Méréstechnika segédlet

a mesterképzés felvételi vizsgájához

Sujbert László

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

2008. április

Bevezetés

E segédlet célja a 2008 szeptemberében a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar (VIK) villamosmérnöki szakán induló mester- (MSc-) képzés felvételi vizsgájára való felkészítés segítése, méréstechnika témakörben. A felvételi témakörök részletesen az alábbi könyvben szerepelnek:

- Zoltán István, „*Méréstechnika*" egyetemi tankönyv, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997, azonosító: 55029

A felkészülést segítő további anyagok:

- Sujbert László (szerk.), „*Méréstechnika példatár villamosmérnököknek*", Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006, azonosító: 55078
- `http://www.mit.bme.hu/oktatas/targyak/vimia206/jegyzet/index.html`

A BME VIK-en folyó méréstechnika oktatásában kiemelt szerepet kap annak hangsúlyozása, hogy a mérés valójában modellezés, és a hétköznapi értelemben vett mérés csupán a modell egyes paramétereinek meghatározását jelenti. A mérés első lépése a modell struktúrájának, részletességének stb. meghatározása. A mérés során a kapott eredmények függvényében egyes esetekben a modellt is meg kell változtatni, ezért általában a mérés iteratív folyamat.

A Méréstechnika tantárgy tematikájának egy része természetesen a villamos mennyiségek mérésével, az ezek mérésére szolgáló eljárásokkal foglalkozik. Ez az anyagrész jelentős lexikális ismeretet ad át, és bizonyos mértékű átfedést mutat az elektronika témakörével. A tematika egy kisebb részében nem villamos mennyiségek mérése szerepel, ezek mérése villamosmérnökök számára is gyakori feladat. A tematika egy harmadik, hangsúlyos része méréselméleti jellegű, és a mérési eredmények, illetve eljárások kiértékelésével foglalkozik. Ezt a témakört közönségesen hibaszámításnak is szokás nevezni. Az e témakörben megismert módszerek, szempontok alkalmasak tetszőleges, a tantárgyat elvégzett hallgató, illetve villamosmérnök későbbi munkája során felvetődött mérési eljárás kiértékelésére, elemzésére. Ennek következtében a tantárgy tematikájában időrendben először ez a harmadik témakör szerepel.

A felvételi anyagában a kari tantárgyban oktatott témakörök közül az alábbiak szerepelnek:

1. Hibaszámítás
2. Feszültség és áram mérése, jelreprezentációk
3. Idő- és frekvenciamérés
4. Impedanciamérés

1. fejezet

Hibaszámítás

1.1. Elméleti alapok

Méréseinket minden esetben hiba terheli, azaz a mért mennyiség csak bizonyos eltéréssel egyezik meg a mérendő mennyiség értékével. A mérési hiba az alábbiak szerint definiálható:

a) abszolút hiba:

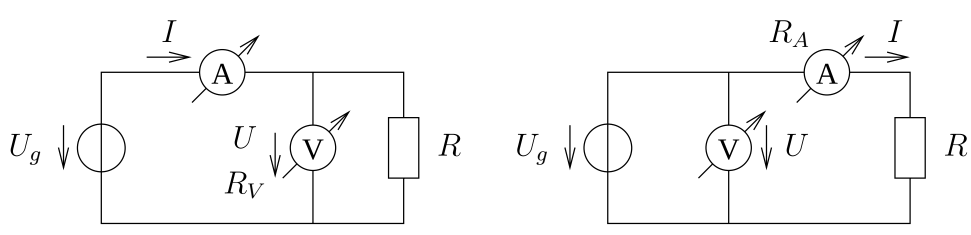
$$\Delta x = x_m - x_h$$

b) relatív hiba:

$$h = \frac{x_m - x_h}{x_h} \approx \frac{x_m - x_h}{x_m}$$

ahol x_m és x_h rendre a mért és a helyes értéke a mérendő x mennyiségnek. Az abszolút hiba mértékegysége megegyezik x mértékegységével, a relatív hiba dimenziótlan. Leggyakrabban a relatív hibát alkalmazzuk, mert önmagában is jellemzi a mérés pontosságát. Az x_h érték fiktív, elvileg nem ismert. A definíciót érintő ellentmondás többféleképpen feloldható. Egy magyarázat, hogy egy adott mérési eljárás szempontjából általában létezik pontosabb mérés, amelynek hibája elhanyagolható az adott méréséhez képest, így a mérési hiba kiszámítható. A helyes érték gyakran nem közvetlenül, hanem az egyes mérőeszközök gyártói adatain keresztül áll rendelkezésre, leggyakrabban a relatív hibára vonatkozó specifikáció formájában. A mérési hiba fogalmával és hibaszámítási eszközökkel nem csupán egy közvetlen mérés kezelhető, hanem minden olyan szituáció, amelyben egy adott mennyiség értéke csak valamilyen bizonytalansággal áll rendelkezésre. Példaként említhető egyes mennyiségek névleges értéke, amelyet nem ellenőrzünk méréssel, de a hiba (tűrés) mint adat szintén rendelkezésre áll. Nevezetes példa lehet a számítási hiba, amely az egyes részszámítások után lép fel, az eredmények óhatatlan csonkolása vagy kerekítése közben.

A továbbiak érdekében tekintsük az alábbi példát:



(a) (b)

A feladat az R ellenállás megmérése. Mindkét kapcsolás alapvetően alkalmas a feladat végrehajtására, az ellenállás a mért feszültség és áram hányadosa. Ha azonban a műszerek nem ideálisak (a voltmérő ellenállása nem végtelen, az ampermérőé nem zérus), az egyszerű hányados nem ad hibamentes eredményt. Az (a) ábrának megfelelő kapcsolásban a voltmérő, a (b) ábrának megfelelőben az ampermérő okoz mérési hibát, amelyet kezelni kell.

Amennyiben a voltmérő okoz mérési hibát, az ampermérő nemcsak az R-en, hanem a voltmérő belső ellenállásán folyó áramot is méri. Az ellenállás ezek után:

$$\hat{R} = \frac{U}{I - U/R_V} \tag{1.1}$$

Amennyiben az ampermérő okoz mérési hibát, a voltmérő nemcsak az R-en, hanem az ampermérő belső ellenállásán eső feszültséget is méri. Az ellenállás ezek után:

$$\hat{R} = \frac{U}{I} - R_A \tag{1.2}$$

Nagy ellenállások mérésére a (b), kis ellenállások mérésére az (a) kapcsolás alkalmasabb, hiszen a relatív hiba ezzel a választással kisebb. Ezek a hibák minden esetben fellépnek, akkor is, ha a műszerek egyébként pontosak, hibamentes értéket mutatnak. Ez a hiba – változatlan elrendezést és mérőeszközöket feltételezve – mindig ugyanakkora, mind nagyságra, mind előjelre, ezért *rendszeres hibának* nevezzük. A rendszeres hiba megszüntetésére két módszerrel élhetünk:

1. Korrigálhatjuk az eredeti összefüggést ($R = U/I$ helyett a fenti egyenletek), ezt a módszert éppen ezért korrekciónak nevezzük.

