SZABTECH 1. GYAKORLAT ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEINEK KIDOLGOZÁSA

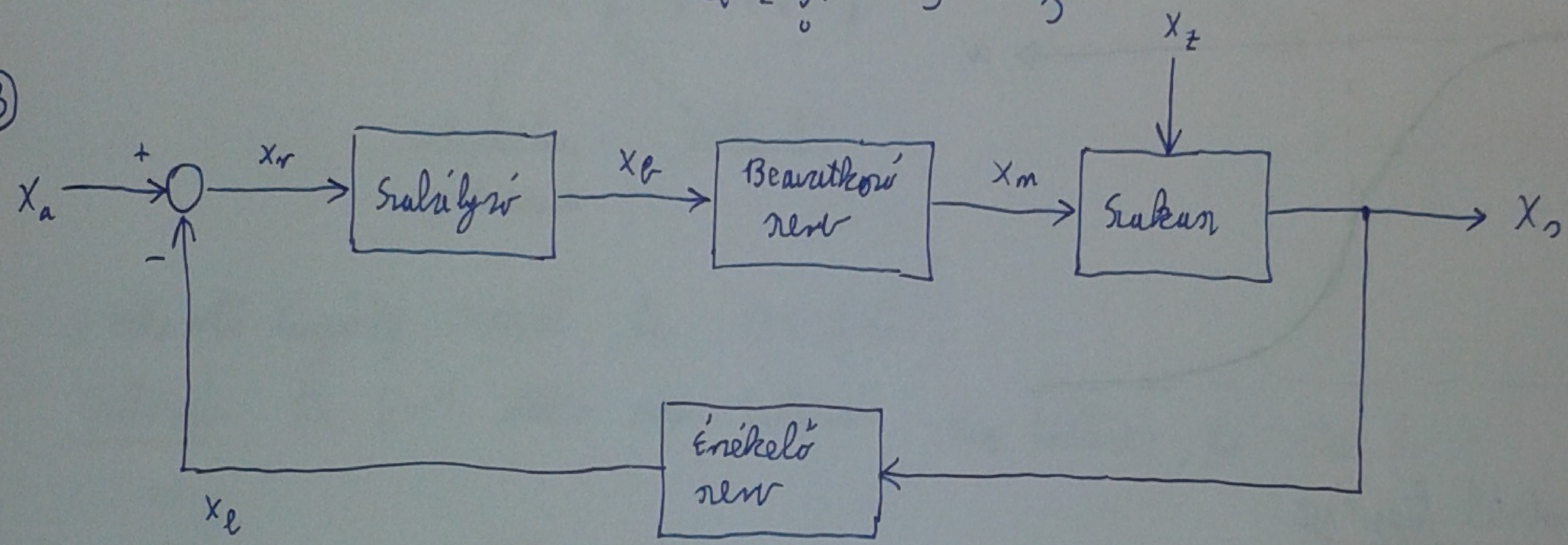
① $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$

$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{t \cdot e^{3t}\} = \frac{1}{(s-3)^2}$

② Ha $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, akkor: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$

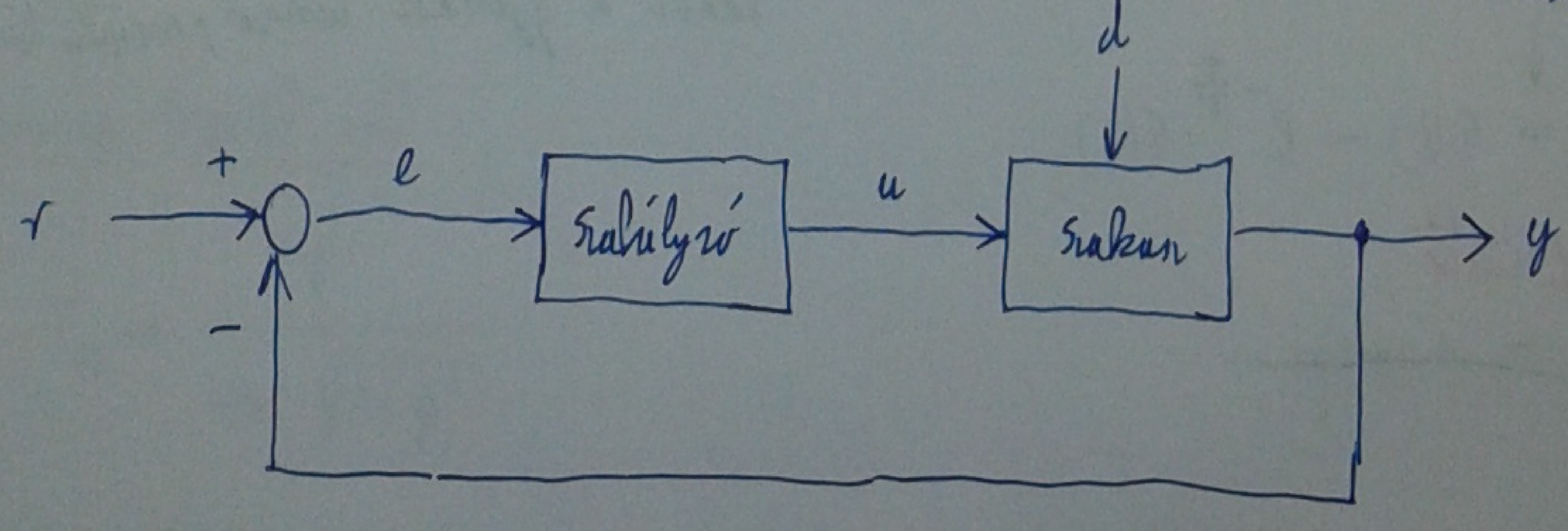
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

