ANALÍZIS(1) **II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása** **2009. nov. 26.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (7 pont)

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x^2+7)\sqrt{x^2-2x+1}}$$

Adja meg a függvény értelmezési tartományát!
Hol és milyen szakadása van a függvénynek?
(A megfelelő határértékek kiszámítása után válaszoljon!)

$$f(x) = \frac{(x-1)\ (x+5)}{\sqrt{(x-1)^2}\ \underbrace{(x^2+7)}_{>0}} = \frac{x-1}{|x-1|}\ \frac{x+5}{x^2+7}$$ 3

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{\underbrace{x-1}_{=1}}\ \frac{x+5}{x^2+7} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{\underbrace{-(x-1)}_{=-1}}\ \frac{x+5}{x^2+7} = -\frac{3}{4}$$

$x=1$-ben véges ugrása van (elsőfajú szak.) 4

2. feladat (10 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!

b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{4x+1}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 2$ pontban!

a.) $K_{x_0} \subset D_f$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \left(= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$ 3

b.) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4(2+h)+1}-\sqrt{9}}{h} =$$ 2

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}\ \frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3} = \lim_{h\to 0} \frac{9+h-9}{h(\sqrt{9+h}+3)} =$$ 2

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1}\ \frac{1}{\sqrt{9+h}+3} = \frac{1}{6}$$ 3

an1z2p091126/1.

3. feladat (16 pont)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & \text{ha } x \le 0 \\ \operatorname{ch} \frac{x^2+1}{(x+1)^2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Hol és milyen szakadása van az f függvénynek?
(A kétoldali határértékek kiszámítása után döntsön!)

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!
Ha valahol nem létezik, indokolja meg, hogy miért nem létezik!

a.) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (1)

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} e^{\overbrace{-\frac{1}{\underbrace{(x+1)^2}_{\to +0}}}^{\to -\infty}} = 0$ (2)

$x=-1$-ben megszüntethető (elsőfajú) szakadás van (1)

Szakadás lehet még: $x=0$-ban.

$f(0-0) = f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (1)

$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \operatorname{ch} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \operatorname{ch} 1 = \frac{e+\frac{1}{e}}{2}$ (1)

$f(0+0) \neq f(0-0) \Rightarrow x=0$-ban véges ugrás van (elsőfajú szak.) (1)

b.)

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}} \frac{2}{(x+1)^3}, & \text{ha } x<0 \text{ és } x \neq -1 \quad (3) \\ \operatorname{sh} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{2x(x+1)^2 - (x^2+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}, & \text{ha } x>0 \quad (4) \end{cases}$$

$f'(-1) \nexists$, mert f nem értelmezett $x=-1$-ben. (1)

$f'(0) \nexists$, mert f nem folytonos $x=0$-ban. (1)

4. feladat (20 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x\, e^{-4x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2x^2)}{\sin^2(4x)}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(3x-1)}{\operatorname{ch}(3x+2)}$

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty} 3x \cdot e^{-4x}$ ($\infty \cdot 0$) $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{e^{4x}}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ 2) $\stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{4e^{4x}}$ (2) $= 0$ (1)

b.) $\boxed{8}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arcsin 2x^2}{\sin^2 4x}$ ($\frac{0}{0}$ 1) $\stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot 4x}{2\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot 4} = \dfrac{1}{8}$ (3)

deriválások: (4)

c.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(3x-1)}{\operatorname{ch}(3x+2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x-1} - e^{-(3x-1)}}{e^{3x+2} - e^{-(3x+2)}} =$ (2)

$= \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}}}_{=1} \dfrac{e^{-1} - e^{-6x+1}}{e^{2} + e^{-6x-2}} = \dfrac{e^{-1}}{e^{2}} = e^{-3}$ (5)

5. feladat (8 pont)

$$f(x) = (1+4x^2)^{\operatorname{sh} 3x^2}$$

Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

$f(x) = e^{\ln (1+4x^2)^{\operatorname{sh} 3x^2}} = e^{\operatorname{sh} 3x^2 \ln(1+4x^2)}$ (2)

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = (1+4x^2)^{\operatorname{sh} 3x^2} \cdot \underbrace{\left(\operatorname{sh} 3x^2 \cdot \ln(1+4x^2)\right)'}_{\left(\operatorname{ch} 3x^2 \cdot 6x \cdot \ln(1+4x^2) + \operatorname{sh} 3x^2 \frac{8x}{1+4x^2}\right)}$ (3)

(3)

an1z2p091126/3.