2. Megváltoztathatjuk a mérési elrendezést, úgy, hogy a mérőeszköz ne vagy ne ilyen mértékben okozzon hibát (pl. az (a) helyett a (b) elrendezést alkalmazzuk).

Kérdés, miért hiba ez, ha egyszer a korrekció révén kiküszöbölhető. Gyakran a mérés nem viseli el a korrekcióval járó költségeket: a korrekcióhoz szükséges adatok nehezen hozzáférhetők, a számítások elvégzése nehézkes, bonyolult, esetleg nem áll rendelkezésre megfelelő tudás. Ennek ellenére a mérési bizonytalanság szabványos kiértékelése során (GUM alkalmazása) a rendszeres hibát mindig korrigálni kell, a mérési eljárásnak része a korrekció is. A GUM nem része a felvételi tananyagnak.

A mérés pontatlanságához egy másik hibatípus is hozzájárul: ez az ún. véletlen hiba. Véletlen hiba származik a mérőeszközök bizonytalanságából, a leolvasási pontatlanságból, a mérendő mennyiségen jelenlévő véletlen hatásokból (pl. feszültségmérés esetén zaj), illetve az alkalmazott egyéb alkatrészek, mérést befolyásoló mennyiségek tűréséből. Pl. egy ellenállás tűrése, ha az egy hálózat része, pontosan úgy viselkedik, mintha mérési hiba lenne. A véletlen hibát egy pozitív értékkel adhatjuk meg, noha ennek a hibának sem az előjele, sem a pontos abszolút értéke nem ismert. Csak azt állítjuk, hogy a mérés eredményén jelenlévő véletlen hatásokból adódóan az eredményhez ésszerű módon rendelhető egy szimmetrikus intervallum, és a mérési hiba egy konkrét esetben ezen az intervallumon belül helyezkedik el. Pl. egy 100 Ω-os, 5% tűrésű ellenállás értéke $95 \dots 105$ Ω között tetszőleges lehet, másképpen a relatív hibája a $\pm 5\%$ intervallumon belül bármekkora lehet. Fontos, hogy míg rendszeres hibák esetében a hiba előjele és nagysága is adott, addig véletlen hibák esetében nem.

Az egyes egyedi mérések, illetve a mérést befolyásoló egyéb paraméterek hibái megjelennek a mérés végeredményében is. A helyes értéktől való kicsiny eltérések hatása a végeredményre az ún. *hibaterjedés.* A hibaterjedés segítségével megállapítható, hogy bármilyen természetű hiba hogyan befolyásolja a végeredményt. Sok esetben ez a módszer rendszeres hibák esetében is kezelhetőbb, mint a nehézkes korrekció. A számítás végén adott minden egyes mért (illetve bármi módon bizonytalan) érték hatása a végeredményre. A hibaszámítás utolsó lépése ezen komponensek összegzése, amely azonban a hiba természetétől és a kiértékelés céljától is függ. A hibaszámítás lépései az alábbiakban foglalhatók össze.

1. Fel kell írni a mérési eljárást jellemző

   $$y = f(x_i), \quad i = 1 \dots N \tag{1.3}$$

   függvénykapcsolatot. Ebben az x_i változók a mért értékek vagy bármi módon hibával jellemezhető paraméterek, y a végeredmény, amely változó értékének meghatározása a mérés végső célja.

2. Meg kell határozni a
$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots N \tag{1.4}$$
érzékenységeket. A módszer alapjai ugyanis az, hogy egy adott pontban az f függvényt helyettesítjük az elsőfokú Taylor-sorával, és a hiba jellegű kicsiny eltérésre ezen keresztül határozzuk meg y módosított értékét. Közönségesen a függvényt az adott pontban az érintőjével helyettesítjük.

3. a végeredmény hibája tehát:
$$\Delta y_i = c_i \Delta x_i, \quad i = 1 \dots N \tag{1.5}$$
ahol Δy_i A végeredmény hibája az i-edik változó hatására, Δx_i az egyes mért értékek hibáját jelöli.

4. A teljes hiba ezen Δy_i-k összegzéséből adódik. Az összegzésre az alábbi módszerek állnak rendelkezésre:

   a) „worst case" összegzés:
$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} |\Delta y_i| \tag{1.6}$$
   Ezt a módszert véletlen hibák esetén alkalmazhatjuk, ha a legrosszabb esetet, azaz a legnagyobb hibát kívánjuk kiszámítani. Kevés számú véletlen hibakomponens esetén ez a megoldás a gyakori.

   b) valószínűségi összegzés:
$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\Delta y_i)^2} \tag{1.7}$$
   Ezt a módszert véletlen hibák esetén alkalmazhatjuk, ha a hiba legvalószínűbb értékét kívánjuk kiszámítani. Nagy számú véletlen hibakomponens esetén, vagy precízebb hibaszámítást igénylő esetekben alkalmazzuk.

   c) előjeles összegzés:
$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i \tag{1.8}$$
   Ezt a módszert rendszeres hibák esetén alkalmazhatjuk, vagy ha bármilyen okból ismert az eltérés pontos előjele és nagysága.

   A fenti módszerek közötti választás a mérés fizikai körülményeinek, a hibaforrásoknak, továbbá a kiértékelés céljának gondos mérlegelését igényli. Ebből adódóan bizonyos gyakorlatra is szükség van, de általában véve elmondható, hogy az előjeles összegzést csak igen gondos megfontolás után alkalmazzuk. A különböző előjelű érzékenységek miatt ugyanis az előjeles összegzés eredménye az is lehet, hogy a komponensek kioltják egymást. Ez pedig a hiba becslésében súlyos hibát eredményezhet, hacsak nem egyértelmű az egyes hibák nagysága és előjele.

A fenti 3. pont gyakran kiegészül egy algebrai átalakítással, amelynek során y relatív hibáját fejezzük ki, akár x, akár $\Delta x/x$ segítségével. A lehetséges esetek tehát:

a)
$$\Delta y_i = c_i \Delta x_i, \quad i = 1 \dots N \tag{1.9}$$

b)
$$\Delta y_i = c_i x_i \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad i = 1 \dots N \tag{1.10}$$

c)
$$\frac{\Delta y_i}{y} = \frac{c_i}{f(\mathbf{x})} \Delta x_i, \quad i = 1 \dots N \tag{1.11}$$

d)

$$\frac{\Delta y_i}{y} = \frac{c_i x_i}{f(\mathbf{x})} \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad i = 1 \ldots N \tag{1.12}$$

A feladatok megoldása során érdemes paraméteresen számolni, és a legegyszerűbb alakot kifejezni. A fenti esetek közül leggyakrabban a **d)** szerinti kifejezést használjuk.

