notin X$ => $\forall e$ X-ből kilépő élre $f(e) = c(e)$, ha ez nem lenne igaz => lenne H_f-ben jav út t-be

Hasonló minden $\forall e$ X-be belépő élre $f(e) = 0$ => Ha nincs több jav út => max folyamot kapunk.

A javítóutas algoritmus után $\forall$ csúcs melyre H_f-ben s-ből el lehet jutni eleme egy min vágásnak ($c(X) = m_f$)

$\boxed{\text{Ford Fulkerson tétel}}$ $\forall$ folyamra ha X min vágás => $c(X) = m_f$

$\boxed{\text{Biz}}$ Jav utas algoritmus után $m_f = c(X) = d$ => $d \leq$ max folyam s $d \geq c$ min vágás (mivel a legkisebb kapacitáson "át kell lennie" d mennyiségnek) innen max folyam = min vágás

$\boxed{\text{Edmonds Karp tétel}}$ Ha G gráf n csúcsú s m élű. A javutas algoritmus során ha H_f-ből $\forall$ a legrövidebb jav utat választjuk => az algoritmus maximum m·n lépés múlva leáll.

$\boxed{\text{Egészértékűség lemma}}$ Ha egy folyamban $\forall$ élre $c(e) \in \mathbb{Z}$ => $\exists$ olyan max folyam melyre $\forall$ élre $f(e) \in \mathbb{Z}$ s ez a javítóutas algoritmussal található

$\boxed{\text{Biz}}$ Indítsuk egy egészértékű folyamból a javutas algoritmust => $\forall$ új folyam egészértékű marad.

11. tétel

Éldiszjunkt út: s-ből t-be olyan utak melyeknek nincs közös éle

Pontdiszjunkt út: s-ből t-be olyan utak melyeknek nincs közös csúcsa

Legyen f olyan $m_f = d$ értékű folyam G gráfban melyre $\forall$ élre $f(e) = 0$ vagy $f(e) = 1$ => G-ben létezik d pontdiszjunkt út

Lefogó élhalmaz: Z élhalmaz lefogja az s-ből t-be vezető utakat, ha $\forall$ s-ből t-be vezető útnak van éle mely eleme Z-nek

Lefogó ponthalmaz: Y ponthalmaz lefogja az s-ből t-be vezető utakat, ha $\forall$ s-ből t-be vezető útnak van csúcsa mely eleme Y

Legyen G irányított gráf, $s,t \in V(G)$ $s \neq t$ és a $k \geq 1$ egész. Ekkor (i) <=> (ii) <=> (iii)

(i) Létezik k éldiszjunkt út s-ből t-be

(ii) Nem létezik legfeljebb k-1 élű s-ből t-be vezető irányított utakat lefogó élhalmaz

(iii) A (G,s,t,c) hálózatban max. folyam értéke k ahol c az azonosan 1 kapacitás függvény

$\boxed{\text{Biz:}}$ (i) => (ii)

Legyen $P_1, P_2 \ldots P_k$ éldiszjunkt utak. Z tetsz lefogó élhalmaz => $\forall P_i$ esetén $\exists e_i \in P_i$, $e_i \in Z$ => $e_1, e_2 \ldots e_k$ különbözőek mert $P_1, P_2 \ldots P_i$ éldiszjunktak => $|Z|$ nagyobb k-1

(ii) => (iii)

Legyen tetsz vágás X => kilépő élek lefogják => legalább k él lép ki => max folyam értéke legalább $k-1 = k$

(iii) => (i)

Legyen max folyam f => $m_f (= d) \geq k$ => $\exists$ k éldiszj út G-ben mert csak (ha egyszer van belépő az ki is fog lépni ... duh...)

Ugyanez irányítatlan gráfokra is igaz annyi különbséggel hogy •—• => •⇄• és ha: $\bullet \overset{1}{\underset{1}{\rightleftarrows}} \bullet$ => $\bullet \overset{0}{\underset{0}{\rightleftarrows}} \bullet$ javítóutas gráfban

$\boxed{\text{Menger tétel éldiszjunkt utakra}}$ $\forall$ G irányított/-atlan gráfra s annak $s,t \in V(G)$ $s \neq t$ pontjára $\lambda_G(s,t) = \lambda'_G(s,t)$ ahol λ_G az éldiszjunkt utak száma λ'_G pedig az s,t utakat lefogó ponthalmaz

$\boxed{\text{Biz}}$ Legyen $k \geq 1$ Ha $\lambda'_G \geq k$ => nem létezik max k-1 méretű ilyen élhalmaz. Fenti tételek alapján $\lambda'_G(s,t) \geq k$ => $\lambda_G(s,t)$ => $\lambda'_G = \lambda_G$

Ugyanez pontdiszjunktra, mert nyilván...

Él/Pont összefüggőség: Legyen G gráf s k egész. G k-szorosan pont/él öf ha pontjai/élei közül (k-1)-et elhagyva a gráf még mindig összefüggő marad (Pontokra kell még, hogy k+1 csúcsa legyen legalább)

$\lambda(G) = k$ k-szorosan élöf

$\kappa(G) = k$ k-szorosan pont öf

$\boxed{\text{Menger tétele többszörös összefüggőségre}}$ Legyen G irányítatlan gráf s $k \geq 1$ egész =>

(i) G csak akkor k-szorosan élöf ha bármely két pontja közt $\exists$ k éldiszjunkt út

(ii) Same w/ pont öf

$\boxed{\text{Biz}}$ Of fucking course... jeez

12. tétel

Aciklikus: Egy G irányított gráf aciklikus, ha nem tartalmaz irányított kört

Topologikus sorrend: Legyen G irányított gráf, s $v_1, v_2 \ldots v_n$ csúcsainak egy felsorolása. Ez a felsorolás egy topologikus rendezés, ha G $\forall (x,y)$ élére x előbb van a sorrendben mint y.

G irányított gráfnak csak akkor van topologikus rendezése ha aciklikus

$\boxed{\text{Biz}}$ Ha G aciklikus => tartalmaz nyelőt: vegyük a leghosszabb irányított utat, ennek végpontjából nem megy ki él => nyelő.

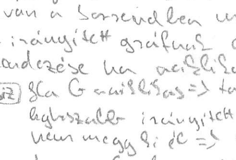
Legyen G-ben egy nyelő v_n => hagyjuk el => G' lenne nyelő $v_{n-1} \ldots$ $v_1, v_2 \ldots v_n$ egy topologikus sorrend

Legrövidebb/leghosszabb út v_i-ből v_j-be

0 mennyi $\min\{e_{1,3}; w(v_{i+1}) + \min\{e_{2,3}\}\}$ stb.

13. tétel

DFS algoritmus:



A DFS algoritmus addig jár le a gráfot, míg újra kell kezdeni => eredménye: DFS erdő

Legyen G irányított gráf. Benne F DFS erdő, s $e=(u,v)$ él

(i) e faél ha $e \in F$

(ii) e előreél ha F-ben $\exists$ út u-ból v-be

(iii) e visszaél ha F-ben $\exists$ út v-ből u-ba

(iv) e keresztél ha F-ben nincs út u s v között

A DFS futása közben a fenti élekre az adott él végpontjának melységéből s befejezési számából következtethetünk. G-ben DFS-t futtatva G csak akkor aciklikus ha a DFS során nem keletkezik visszaél s ekkor befejezési sorrend fordítottja ...