③



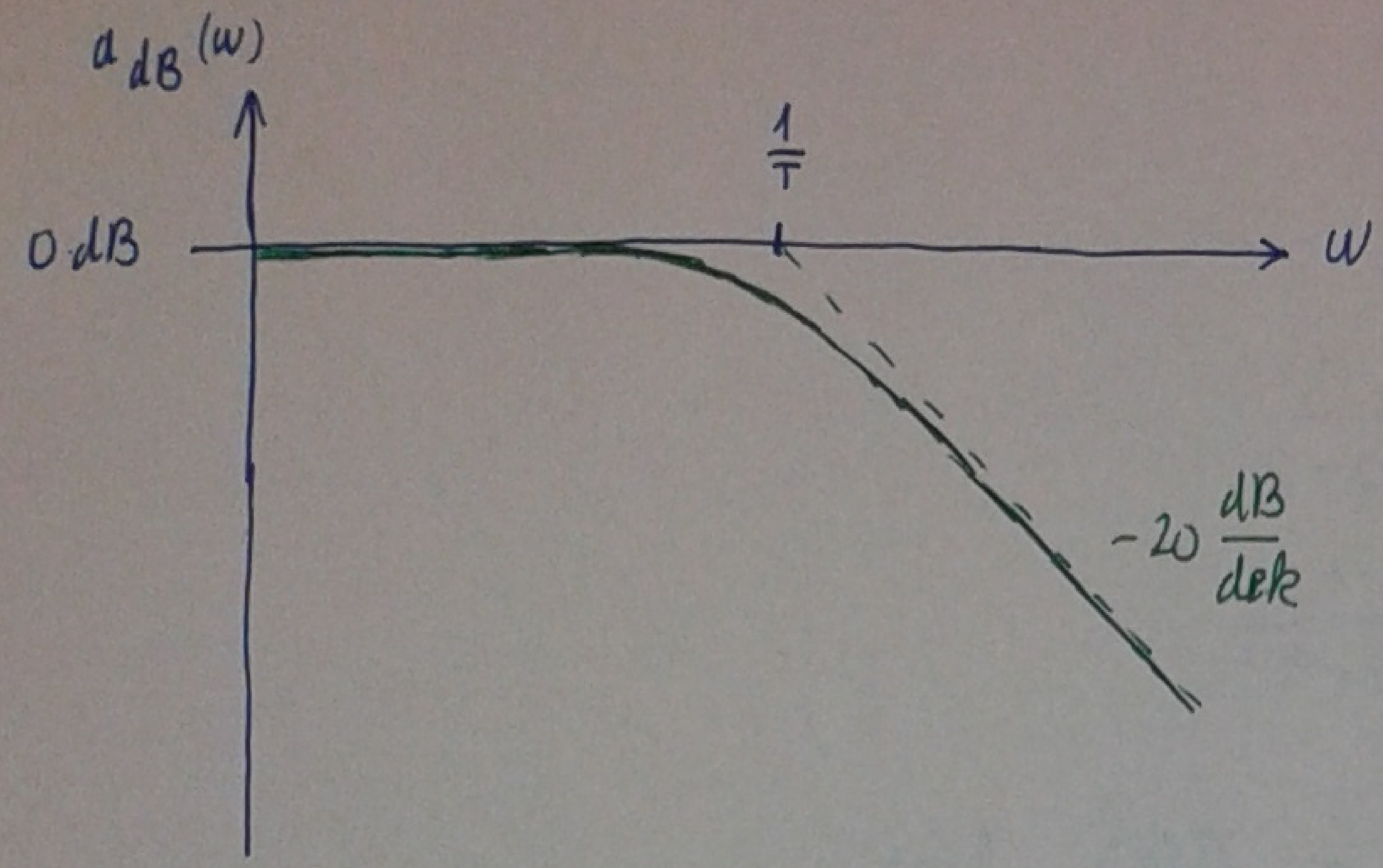
Jelmagyarázat:
- X_a : alapjel
- X_r : rendelkező jel
- X_e : beavatkozó jel
- X_m : módosított jellemző
- X_s : szabályozott jellemző
- X_z : zavaró jel
- X_e : ellenőrző jel

Egyszerűsített ábra esetén a beavatkozó szervet és az érzékelő szervet hozzávesszük a szakaszhoz!



④ Egytárolós tag átviteli függvénye: $W(s) = \dfrac{1}{1+s\cdot T}$, ahol T az időállandó