1.2. Példák

1.1. Sebességet mérünk út és idő mérésével. Az útra $x = 2000$ m $\pm$ 0.5%-ot, az időre $t = 2000$ s $\pm$ 0.1%-ot kaptunk. Legrosszabb esetben mekkora a sebességmérés hibája?

Megoldás

$$\begin{aligned} x &= 2000 \text{ m} \pm 5\% = (2000 \pm 10) \text{ m} = \hat{x} \pm \Delta x \to \hat{x} = 2000 \text{ m}, \ \Delta x = 10 \text{ m}, \\ t &= 2000 \text{ s} \pm 0.1\% = (2000 \pm 2) \text{ s} = \hat{t} \pm \Delta t \to \hat{t} = 2000 \text{ s}, \ \Delta t = 2 \text{ s}. \end{aligned}$$

A sebességmérés becslője:

$$\hat{v} = \frac{\hat{x}}{\hat{t}} = 1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A hibasáv a legkedvezőtlenebb eset feltételezésével:

$$\Delta v \cong \left| \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t \right| = \left| \frac{1}{\hat{t}} \Delta x \right| + \left| \frac{\hat{x}}{\hat{t}^2} \Delta t \right| = 6 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{1.13}$$

A mérés eredménye:

$$v = (1 \pm 6 \cdot 10^{-3}) \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0.6\%.$$

A relatív hiba (1.13) átalakításával közvetlenül számítható:

$$\frac{\Delta v}{\hat{v}} \cong \frac{\Delta x}{\hat{x}} + \frac{\Delta t}{\hat{t}} = (0.5 + 0.1)\% = 0.6\%.$$

Megjegyzés. A továbbiakban az elsőfokú közelítésre utaló $\cong$ jel helyett egyenlőségjelet írunk. Ezen kívül elhagyjuk a becslőre vonatkozó ˆ (kalap) jelzést (pl. becslő helyett egyes esetekben a névleges érték kifejezés kedvezőbb), és csak azokban az esetekben használjuk, amikor a két érték megkülönböztethetetlensége zavaró lenne.

1.2. 100 db 1 kΩ névleges értékű és 1% tűrésű (relatív véletlen hibájú) ellenállást sorosan kapcsolunk. Mekkora az így nyert 100 kΩ névleges értékű ellenállás relatív hibája, a hibakomponensek **(a)** *worst case* és **(b)** valószínűségi alapon történő összegzésével?

Megoldás
Az egyes ellenállások névleges értékei és hibái:

$$R_i = 1 \text{ k}\Omega, \quad \Delta R_i = h R_i = 10 \ \Omega,$$

ahol $h = \Delta R_i / R_i$, az egyes ellenállások relatív hibája, avagy tűrése. Az eredő ellenállás:

$$R_e = \sum_{i=1}^{100} R_i = 100 R_i = 100 \text{ k}\Omega.$$

A megoldáshoz kétféleképpen juthatunk el: az abszolút és a relatív hibakomponensek összegzésével. Fontos, hogy a példa relatív hibát kérdez, tehát az első esetben is utolsó műveletként le kell osztani az eredő ellenállással.

I. Az eredő ellenállás megváltozása az i-edik ellenállás megváltozására:

$$\Delta R_e|_i = \frac{\partial R_e}{\partial R_i}\Delta R_i = \Delta R_i.$$

Az **(a)** esetben az eredő hiba:

$$\Delta R_e = \sum_{i=1}^{100} |\Delta R_e|_i = 100\Delta R_i, \quad \frac{\Delta R_e}{R_e} = \frac{100\Delta R_i}{100 R_i} = \frac{\Delta R_i}{R_i} = h = 1\%.$$

A **(b)** esetben az eredő hiba:

$$\begin{aligned} \Delta R_e &= \sqrt{\sum_{i=1}^{100} (\Delta R_e)_i^2} = \sqrt{100\Delta R_i^2} = 10\Delta R_i, \\ \frac{\Delta R_e}{R_e} &= \frac{10\Delta R_i}{100 R_i} = 0.1\frac{\Delta R_i}{R_i} = 0.1h = 0.1\%. \end{aligned}$$

II. Az eredő ellenállás relatív megváltozása az i-edik ellenállás relatív megváltozására:

$$\left.\frac{\Delta R_e}{R_e}\right|_i = \frac{\partial R_e}{\partial R_i}\frac{R_i}{R_e}\frac{\Delta R_i}{R_i} = \frac{R_i}{R_e}h = \frac{1}{100}h.$$

Az **(a)** esetben az eredő hiba:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \sum_{i=1}^{100} \left|\frac{\Delta R_e}{R_e}\right|_i = h = 1\%.$$

A **(b)** esetben az eredő hiba:

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{\Delta R_e}{R_e}\right)_i^2} = \sqrt{100 \cdot 10^{-4} h^2} = 0.1h = 0.1\%.$$

Jól látható, hogy a két úton ugyanazokra a megoldásokra jutottunk.

1.3. Bukógátas áramlásmérésnél a folyadék egy „V" alakú nyíláson áramlik ki. A térfogatáram a következőképpen fejezhető ki:

$$Q = \frac{4}{15}\sqrt{2g}\,\frac{d}{l}\,h^{5/2},$$

ahol d a bukógát szélessége, l a teljes magassága, h pedig a folyadék magassága a gát aljától a felszínéig, g jelöli a nehézségi gyorsulást. Mekkora a mérés során elkövetett relatív hiba legvalószínűbb értéke, ha d és l mérésének relatív hibája 1%, h mérésének relatív hibája pedig 3%?

Megoldás

Írjuk át először a példában megadott bonyolult kifejezést:

$$Q = \frac{4}{15}\sqrt{2g}\frac{d}{l}h^{5/2} = c_1 \cdot d = c_2 \cdot \frac{1}{l} = c_3 \cdot h^{5/2},$$

ahol c_1, c_2, c_3 konstansnak rögzíthetők, a mellettük kiemelt szorzó vizsgálatához. Ekkor egyszerűen adódik, hogy:

$$\frac{\Delta Q_d}{Q} = \frac{\Delta d}{d}, \quad \frac{\Delta Q_l}{Q} = -\frac{\Delta l}{l}, \quad \frac{\Delta Q_h}{Q} = \frac{5}{2}\frac{\Delta h}{h}.$$

A hiba legvalószínűbb értékéhez az egyes komponenseket négyzetesen kell összegezni:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = 7.63\%.$$

1.4. Adottak az alábbi mátrixok. Legrosszabb esetben mekkora az $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1}$ mátrix elemeinek relatív bizonytalansága, ha az $\mathbf{X}$ mátrix elemeinek relatív hibája 50 ppm, és a számítási eljárás numerikus hibája elhanyagolható? Adjuk meg az inverz mátrixot is!

a)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 50 & 51 \\ 52 & 53 \end{bmatrix};$$

b)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 44 & 45 \\ -67 & 68 \end{bmatrix}.$$

