1. feladat (18 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2+2x-8}, & \text{ha } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{4\,\mathrm{ch}(x^2)}{x+3}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x = 2$, $x = -3$ pontban van, valamint az $x = 0$ pontban lehet szakadása **(3p)** .($x = -4$ esetén nincs baj, hiszen máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \lim_{x\to 2\pm} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \cdot \frac{1}{x+4} = 1 \cdot \frac{1}{6}, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \lim_{x\to -3\pm} \frac{4\,\mathrm{ch}(x^2)}{x+3} = \pm\infty, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = \frac{\sin 2}{8} \neq \frac{4}{3} = \frac{4\,\mathrm{ch}(0^2)}{0+3} = \lim_{x\to 0-} \frac{4\,\mathrm{ch}(x^2)}{x+3}, \textbf{(3p)}$$

így az $x = 0$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Írja le egy f függggvény x_0 pontbeli deriváltjának definícióját!
b) A definíció alapján számolja ki az $f(x) = \sqrt{3x+7}$ függvény deriváltját az $x_0 = 3$ pontban!

Mo. *a*) Tegyük fel, hogy x belső pontja az f függvény értelmezési tartományának, ekkor $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, amennyiben létezik véges határérték **(5p)** .

b) $f'(3) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3(3+h)+7}-4}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{16+3h}-4}{h} =$

$$\overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{16+3h-16}{(\sqrt{16+3h}+4)h} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{16+3h}+4} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{3}{8}.$$

3. feladat (10+12+10=32 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arcsin(2x-4)}{\operatorname{tg}(6-3x)}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^x$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(3x+2)}{\operatorname{ch}(4-3x)}$

Mo. *a)* $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így használható a L'Hospital-szabály **(1p)**

$$\lim_{x\to 2} \frac{\arcsin(2x-4)}{\operatorname{tg}(6-3x)} \overset{(\mathbf{6p})}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(2x-4)^2}}}{\frac{-3}{\cos^2(6-3x)}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{2}{3}.$$

b) 0^0 típusú határérték **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln \sin x}\right)^x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} e^{x \ln \sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{\lim_{x\to 0+} x \ln \sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0+} x \ln \sin x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2 \cos x}{\sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} -\lim_{x\to 0+} x \cos x \frac{x}{\sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0$$

c) A függvények definíciója szerint

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sh}(3x+2)}{\operatorname{ch}(4-3x)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x+2}-e^{-3x-2}}{e^{4-3x}+e^{3x-4}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-3x}}{e^{-3x}} \cdot \frac{e^{6x+2}-e^{-2}}{e^{4}-e^{6x-4}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{-e^{-2}}{e^4} \overset{(\mathbf{1p})}{=} -e^{-6}.$$

4. feladat (17 pont)
Határozza meg az $f(x) = 2\pi - \arccos(3-5x)$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, igazolja, hogy a függvény invertálható, majd adja meg a függvény inverzét, annak értelmezési tartományát és értékkészletét!

Mo. $D_{\text{arccos}} = [-1,1]$, így $-1 \le 3-5x \le 1 \iff -4 \le -5x \le -2 \iff \dfrac{4}{5} \ge x \ge \dfrac{2}{5}$, így $D_f = \left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$ **(3p)** . $R_{\text{arccos}} = [0,\pi]$, így $R_f = [\pi, 2\pi]$ **(2p)** .

$$f'(x) = \frac{(-5)}{\sqrt{1-(3-5x)^2}} < 0, (\mathbf{3p})$$

így a függvény szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható **(2p)** .

$$y = 2\pi - \arccos(3-5x) \Longleftrightarrow 2\pi - y = \arccos(3-5x) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cos(2\pi - y) = 3 - 5x \Longleftrightarrow \frac{3-\cos(2\pi - y)}{5} = x(\mathbf{4p}),$$

tehát $f^{-1}(x) = \dfrac{3-\cos(2\pi - x)}{5}$ **(1p)** , és $D_{f^{-1}} = R_f = [\pi, 2\pi]$ **(1p)** és $R_{f^{-1}} = D_f = \left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$ **(1p)** .

---

5. feladat (18 pont)
Melyek azok a legbővebb intervallumok, amelyeken az $f(x) = (x+1)\,\mathrm{arctg}(x-1)$ függvény konvex, illetve konkáv? Hol vannak inflexiós pontjai a függvénynek?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)** , és

$$\begin{aligned} f''(x) &\overset{(\mathbf{3p})}{=} \left(\mathrm{arctg}(x-1) + \frac{x+1}{1+(x-1)^2}\right)' = \\ &\overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1+(x-1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} = \\ &\overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2+2(x-1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{-4x+6}{\left(1+(x-1)^2\right)^2}, \end{aligned}$$

így $f''\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$, $f''(x) < 0$, ha $x > \dfrac{3}{2}$, $f''(x) >$, ha $x < \dfrac{3}{2}$ **(3p)** , vagyis a függvény a $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ intervallumon konvex, **(1p)** , az $\left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ intervallumon konkáv **(1p)** , és a $\dfrac{3}{2}$ pontban inflexiós pontja van **(1p)** .

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Az egységnyi oldalú szabályos háromszögnek levágjuk az egyik sarkát úgy, hogy a levágott rész egy $x \in (0,1)$ oldalú szabályos háromszög. Milyen x-re maximális a $T(x)/K(x)$ mennyiség, ahol $T(x)$ a megmaradt trapéz területe, $K(x)$ pedig a kerülete? (Bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy a vizsgált függvénynek maximuma van a vizsgált szakaszon.)

Mo. $T(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$ **(1p)** , $K(x) = 3-x$ **(1p)** , így

$$\left(\frac{T}{K}\right)'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{-2x(3-x)+1-x^2}{(3-x)^2} \quad (\mathbf{3p}).$$

Ez a függvény a $(0,1)$ intervallumon deriválható, tehát csak a derivált zérushelyeinél lehet szélsőértéke. A nevező pozitív, a számláló gyökei: $3 \pm \sqrt{8}$ **(2p)** . A két gyök közül a $3-\sqrt{8}$ érték esik a $(0,1)$ intervallumba **(1p)** .