↘ Töréspont $\omega = \dfrac{1}{T}$ -nél lefelé

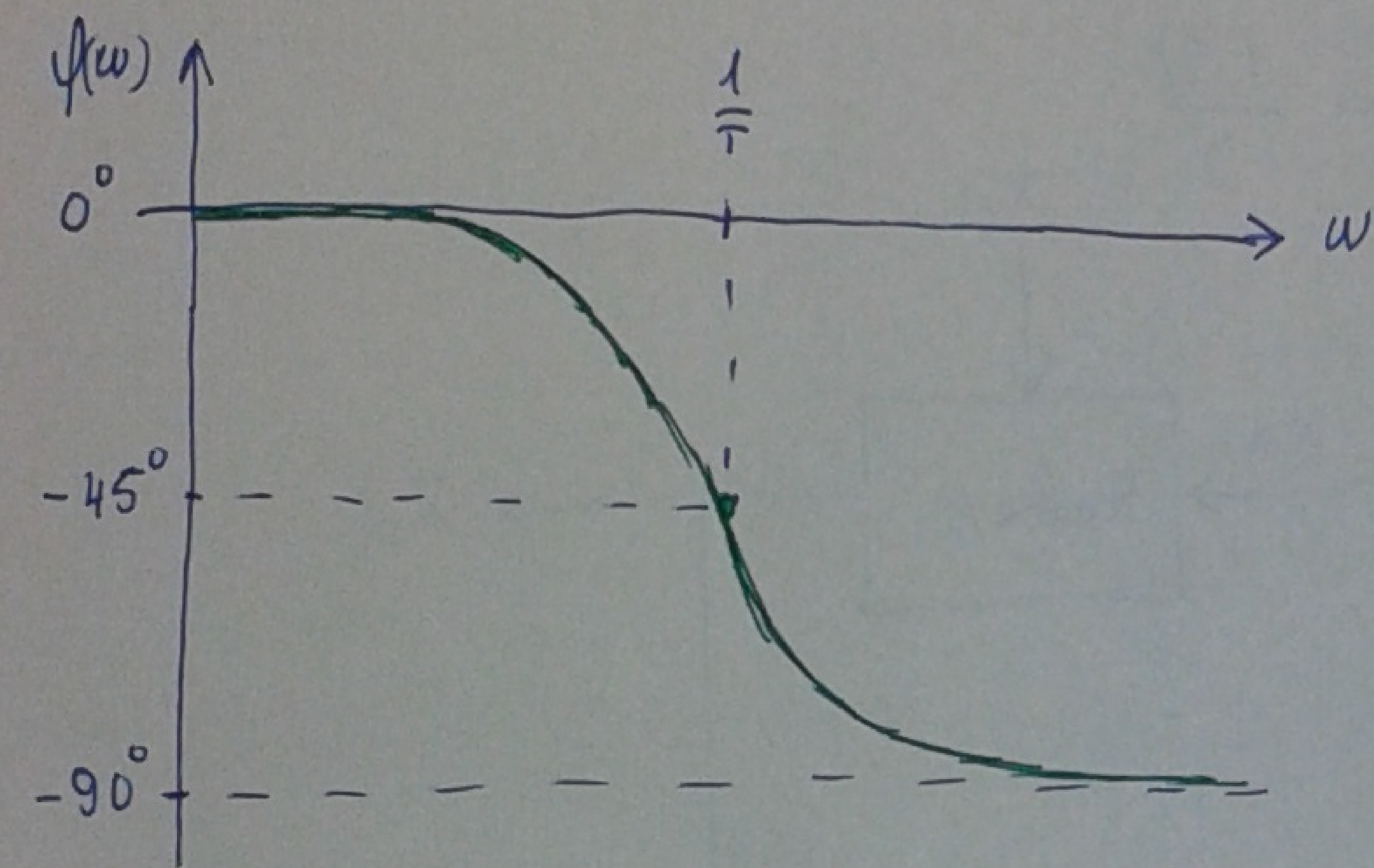


Fázisfüggvény: $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$

$$\varphi\left(\omega = \frac{0{,}1}{T}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{0{,}1}{T}\cdot T\right) \approx -5^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{T}\cdot T\right) = -45^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{10}{T}\cdot T\right) \approx -85^\circ$$



⑤ Egytárolós tag átviteli függvénye:

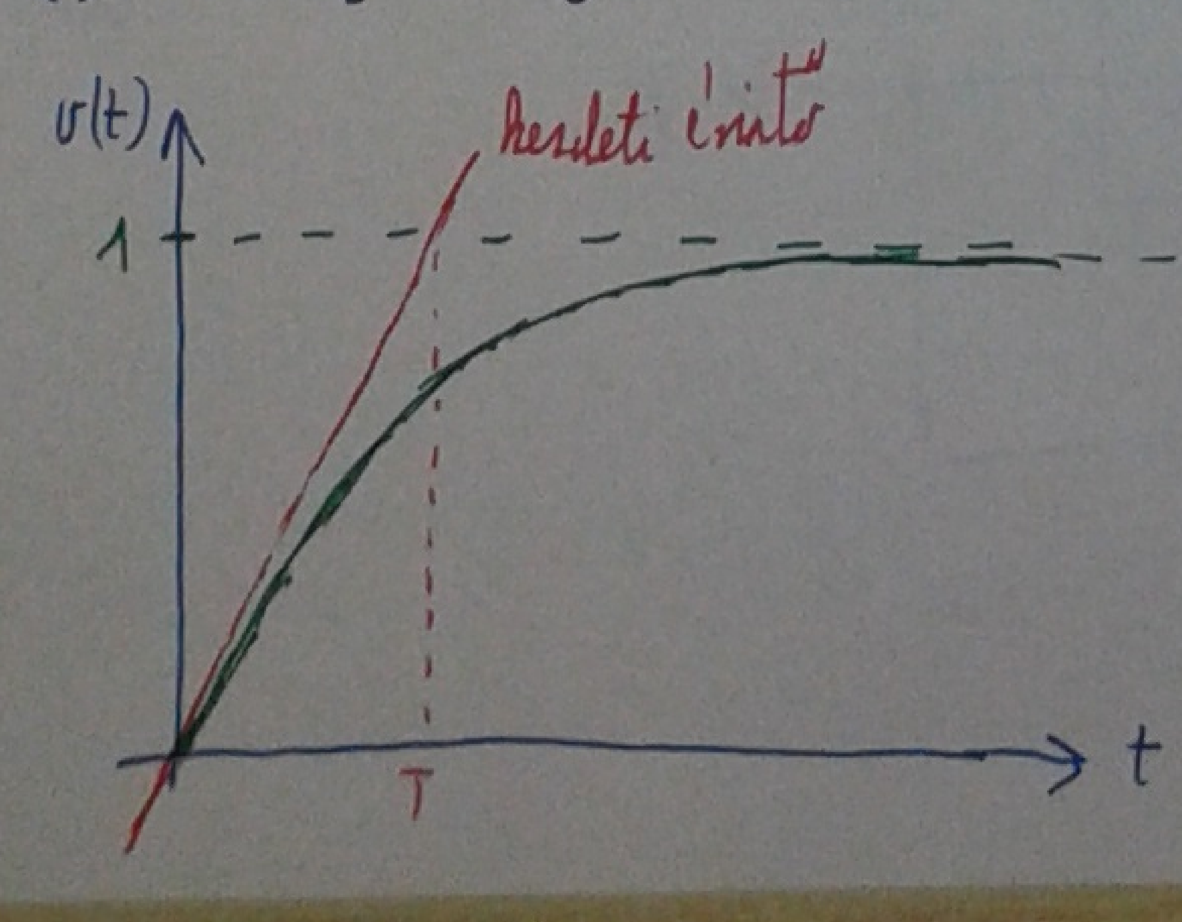
$$W(s) = \frac{1}{1+sT} = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$ valamint $u(t) = \varepsilon(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = W(s)\cdot U(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{T}} = \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{T}{s} + \frac{-T}{s+\frac{1}{T}}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

↑ Letakarásos módszer $\Rightarrow$ „letakarom" az egyik gyökös tagot és behelyettesítem ennek a gyöknek az értékét, így megkapom az ehhez a gyökhöz tartozó parciális tört együtthatóját!