Megoldás

Jelöljük az $\mathbf{X}$ mátrix elemeit a következőképpen:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Ekkor az inverz mátrix:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{X}} \begin{bmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}.$$

A deriválásokat elvégezve, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} h_{1,4} &= \frac{h}{|\det \mathbf{X}|} \left(|x_1 x_4| + 3|x_2 x_3| \right), \\ h_{2,3} &= \frac{h}{|\det \mathbf{X}|} \left(|x_2 x_3| + 3|x_1 x_4| \right), \end{aligned}$$

ahol:

$$\begin{aligned} h_{1,4} &= \frac{\Delta y_1}{y_1} = \frac{\Delta y_4}{y_4}, \\ h_{2,3} &= \frac{\Delta y_2}{y_2} = \frac{\Delta y_3}{y_3}, \\ h &= \frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{\Delta x_3}{x_3} = \frac{\Delta x_4}{x_4}. \end{aligned}$$

a)

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -26.5 & 25.5 \\ 26 & -25 \end{bmatrix}, \quad h_{1,4} = 26.52\%, \quad h_{2,3} = 26.51\%;$$

b)

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 11.32 & -7.491 \\ 11.15 & 7.325 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad h_{1,4} = 100.2 \text{ ppm}, \quad h_{2,3} = 99.98 \text{ ppm}.$$

A **a)** feladatban adott mátrix közel szinguláris, ezért adódott igen nagy hiba az inverz mátrix elemeire. A **b)** feladatban adott mátrix inverzének pontossága nagyságrendileg megegyezik az eredeti mátrix pontosságával.

1.5. Egy mechanikai rendszerben szeretnénk kis távolságokat mérni. Ehhez a mérendő alkatrészeken fémlemezeket helyezünk el. Az így nyert síkkondenzátort egy RC oszcillátor kondenzátoraként használjuk, és az oszcillátor jelének frekvenciájából számítható a kérdéses d távolság. Az összefüggések és az értékek: $C = \varepsilon A/d$, $f = 1/(2\pi RC)$; $\varepsilon = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $A = 50$ cm^2, $R = 10$ kΩ. Mérési hibát okoz a frekvenciamérés és az ellenállás értékének bizonytalansága (mindkettő relatív hibája 1%), a többi hibát elhanyagoljuk.

a) Adjuk meg a távolságmérés relatív hibáját, a hibakomponensek *worst case* alapú összegzésével!

b) A berendezés tesztelésekor kiderül, hogy nem hanyagolható el a kondenzátor hozzávezetéseinek kapacitása, amely a mérendő kondenzátorral párhuzamosan kapcsolódik. Mekkora a mérés hibája, ha a hozzávezetések kapacitása $C_p = 45$ pF, és a mérendő távolság névleges értéke $d = 1$ mm?

Megoldás

A példában megadott képletek felhasználásával:

$$d = 2\pi R f \varepsilon A. \tag{1.14}$$

a) Ebből a hiba deriválás, rendezés után és worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta R}{R} = 2\%.$$

b) A párhuzamosan kapcsolódó C_p kapacitás hozzáadódik a méréshez felhasznált kondenzátoréhoz. Ez a kapacitás rendszeres hibát okoz, de mivel értéke ismert, korrigálni lehet vele. Így a (1.14) képlet a következőképpen módosul:

$$d = \frac{2\pi R f \varepsilon A}{1 - C_p 2\pi R f}. \tag{1.15}$$

Mivel a függvény megváltozott, a frekvenciamérés hibájának, illetve az ellenállás bizonytalanságának hatását újra kell számolni. Tekintsük először a frekvenciamérés hibájának hatását! Deriválás és rendezés után:

$$\frac{\Delta d_f}{d} = \frac{1}{1 - C_p 2\pi R f} \frac{\Delta f}{f}.$$

A fenti kifejezés alkalmas arra, hogy a hiba számszerű értékét kiszámítsuk. Egy ilyen vagy ehhez hasonló kifejezés alapján azonban egy mérési eljárás érzékenysége is értékelhető az egyes mért mennyiségek, illetve a mérésben szereplő egyéb paraméterek bizonytalansága szempontjából. Nem szerencsés, ha ezekben a kifejezésekben egy olyan, a mérendő mennyiségtől függő változó szerepel, amely sem mint mérési eredmény, sem mint mérendő mennyiség nem jelenik meg. Jelen esetben a frekvencia egy ilyen közbülső mennyiség. Fejezzük ki ezért f-et a (1.15) egyenletből, amivel a hiba kifejezése:

$$\frac{\Delta d_f}{d} = \frac{\varepsilon A + C_p d}{\varepsilon A} \frac{\Delta f}{f} = \frac{C + C_p}{C} \frac{\Delta f}{f},$$

ahol C jelöli a d mérésekor előálló kapacitást. Figyeljük meg, hogy kis C (nagy d) esetén a hiba nagyon nagy. Mivel R a (1.15) kifejezésben f-fel megegyező helyzetben van, ezért $\Delta R/R$ is ugyanazzal a kifejezéssel szorzandó, így a teljes hiba worst case összegzéssel:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\varepsilon A + C_p d}{\varepsilon A} \left[\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta R}{R} \right] = 4.03\%.$$

2. fejezet

Feszültség és áram mérése, jelreprezentációk

2.1. Elméleti alapok

Feszültség és áram mérésére analóg vagy digitális műszereket használhatunk. Bár a digitális műszerek (leggyakrabban multiméterek) dominálnak a mai gyakorlatban, ez idő szerint még érdemes az analóg műszerek néhány tulajdonságával megismerkedni.

Az analóg műszerek, ezen belül is az egyenfeszültség vagy egyenáram mérésére szolgáló műszerek leggyakrabban lengőtekercses, állandómágneses (ún. Deprez-) műszerek. A teljes műszer tartalmazza az ún. alapműszert, valamint a méréshatár kiterjesztésére szolgáló ellenálláshálózatot. A műszer fontos jellemzője a bemeneti ellenállás, amely ideális műszer esetén nem terheli a mérendő hálózatot. Ennek megfelelően az ideális voltmérő szakadás ($R_{\mathrm{be}} = \infty$), az ideális ampermérő rövidzár ($R_{\mathrm{be}} = 0$).

Feszültségmérés esetén a méréshatár K-szorosára történő kiterjesztéséhez szükséges előtétellenállás és a műszer bemeneti ellenállása:

$$R_e = (K-1)R_m, \quad R_{\mathrm{be}} = KR_m \tag{2.1}$$

Árammérés esetén a méréshatár K-szorosára történő kiterjesztéséhez szükséges söntellenállás és a műszer bemeneti ellenállása:

$$R_s = \frac{R_m}{K-1}, \quad R_{\mathrm{be}} = \frac{R_m}{K} \tag{2.2}$$

Váltakozó feszültség és áram mérésére egyenirányítóval kiegészített Deprez-műszert vagy egyéb analóg műszert (lágyvasas, elektrodinamikus stb.) használnak.