6. feladat (22 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{(x+3)^2}$$

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = ?$, $\qquad \lim\limits_{x \to -3 \pm 0} f(x) = ?$,

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq -3$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

c) Adjon meg egy intevallumot, melyen f-nek létezik az f^{-1} inverze! (Indokoljon!)
$f^{-1}(x) = ?$, $\quad D_{f^{-1}} = ?$, $\quad R_{f^{-1}} = ?$

a.) 4

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{(x+3)^2}}_{\to 0} = \operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad 2$$

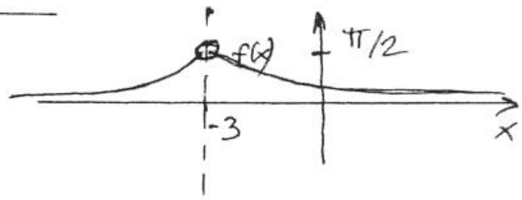
$$\lim_{x \to -3 \pm 0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x+3)^2}_{\to +0}}}_{\to +\infty} = \frac{\pi}{2} \qquad 2$$

b.) 8

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x+3}\right)^4} \cdot \frac{-2}{(x+3)^3} \; ; \quad x \neq -3 \qquad 4$$

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, \infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$
f	$\nearrow$	szak. hely	$\searrow$

4



c.) 10

$x \in (-3, \infty)$ - en $f'(x) < 0$, itt a függvény szigorúan monoton csökken $\Rightarrow \exists'$ inverze 2

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{(x+3)^2} \Rightarrow x = -3 + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} y}}$$

$\left(x \in (-\infty, -3) \text{ választásnál: } x = -3 - \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} y}} \text{ lenne} \right)$

$x \leftrightarrow y$: $\quad f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ 4

$x \in (-3, \infty)$ esetén $f(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = R_f$ 2

$$\left.\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= R_f = \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \\ R_{f^{-1}} &= D_f = (-3, \infty) \end{aligned}\right\} \; 2$$

an1z2p091126/4.

7. feladat (17 pont)

$$f(x) = e^{-2x^2+4}$$

a) $f'(x) = ?$, $f''(x) = ?$

b) Írja fel az $x_0 = \sqrt{2}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

c) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiója?

a.) $\boxed{5}$

$f'(x) = -4x\, e^{-2x^2+4}$ (2)

$f''(x) = -4\, e^{-2x^2+4} + (-4x)\, e^{-2x^2+4}\,(-4x)$ (3)

b.) $\boxed{4}$

$y_t = f(\sqrt{2}) + f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 1 + (-4\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ (2) (2)

c.) $\boxed{8}$

$f''(x) = 4\underbrace{e^{-2x^2+4}}_{>0}(4x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ (2)

	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\infty)$	
f''	+	0	−	0	+	(3)
f	$\cup$	infl. p.	$\cap$	infl. p.	$\cup$	(3)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+7x-5}\right) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 7x} = ?$

a.) $\boxed{7}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+7x-5}\right)\dfrac{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}}{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}} =$ (2)

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-(2x^2+7x-5)}{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+5}{\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2x^2+7x-5}} =$ (1)

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}\;\dfrac{-2+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{5}{x}}+\sqrt{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}} = (-1)\cdot\dfrac{-2+0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4)

$= \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -1$

b) $\boxed{4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{\sin 4x}{4x}}_{\to 1}\;\underbrace{\dfrac{1}{\cos 4x}}_{\to 1}\;\underbrace{\dfrac{7x}{\sin 7x}}_{\to 1}\;\underbrace{\dfrac{4x}{7x}}_{=\frac{4}{7}} = \dfrac{4}{7}$

an1z2p091126/5.

9. feladat (9 pont)

$$f(x) = \pi + \arcsin(x^2 - 1)$$

Határozza meg f értelmezési tartományát, értékkészletét! $f'(x) = ?$

ÉT.: $-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \quad |+1$

$\underbrace{0 \leq x^2}_{\checkmark} \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2} \quad : \quad D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 3

ÉK.: $\arcsin(x^2 - 1) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \Longrightarrow \quad R_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 2

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2-1)^2}} \cdot 2x$$ 4 $\quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$