Tagonként inverz-Laplace ↓

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \varepsilon(t) - e^{-\frac{t}{T}}\cdot\varepsilon(t)$$



Kezdeti meredeksége az ugrásválasznak:

$$v'(0) = 0 - \left(-\frac{1}{T}\right)\cdot e^{-\frac{0}{T}} = \frac{1}{T}$$

Kezdeti érintő hol metszi a konstans 1 egyenest? $v'(0)\cdot t = 1$

$$\frac{t}{T} = 1 \Rightarrow t = T \text{ időpillanatban!}$$

Az ugrásválasz átlagosan $\sim 5T$ idő után tekinthető állandósultnak ← ökölszabály!

⑥ Kéttárolós lengőtag:

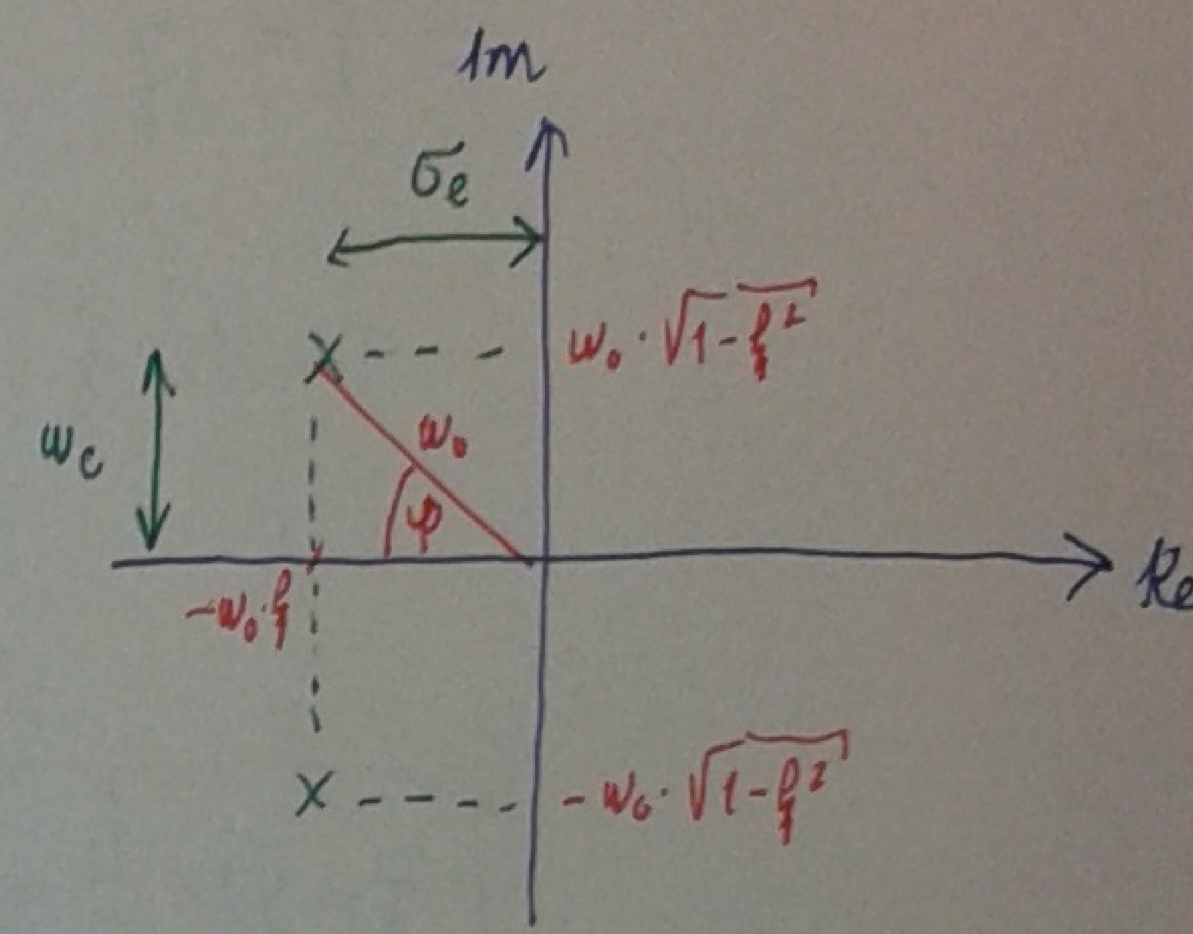
$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T\cdot s + T^2\cdot s^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0\cdot s + s^2}$$

Zérusai: Nincsenek

Pólusok: $s_{1,2} = -\omega_0\cdot\xi \pm j\cdot\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$