Az analóg műszerek véletlen hibáinak jellemzésére szolgál az osztálypontosság, amely a műszer abszolút hibája és a végérték hányadosa:

$$\mathrm{op} = \frac{\Delta x}{x_{\max}} \tag{2.3}$$

ahol x feszültség és áram is lehet. Az osztálypontosságot % egységben adják meg, azaz ha op = 1, akkor a műszer végértékre vonatkoztatott relatív véletlen hibája 1%. Adott x mellett a mérés relatív hibája:

$$h = \frac{x_{\max}}{x}\mathrm{op} \tag{2.4}$$

Ebből is látszik, hogy érdemes mindig olyan méréshatárban mérni, amely nem haladja meg túlságosan a mért értéket.

A digitális műszerek analóg-digitál átalakítás és további jelfeldolgozás után adják meg a mért áram vagy feszültség értékét. A bemeneti impedancia feszültségmérés esetén igen nagy, $R_{\mathrm{be}} = 1 \ldots 10\ \mathrm{M\Omega}$, és ez általában független a méréshatártól. Árammérés üzemmódban a bemeneti impedancia nem közelíti jobban az ideálist, mint az analóg műszerek esetében. A digitális műszerek relatív véletlen hibája több összetevőből áll:

$$h = h_1 + h_2\frac{x_{\max}}{x} + \frac{1}{N} \tag{2.5}$$

ahol:

- h_1 „of value”, a mért értékre vonatkozó hiba
- h_2 „of range”, a végértékre vonatkozó hiba
- $1/N$ a kvantálási hiba: A műszer felbontása az utolsó számjegy, annak helyi értékével. Az ebből eredő relatív hiba a műszer által kijelzett, tizedespont nélküli szám reciproka. Pl. 12.56 V esetén a kvantálási hiba $1/1256 \cong 0.08\%$.

Az áram és feszültség mérésére szolgáló műszerek AC üzemmódban fizikailag a jelek abszolút középértékét, csúcsértékét vagy effektív értékét mérik, a kijelzés mindig szinuszos effektív értékre történik. Ezt a témakört részletesen tárgyalja a tankönyv.

AC jelen a gyakorlatban periodikus jelet, illetve ergodikus zajt, leggyakrabban Gauss-eloszlású zajt értünk. A periodikus jelek Fourier-sorukkal reprezentálhatók. A Fourier-felbontás azért is célszerű, mert a jel egyes jellemzőit tagonként lehet számítani, majd az ortogonalitás miatt egyszerű módszerrel a teljes jelre vonatkozóan összegezni.

Jellegzetes feladat a periodikus jel effektív értékének meghatározása. Amennyiben a jel szinuszos komponenseinek amplitúdóját ismerjük, egy-egy komponens effektív értéke az amplitúdó $\sqrt{2}$-ed része, és a teljes jel effektív értéke:

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} U_{i,\mathrm{eff}}^2} \tag{2.6}$$

ahol K a komponensek száma. Amennyiben egy frekvenciához több komponens is tartozik, azokat először trigonometrikus azonosságokkal össze kell vonni.

Nagyságrendileg különböző mennyiségek között a dB-skálát alkalmazzuk. A dB-skála általában relatív, és egy referenciamennyiséghez képest adja meg egy mennyiség értékét. Amennyiben szintek közötti arányt kell reprezentálni, a definíció a következő:

$$W[\mathrm{dB}] = 20 \lg \frac{x}{x_{\mathrm{ref}}} \tag{2.7}$$

Szint lehet feszültség, áram, (feszültség- vagy áram-) erősítés, átviteli függvény abszolút értéke stb. Amennyiben teljesítmények közötti arányt kell reprezentálni, a definíció eltérő:

$$W[\mathrm{dB}] = 10 \lg \frac{P}{P_{\mathrm{ref}}} \tag{2.8}$$

Zajos jelek esetén fontos a jel-zaj viszony értéke, amelynek definíciója:

$$\mathrm{SNR}[\mathrm{dB}] = 10 \lg \frac{P_{\mathrm{jel}}}{P_{\mathrm{zaj}}} \tag{2.9}$$

(Az SNR rövidítés az angol signal to noise ratio elnevezés rövidítése.) Zajon általában sávkorlátozott fehér zajt értünk, amelynek spektruma a B sávkorlátig konstans, felette zérus. A zaj teljesítménye a frekvenciatartományban a görbe alatti terület, és ez megegyezik a varianciájával, azaz szórásnégyzetével:

$$P_{\mathrm{zaj}} = \sigma^2 \tag{2.10}$$

A zaj effektív értéke pedig:

$$U_{\mathrm{eff}} = \sigma \tag{2.11}$$

A zaj mérési eredményt befolyásoló hatását tehát csökkenthetjük, ha a zajos jelet úgy szűrjük, hogy a hasznos jelet változatlanul hagyjuk, a szélessávú zaj nagy részét pedig kiszűrjük. A zaj teljesítményét a szűrés a következőképpen csökkenti:

$$P'_{\mathrm{zaj}} = P_{\mathrm{zaj}} \frac{B_p}{B} \tag{2.12}$$

ahol B_p a szűrő, B a zaj sávszélessége. Fontos, hogy ez az összefüggés csak akkor teljesül, ha a szűrő teljes áteresztősávjában van zajteljesítmény. Ha pl. a zaj alapsávi, és a szűrő aluláteresztő, az összefüggés érvényességének feltétele, hogy $B_p < B$.

2.2. Példák

2.1. Egy szinuszgenerátor kimenő jelének torzítási tényezője 1%. Mekkora a felharmonikusok és a teljes jel teljesítményének aránya?

Megoldás
A torzítási tényező definíciója:

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} U_i^2}{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^2}} = \sqrt{\frac{P_f}{P_t}},$$

ahol P_f és P_t rendre a felharmonikusok és a teljes jel teljesítményét jelölik. Ebből a kérdéses arány:

$$\frac{P_f}{P_t} = k^2 = 10^{-4}.$$

2.2. Zajos szinuszos jelet mérünk. Mekkora a szinuszjel effektív értéke, ha a mért effektív érték $U_m = 6.1$ V, a jel-zaj viszony pedig SNR = 14.7 dB?

Megoldás
A jel-zaj viszony definíciója:

$$\mathrm{SNR} = 10 \lg \frac{P_{\mathrm{jel}}}{P_{\mathrm{zaj}}}.$$

Ennek alapján a jel és a zaj teljesítményének aránya:

$$a = \frac{U_x^2}{U_n^2} = 10^{\mathrm{SNR}/10} \cong 29.51.$$

Mivel a mért jel effektív értéke az effektívérték-négyzetek összege:

$$U_m^2 = U_x^2 + U_n^2,$$

ezért a fentiek alapján U_x kifejezhető:

$$U_x = \sqrt{\frac{U_m^2}{1 + 1/a}} = 6 \text{ V}.$$

2.3. Mekkora a várható értéke, effektív értéke és frekvenciája az alábbi jeleknek:

a) $x(t) = A^2 \sin^2(2\pi f_0 t)$;

b) $x(t) = \sin^2(3\pi f_0 t)$;

c) $x(t) = 12 \sin(2\pi f_0 t) + 12 \sin(6\pi f_0 t)$;

d) $x(t) = 12|\cos(2\pi f_0 t)|$;

e) $z(t) = \sqrt{2} e^{j 2\pi f_0 t}$?

Megoldás
A várható érték a jel középértéke, a DC-komponens. Az effektív érték a különböző frekvenciájú komponensek effektív értékeiből számítható, négyzetes összegzéssel. A DC-komponens speciálisan zérus frekvenciájú komponens, melynek effektív értéke önmaga. A jel frekvenciája a legalacsonyabb frekvenciájú komponens frekvenciájával egyezik meg.

a)

$$x(t) = A^2 \sin^2(2\pi f_0 t) = A^2/2(1 - \cos(4\pi f_0 t)).$$

Tehát:

$$x_0 = A^2/2, \quad x_{\text{eff}} = \sqrt{A^4/4 + A^4/8} = \sqrt{3/8}\,A^2, \quad f_x = 2f_0.$$

b) Az a) feladat alapján:

$$x_0 = 0.5, \quad x_{\text{eff}} = \sqrt{3/8}, \quad f_x = 3f_0.$$

(Az eredeti szinuszjel frekvenciája $1.5f_0$ volt.)

c)

$$x_0 = 0, \quad x_{\text{eff}} = \sqrt{12^2/2 + 12^2/2} = 12, \quad f_x = f_0.$$

d) Mivel valós jelekre $|x(t)|^2 = x^2(t)$, ezért az effektív érték számításánál az abszolútérték-képzés figyelmen kívül hagyható. A középérték a szinuszjel abszolút középértéke. Mivel a félperiódusok abszolút értéke megyezik, $x(t)$ periódusideje az eredetinek a fele.

$$x_0 = x_{\text{abs}} = \frac{2}{\pi}12 = 7.6394, \quad x_{\text{eff}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8.485, \quad f_x = 2f_0.$$

e)

$$x_0 = 0, \quad x_{\text{eff}} = \sqrt{2} = 1.414, \quad f_x = f_0,$$

ugyanis $|z(t)| = \sqrt{2}$, és az effektív érték számításához szükség van abszolútérték-képzésre is.

2.4. Egy Deprez-műszer végkitérése $I = 50\ \mu$A, ekkor a kapcsain $U = 100$ mV feszültség van. Mekkora előtét-ellenállást alkalmazzunk, hogy a méréshatárt $U_m = 10$ V-ra terjeszthessük ki?

Megoldás

Az alapműszer ellenállása:

$$R_b = \frac{U}{I} = 2\ \text{k}\Omega.$$

A szükséges előtét-ellenállás:

$$R_e = \frac{U_m - U}{U} R_b = 198\ \text{k}\Omega.$$

2.5. $U = 160$ V névleges értékű feszültséget szeretnénk megmérni, de csak maximum 100 V-os méréshatárú műszerünk van. A feladatot két egyforma Deprez-műszer sorba kapcsolásával oldhatjuk meg. Mekkora lesz a mérés hibája a legkedvezőtlenebb esetben, ha a műszerek osztálypontossága 1?

Megoldás

$$U_1 = U_2 = \frac{U_x}{2} = 80\ \text{V}, \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{\Delta U_2}{U_2} = \text{op}\frac{100\ \text{V}}{80\ \text{V}} = 1.25\%.$$

A mérés hibája a legkedvezőtlenebb esetben:

$$\frac{\Delta U_x}{U_x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta U_1}{U_1} + \frac{1}{2}\frac{\Delta U_2}{U_2} = 1.25\%.$$

2.6. Egy digitális feszültségmérő 2 V-os méréshatárban 0.0245 V-ot mutat. Mekkorának feltételezhetjük a mérés hibáját, ha nem áll rendelkezésünkre a műszer gépkönyve?

Megoldás

A hiba forrása a mérési eredmény kvantált kijelzése, és egyedül a kvantálási hibát tudjuk számítani. Feltesszük, hogy a műszer kijelzésének megfelel a mérőáramkörök pontossága is.

$$h \approx h_q = \frac{1}{245} \approx 0.4\%.$$

3. fejezet

Idő- és frekvenciamérés

3.1. Elméleti alapok

Az idő- és frekvenciamérés a tantárgy rövid, de fontos fejezete. Bár az idő nem villamos mennyiség, mérésére a villamosmérnöki gyakorlatban igen sokszor van szükség. Napjainkban mérésre szinte kizárólag digitális, ún. számlálós frekvenciamérő, illetve időmérő eljárást alkalmaznak. A mérés pontosságát alapvetően meghatározza az alkalmazott órajel pontossága, az órajelet egy kvarcoszcillátor szolgáltatja. A mérési hiba másik jelentős komponense a kvantálási hiba, amely abból származik, hogy nem egész számú periódust kellene számlálni az órajelből, a számláló mégis egész számot tartalmaz. A hiba csökkenthető, ha a számlálás során törekszünk minél nagyobb számú órajel-periódus számlálására.

Az alapstruktúrák a tankönyv frekvenciamérésre, illetve periódusidő-mérésre bemutatott blokkvázlatai. A mai műszerekben leggyakrabban időt mérnek, és az aritmetikai egység végzi el a reciprokképzést, így határozza meg a frekvenciát. A periódusidő-mérés pontosságát átlagperiódusidő-méréssel lehet javítani. Ha ezen felül a konstans mérési idő is cél, ún. állandó kapuidejű mérést kell alkalmazni. Az időintervallum-mérés a fázismérés alapja, az ezzel kapcsolatos megfontolások hasonlóak az időmérésnél megismertekhez.

3.2. Példák

3.1. Egy szinuszgenerátor zajmentesnek tekinthető jelének frekvenciáját mérjük számlálós periódusidő-mérővel. A névleges frekvencia $f_x = 100$ kHz, a mérőműszer órajelének frekvenciája $f_0 = 10$ MHz.

a) Mekkora relatív hibával mérhető meg a periódusidő egyetlen periódus mérésével?

b) A mérési hibát átlagperiódusidő-méréssel csökkenthetjük. Hány periódust kell mérnünk, hogy a relatív mérési hiba 10^{-4}-re csökkenjen?

c) Ha ennél is kisebb hibával szeretnénk mérni, a jel már nem tekinthető zajmentesnek, ilyenkor a mérési eredményeket átlagolni kell. Hány eredményt kell átlagolni ahhoz, hogy a hiba 10^{-5}-re csökkenjen?

d) Hány mérési eredményt kellene átlagolnunk 10^{-4}-es hibához, ha az egyetlen periódus méréséből származó eredményeket átlagolnánk?