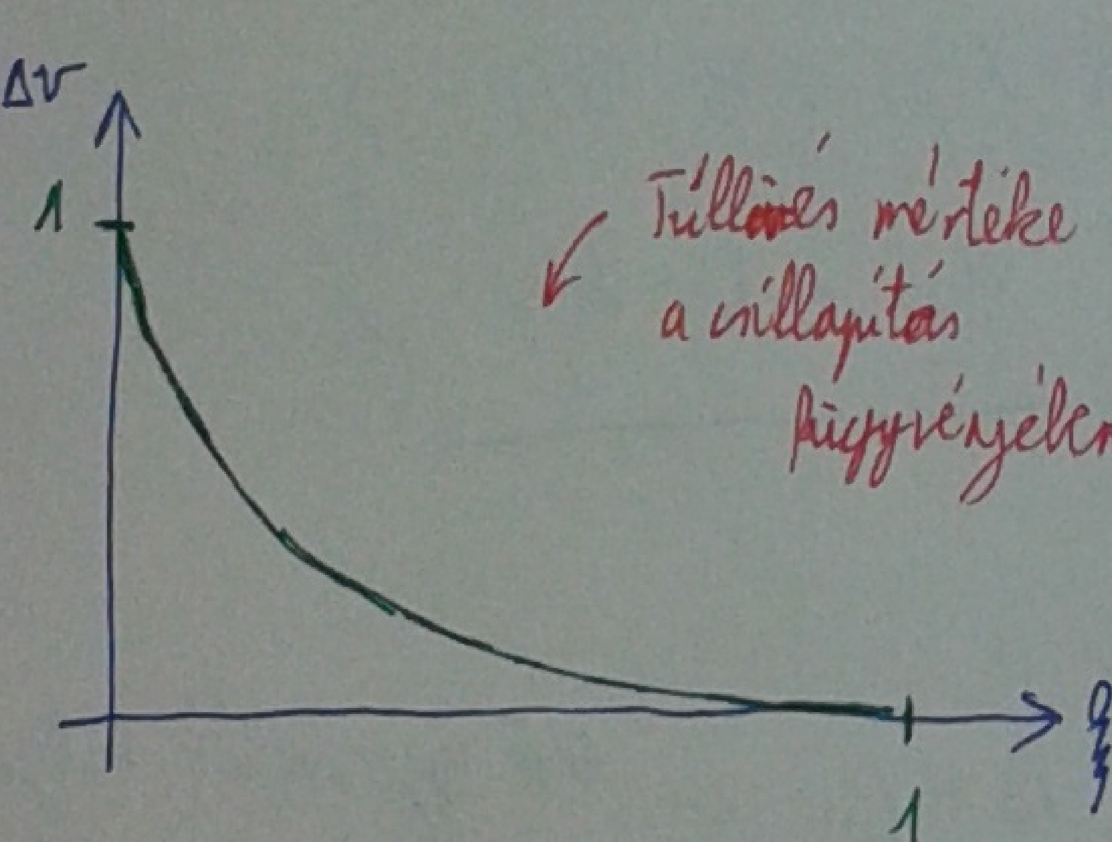
csillapítatlan sajátfrekvencia

csillapítás



A kéttárolós lengőtag rezonál, ha $0 \le \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Túllövés: Ha $\xi = 1$ akkor nincs túllövés. Van túllövés, ha $0 \le \xi < 1$



Túllövés mértéke a csillapítás függvényében!

$$\Delta v = v(T_m) - 1 = \exp\left(-\frac{\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Maximum eléréséhez szükséges idő

⑦ Túllövés: $\Delta v = v(T_m) - 1 = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$

Első maximumig terjedő idő:

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}}$$

⑧ Végérték $\alpha\%$-os sávba kerülésének ideje: $T_{\alpha\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{\alpha}\right)}{\sigma_e}$, ahol $\sigma_e = \omega_0\cdot\xi$

9 $W(s) = \dfrac{1}{1 + 2\xi T \cdot s + T^2 \cdot s^2}$ ← általános alak

Pólusok általános alakja: $s_{1,2} = -\frac{1}{T} \cdot \xi \pm j \cdot \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1-\xi^2}$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{T} \cdot \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{Behelyettesítés}} \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T = \sqrt{2} \cdot \xi \qquad \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \sqrt{1-\xi^2} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad /()^2$$

$$1 - \xi^2 = \xi^2$$

$$\Downarrow \qquad 1 = 2\xi^2 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{T = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1}$$

10 Folytonosidejű LTI rendszer állapotegyenletei:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\dot{X}} &= \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{B} \cdot u \\ y &= \underline{C} \cdot \underline{X} + D \cdot u \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{Laplace}} \left.\begin{aligned} s \cdot X(s) &= A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ Y(s) &= C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$$ ← első egyenletből kifejezem az $X(s)$-t, majd behelyettesítem a második egyenletbe!

$$W(s) = \frac{C \cdot \operatorname{adj}(sI - A)\, B + D \cdot \det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Sajátértékek az A mátrixból: $\det(sI - A) = 0$ megoldásai
Pólusok, ha a $W(s)$ nevezője zérus: $\det(sI - A) = 0$ megoldásai

} A kettő megegyezik!

(11) $W(s) = \dfrac{2}{s+10}$ $\Rightarrow$ Sajátérték = pólus = -10

$\Downarrow$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s+10} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{0{,}2}{s} + \frac{-0{,}2}{s+10} \right\} = \left(0{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-\frac{t}{10}}\right) \cdot \varepsilon(t)$$

↑ Letakarásos módszer

$\Downarrow$

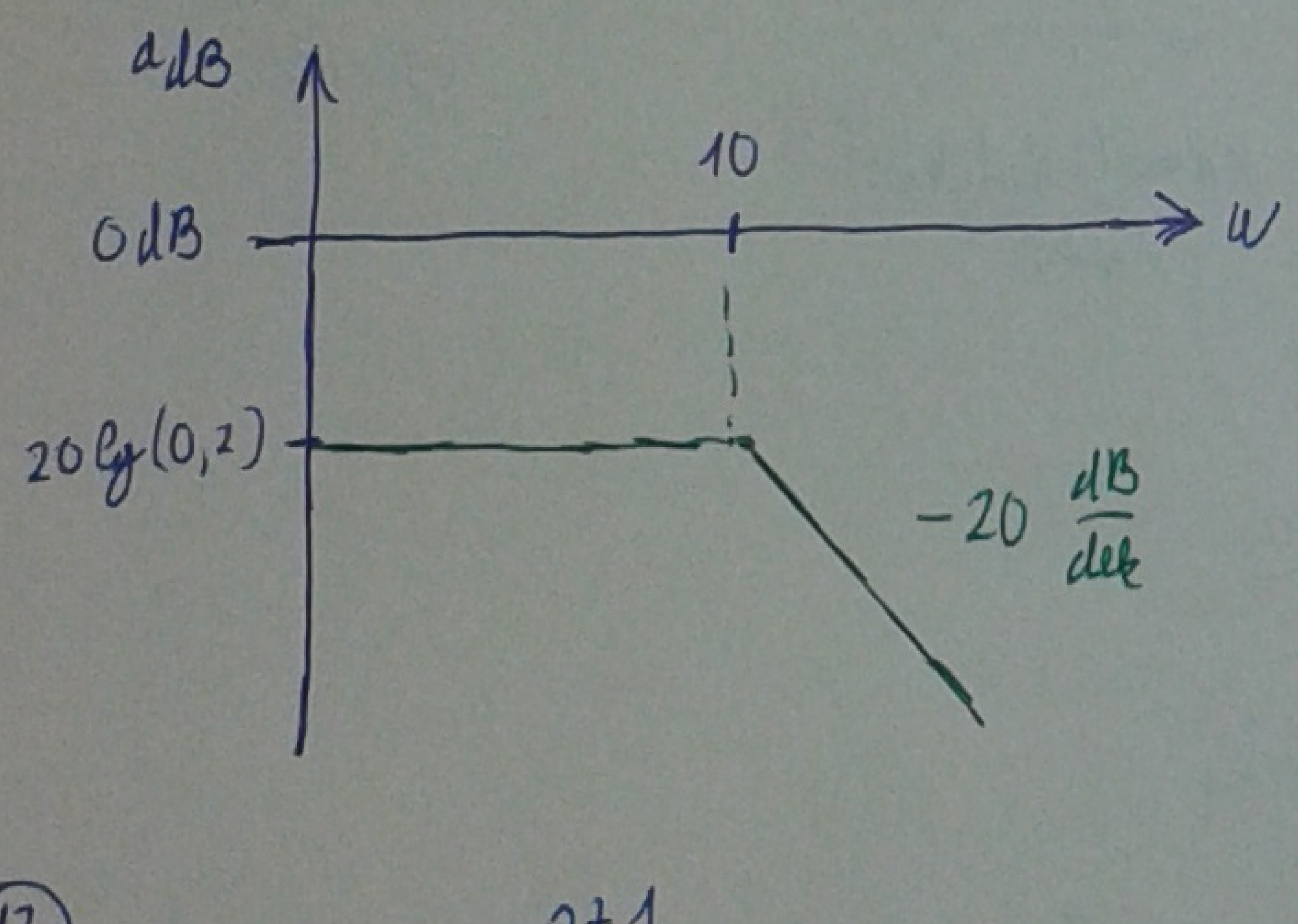
Statikus erősítés $= 0{,}2$

(Vagy úgy is számolható, hogy $W(0) = \dfrac{2}{0+10} = 0{,}2$)

A ZPK k-ja az átviteli függvény pólus-zérus felbontásában szereplő „k" konstans, ami a számláló és a nevező gyöktényezős felbontásában szereplő konstans szorzók hányadosa, azaz a számláló és a nevező legnagyobb fokszámú tagjainak a szorzóinak a hányadosa! Itt ez $= 2$!
A statikus erősítés pedig az átviteli függvény végértéke, amit $W(0)$ alapján számolhatunk!

(12) $W(s) = \dfrac{2}{s+10}$ $\Rightarrow$ $W(s) = \dfrac{0{,}2}{0{,}1s+1}$ $\Rightarrow$ $T = 0{,}1$ időállandó és $\omega = \dfrac{1}{T} = 10$ ↓ töréspont

↑ Normál alakra kell hozni



$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(0{,}1\,\omega)$

↑ Pontos fázisfüggvény

(13) $W(s) = \dfrac{s+1}{s^2 + \sqrt{2}\,s + 1}$

$\Downarrow$

Zérusai: $z_1 = -1$

Pólusok: $s_{1,2} = \left(-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}\right) \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm j\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\Longleftrightarrow$ $-\omega_0 \cdot \xi \pm j\,\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$ $= -\dfrac{1}{T} \cdot \xi \pm j\,\dfrac{1}{T} \cdot \sqrt{1-\xi^2}$