Megoldás

a) Egy periódus mérése esetén a hiba:

$$h_1 = \frac{1}{N} = \frac{f}{f_0} = 1\%.$$

b) Átlagperiódusidő-mérés során a hiba n-ed részére csökken, azaz:

$$h_2 = \frac{h_1}{n},$$

ahol n a mért periódusok száma. Mivel a példában h_2 adott,

$$n = \frac{h_1}{h_2} = 100.$$

c) A hiba további csökkentése statisztikai átlagolással lehetséges, ebben az esetben:

$$h_3 = \frac{h_2}{\sqrt{k}},$$

ahol k az átlagolások száma. Mivel a példában h_3 volt adott,

$$k = \frac{h_2^2}{h_3^2} = 100.$$

d) Az előző képlet alkalmazható itt is, ebben az esetben a kiindulási hiba h_1, az eredmény h_2, így:

$$m = \frac{h_1^2}{h_2^2} = 10000.$$

3.2. 1320 Hz névleges frekvenciájú periodikus jel frekvenciáját mérjük, számlálós periódusidő-mérővel. A beállított mérési idő 1 sec, ez azt jelenti, hogy mérendő jelből mindig annyi (egész számú) periódust mér meg, amennyi a kijelölt mérési időbe belefér. (Ez az időtartam a tényleges mérési idő.) Mekkora a mérés relatív hibája, ha a műszer órajele 10 MHz frekvenciájú, és ennek hibáját elhanyagoljuk?

Megoldás

A megoldás során kihasználjuk, hogy a tényleges mérési idő és a műszeren beállított mérési idő jó közelítéssel megegyezik. Így a hiba:

$$h = \frac{1}{f_0 t_m} = 10^{-7}.$$

3.3. Egy programozható számlálós frekvencia/periódusidő/átlagperiódusidő-mérő órajele $f_0 = 10^7$ Hz, relatív véletlen hibája 10^{-6}. Egy $f_x = 500$ kHz névleges frekvenciájú zajmentes szinuszjel frekvenciáját szeretnénk pontosan megmérni.

a) Milyen funkciót válasszunk a műszeren, hogy adott mérési idő alatt maximális mérési pontosságot érjünk el?

b) Mekkora a választott funkció mellett a mérés relatív véletlen hibája (a hibakomponensek worst case összegzésével), ha a mérésre 200 μs áll rendelkezésre?

c) Mekkora lenne a hiba, ha a mérésre 20 ms lenne fordítható? Milyen modellezési problémát vet fel ez az eredmény?

Megoldás

a) A háromféle mérési mód csak a kvantálási hibában különbözik egymástól, így csak azt számítjuk ki. Frekvenciamérés esetén a mérési idő, illetve a számláló állása:

$$t_m = \frac{n_f}{f_0}, \quad N_f = \frac{f_x}{f_0} n_f,$$

ahol f_0 az órajel, f_x a mérendő frekvencia, n_f az órajel leosztása. A számláló állása a mérési idővel:

$$N_f = f_x t_m.$$

Periódusidő, átlag-periódusidő mérése esetén a mérési idő, illetve a számláló állása:

$$t_m = \frac{n_t}{f_x}, \quad N_t = \frac{f_0}{f_x} n_t,$$

ahol f_0 az órajel, f_x a mérendő frekvencia, n_t a mérendő jel leosztása. A számláló állása a mérési idővel:

$$N_t = f_0 t_m.$$

Az az üzemmód pontosabb, amelyben adott mérési idő alatt több impulzus számlálására kerül sor. Mivel $f_0 > f_x$, célszerű periódusidő-mérést választani.

b) A hiba, az órajel hibáját is figyelembe véve:

$$h_1 = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_0 t_m} = 5.01 \cdot 10^{-4}.$$

c)

$$h_2 = \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{N} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{f_0 t'_m} = 6 \cdot 10^{-6}.$$

A mérési hiba a második esetben nagyon kicsiny. Ekkor már nem reális feltevés, hogy a jel zajmentesnek tekinthető. További probléma, hogy a mérési intervallumba a jel 10000 periódusa esik, így elképzelhető, hogy közben frekvenciája is megváltozik a hibának megfelelő nagyságrendben, tehát a jel frekvenciáját konstansnak feltételező eljárás hamis eredményt ad. Röviden azt mondhatjuk, hogy a mérendő jel frekvenciastabilitása nagy valószínűséggel nem olyan jó, mint amilyen pontos a mérés.

3.4. Egy kétbemenetű (A és B) számláló jelek frekvenciájának, periódusidejének mérésére alkalmas. Mindkét bemenetet használva időintervallumot is mérhetünk. A műszer mindenképpen periódusidőt mér, és a belső aritmetikai egység számítja ki a mért periódusidőből a frekvenciát. Ezekhez a funkciókhoz a jelet az A bemenetre kell kapcsolni. A műszer órajele $f_0 = 50$ MHz, véletlen hibája $h = 3 \cdot 10^{-5}$. A műszerrel egy $f_x = 1.2$ kHz névleges frekvenciájú tiszta szinuszos jelet mérünk. Ez a mérendő jel egy lineáris rendszer bemenetére is kapcsolódik. A rendszer kimenetén megjelenő jel $\varphi = 8°$ fázistolást szenved, amelyet szeretnénk pontosan megmérni. Ennek érdekében a kimeneti jelet műszerünk B bemenetére kapcsoljuk, és időintervallumot mérünk. A frekvencia és a mért időintervallum segítségével számítással határozzuk meg a fázistolás értékét. A mérési idő mindkét esetben fix érték, $t_m = 0.1$ s.

a) Mekkora a frekvenciamérés relatív hibája?

b) Mekkora a fázismérés abszolút hibája, ha az időintervallum mérését az A bemenetre kapcsolt jel felfutó éle indítja, és a B bemenetre kapcsolt jel felfutó éle állítja meg? A teljes mérési idő alatt a műszer a keresett intervallumot többször is megméri (hiszen a triggerfeltétel minden periódusban egyszer teljesül), és ezeket az eredményeket az aritmetikai egység átlagolja.

c) Növekszik-e a fázismérés pontossága, ha az időintervallum mérését az A bemenetre kapcsolt jel lefutó éle indítja?

Megoldás

a) A frekvenciamérés hibája megegyezik a periódusidő-mérés hibájával (mivel $f = 1/T$):

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} \cong \frac{\Delta f_0}{f_0} + \frac{1}{t_m f_0} = 3.02 \cdot 10^{-5}.$$

b) A fázismérés hibájának kifejezéséhez írjuk fel először a fázis kiszámítására szolgáló összefüggést:

$$\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T_x} = 2\pi\tau f_x. \tag{3.1}$$

Ebből a fázismérés hibája:

$$\Delta\varphi = \varphi\left[\frac{\Delta(f_x)'}{f_x} + \frac{\Delta\tau'}{\tau}\right].$$

A $\Delta(f_x)'$ és $\Delta\tau'$ jelölés magyarázata a következő: A műszer órajele mind τ, mind pedig T_x mérésében ugyanolyan előjelű és nagyságú hibát okoz (feltéve, hogy a frekvenciája stabil), így a (3.1)-ben szereplő hányadosképzés során kiesik. Ugyanakkor τ és T_x mérésének vannak független hibakomponensei, ezek szerepelnek a fenti képletben. Minthogy ezek a hibakomponensek nem egyeznek meg τ és T_x önálló mérésének hibájával, megkülönböztetésül vesszővel jelöltük őket.