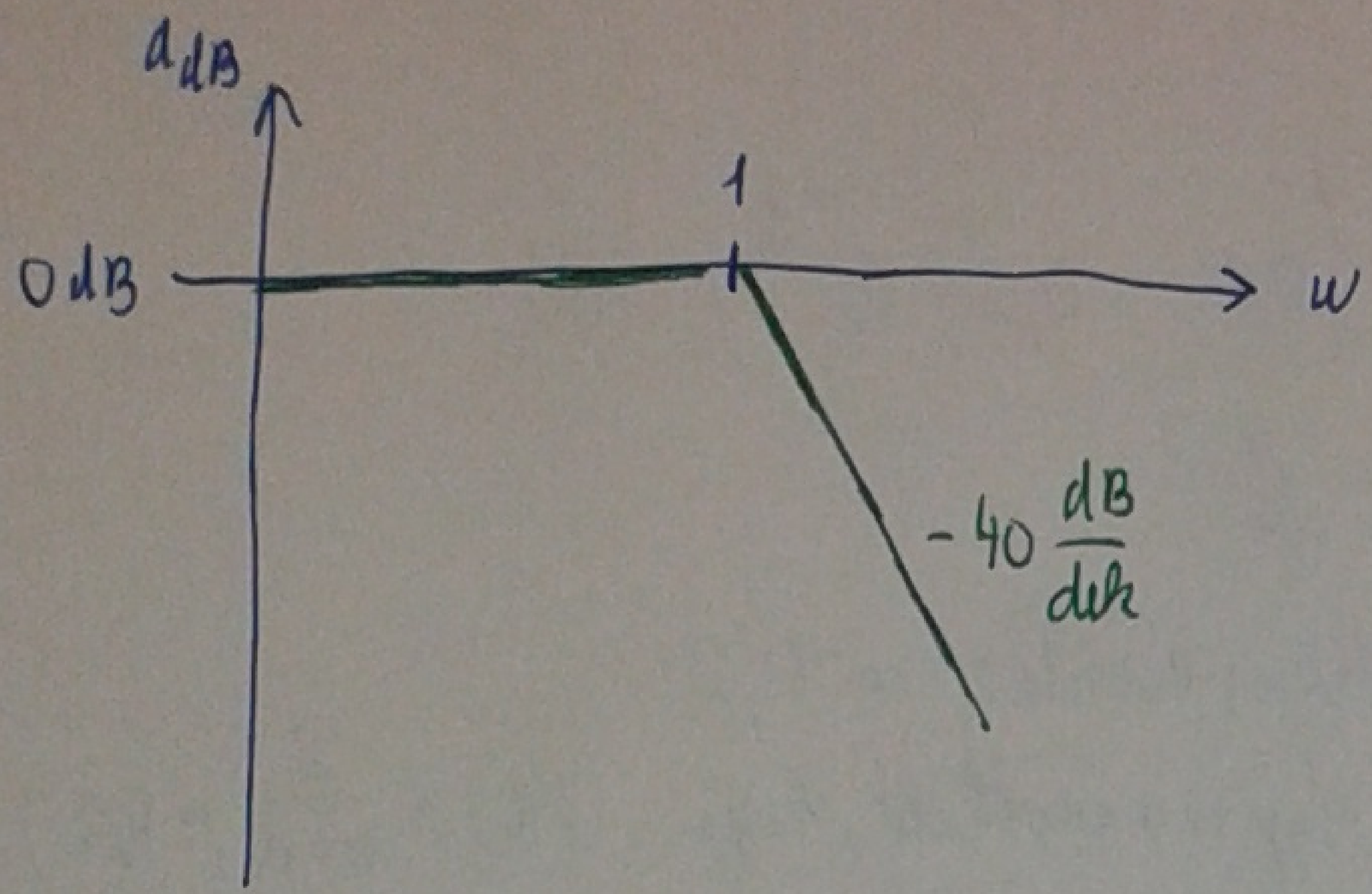
↑ Ezek egyben a sajátértékek is

Ugyanaz mint a 9-es feladat

$T = 1$ és $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(14) $W(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \equiv \frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$ $\to \omega_0 = 1$ (töréspont)

$\to \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Ha $\omega \ll \omega_0$ akkor nincs fázistolás $\Rightarrow \varphi(\omega=0) = 0^\circ$

Ha $\omega \gg \omega_0$ akkor -180°-os tolás van $\Rightarrow \varphi(\omega=\infty) = -180^\circ$

(15) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$y = x_1$

Szerencsétlen a sajátérték jele is „s"!!!

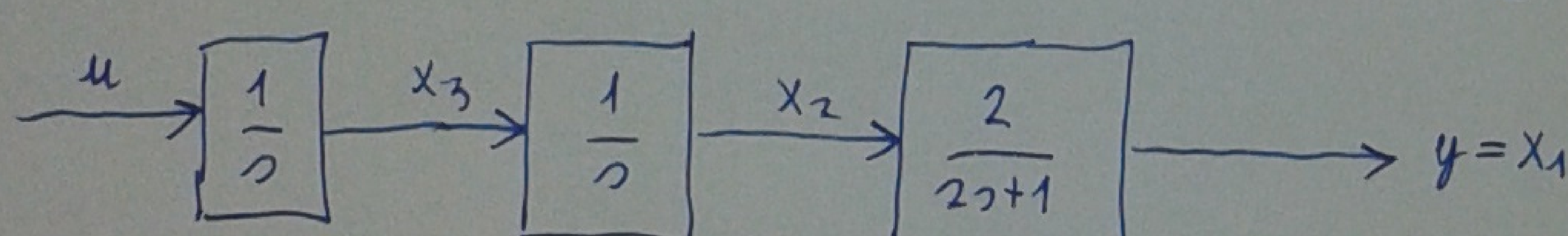
Karakterisztikus polinom: $\det(s \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ -1 & s \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (s+1)\cdot s - (-2)\cdot(-1) = 0$$

$$\underbrace{s^2+s-2}_{\text{Karakterisztikus polinom}} = 0$$ ← Karakterisztikus egyenlet

Sajátértékek $\equiv$ pólusok: $s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$ $\nearrow s_1 = 1$, $\searrow s_2 = -2$

(16)



Felírható egyenletek:

Egyszerű inverz Laplace

$U(s) \cdot \frac{1}{s} = X_3(s) \Rightarrow s \cdot X_3(s) = U(s) \Rightarrow \dot{x}_3 = u$

$X_3(s) \cdot \frac{1}{s} = X_2(s) \Rightarrow s \cdot X_2(s) = X_3(s) \Rightarrow \dot{x}_2 = x_3$

$X_2(s) \cdot \frac{2}{2s+1} = X_1(s) \Rightarrow 2 \cdot X_2(s) = 2 \cdot s \cdot X_1(s) + X_1(s)$

$s \cdot X_1(s) = X_2(s) - 0{,}5\, X_1(s) \Rightarrow \dot{x}_1 = -0{,}5 x_1 + x_2$

$y = x_1$

Tehát az állapotváltozós leírás normál alakja:

Ez szerint kifejtve a determináns

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0,5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

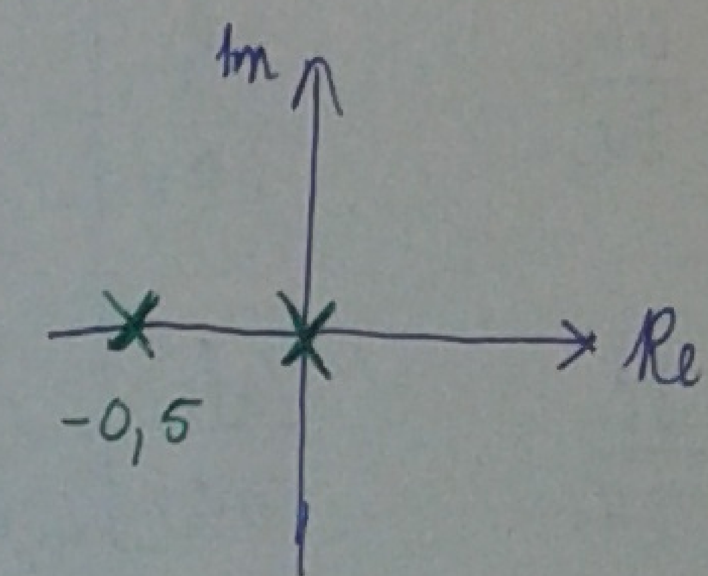
$$y = x_1$$

$$\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$$

$$(s+0,5)\cdot\left[(s\cdot s)-(1\cdot 0)\right] = 0$$

$$(s+0,5)\cdot s^2 = 0$$

sajátértékek $\Rightarrow$ $s_1 = 0$ $\quad s_2 = 0$ $\quad s_3 = -0,5$



$$W(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{2s+1} = \frac{2}{s^2\cdot(2s+1)}$$

$\rightarrow$ Pólusok: $s_{1,2} = 0$ (kétszeres pólus)

$s_3 = -0,5$

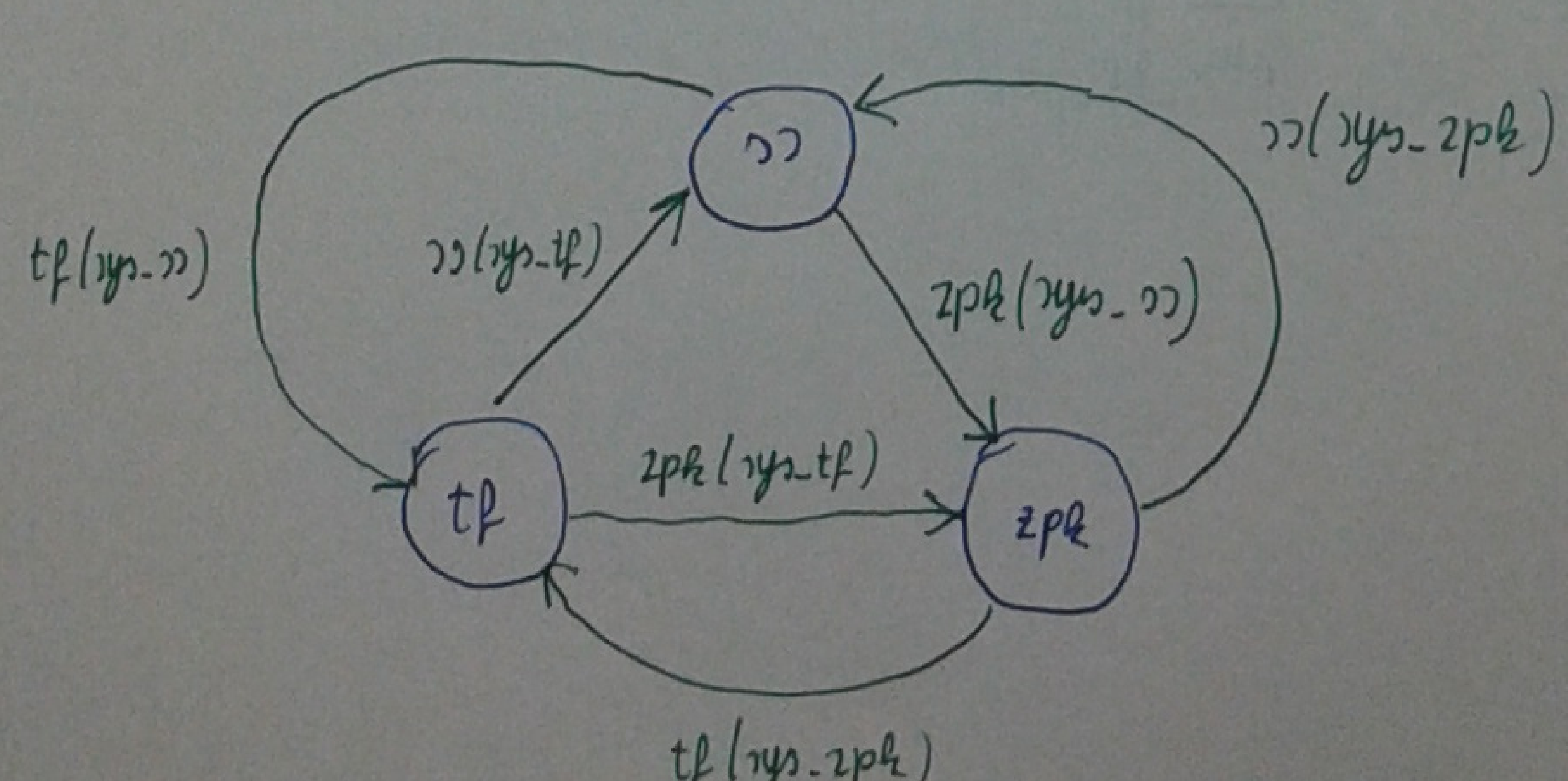
$\rightarrow$ Zérusok: Nincsenek!

17 – Állapotteres leírás: $w = ss(A, B, C, D)$ ← A, B, C, D az állapotváltozós leírás normál alakjából!

– Átviteli függvény: $w = tf(num, den)$ ← átviteli fgv számláló (num) és nevező (den) polinomja

– Pólus-zérus leírás: $w = zpk(z, p, k)$ ← z - zérusok, p - pólusok, k - konstans szorzó

Általános változóneveknek legyenek sys_ss ; sys_tf ; sys_zpk



(18) $\dot{x} = f(x,u) \qquad x \in \mathbb{R}^n \;;\; u \in \mathbb{R}^r$

$y = h(x,u) \qquad y \in \mathbb{R}^m$

Tfh: tz (x_0, u_0, y_0) a rendszer egy egyensúlyi állapota, bemenete és kimenete, azaz teljesülnek, hogy: $0 = f(x_0, u_0)$

$$y_0 = h(x_0, u_0)$$

Linearizált rendszer állapotegyenleteinek mátrixai:

$$\underline{\underline{A}} = D \cdot f_x \Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$\underline{\underline{B}} = D \cdot f_u \Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$\underline{\underline{C}} = D \cdot h_x \Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$D = D \cdot h_u \Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$