A mérési idő alatt a τ intervallumot éppen $n = [t_m f_x] \cong t_m f_x$-szer mérjük meg, ahogyan T_x-et is. Viszont a τ intervallumok nem folytonosan követik egymást, így – feltételezve, hogy f_x és f_0 nem szinkronizált – n független mérésünk van, azaz a hiba nem a periódusméréshez hasonlóan n-edrészére, hanem csak $\sqrt{n}$-edrészére csökken az átlagolás során. Így τ mérésének hibája:

$$\frac{\Delta\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{t_m f_x}}\frac{1}{\tau f_0}.$$

A fázismérés hibája tehát:

$$\Delta\varphi = \varphi\left[\frac{1}{t_m f_0} + \frac{1}{\sqrt{t_m f_x}}\frac{1}{\tau f_0}\right] = 1.379\cdot 10^{-5}\ \text{rad} = 7.903\cdot 10^{-4}\ {}^\circ.$$

c) Kézenfekvő gondolat, hogy a mérés hibája csökkenthető, ha a mérendő intervallumot növeljük, ahogyan a példa javasolja. Ezek a módszerek lecsökkentik a mérés relatív hibáját, de az abszolút hibát nem. A fázismérés abszolút hibája – a mérendő intervallumot most t-vel jelölve és a (3.1) összefüggést is behelyettesítve:

$$\Delta\varphi = 2\pi t f_x\left[\frac{1}{t_m f_0} + \frac{1}{\sqrt{t_m f_x}}\frac{1}{t f_0}\right].$$

Látszik, hogy az intervallum méréséből adódó hibakomponens független t-től, míg a frekvencia méréséből adódó hibakomponens kismértékben nő. Így a fázismérés pontossága a javasolt módszerrel nem növekszik.

4. fejezet

Impedanciamérés

4.1. Elméleti alapok

Az impedanciamérés szép példája annak, hogy a mérés tulajdonképpen modellezés. Egyetlen méréssel egy kétpólus, vagy egy többpólus két kivezetése közötti impedancia modelljét határozzuk meg. A mérés egy konkrét frekvencián történik, azaz a gerjesztés szinuszos feszültség vagy áram. (Léteznek nemszinuszos mérési eljárások is, ezekkel egyrészt nem foglalkozunk, másrészt ebben az esetben is igaz, hogy az impedancia mint komplex ellenállás egy adott frekvencián értelmezett.) Mivel rögzített feszültség mellett az áram amplitúdója és fázisa az a két paraméter, amelyet az impedancia meghatároz, a modellnek is két paramétere határozható meg. Ugyanez a helyzet, ha az áram rögzített és a feszültséget vizsgáljuk; vagy az áram és a feszültség komplex formában (valós és képzetes résszel) adott.

E két paraméter alapján megadható a mért impedancia kételemes ún. helyettesítőképe. A helyettesítőkép egy rezisztív és egy reaktáns elem soros vagy párhuzamos kapcsolása. Ennek megfelelően soros vagy párhuzamos RL-vagy RC-képet lehet meghatározni. Tetszőleges mérendő objektum jellemezhető két kivezetése között egy adott frekvencián egy adott helyettesítőképpel. Ha a mérendő objektum maga is egy elemi kétpólus, és a megfelelő képet választottuk, a helyettesítőkép elemei kis frekvenciaváltozásra lényegében frekvenciafüggetlenek lesznek. Ha pl. egy valóságos kondenzátor párhuzamos RC-képét határozzuk meg, C és R értéke nem függ lényegesen attól, hogy 50 vagy 100 Hz-en mérjük. Ha azonban ugyanennek a kondenzátornak a soros RL-képét határoznánk meg, frekvenciafüggő tagokat kapnánk, sőt, az induktivitás negatív lenne. A helyettesítőkép elemeinek frekvenciaváltozásra való megváltozása alapján következtetni lehet arra, mennyire írja le jól az adott alkatrészt a választott modell.

Az impedanciamérés modern módszere a komplex aránymérés. Ez a klasszikus feszültség-összehasonlítást valósítja meg, de nem csupán a feszültségek valamilyen skalár értékét (pl. effektív érték) veszi figyelembe, hanem fázisát is. Alapesetben a gerjesztő áram a mérendő impedancián és a vele sorbakapcsolt normálellenálláson halad keresztül. A mérés során a két elemen eső feszültséget mint komplex mennyiséget mérjük. Ekkor a mérendő impedancia kifejezése:

$$Z_x = R_N \frac{U_x}{U_N} \tag{4.1}$$

ahol az x utal a mérendő impedanciára, N pedig a normálellenállásra.

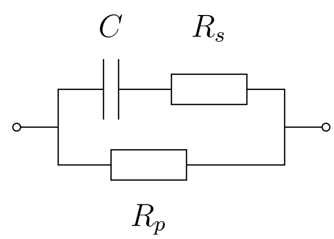
A klasszikus mérési módszerek nem támaszkodhattak a komplex arány mérésére, ezért valamilyen más úton jutottak el a két paraméter meghatározására. Klasszikus, kisebb pontossági igényeket kielégítő módszer pl. a 3 voltmérős módszer. Nagyobb pontossági igények, akár kalibrációs feladatok esetében használhatók a Wheatstone-féle hídstruktúrák, illetve a különféle aránytranszformátoros vagy áramkomparátoros hidak. Ezeket a tankönyv részletesen bemutatja.

Az impedanciamérést bizonyos körülmények között jelentősen befolyásolhatják a mérendő impedanciához leválaszthatatlanul kapcsolódó más komponensek (pl. szórt impedanciák), illetve a műszer és az impedancia közötti mérővezetékek. A méréshez alapértelmezésben 2 vezetékre van szükség, további vezetékek bekötésével különféle hatásokat csökkenthetünk. 5 vezetékes méréssel a legfontosabb hibaforrások hatását nagyságrendileg csökkenthetjük, de bizonyos esetekben, különösen nagyfrekvenciás méréseknél teljesen nem tekinthetünk el tőlük. A tankönyv ezt a témakört is részletesen tárgyalja.

4.2. Példák

4.1. Egy $C = 100$ nF kapacitású kondenzátor veszteségi tényezője $f_1 = 2$ kHz-en $D_1 = 5 \cdot 10^{-4}$, $f_2 = 3$ MHz-en pedig $D_2 = 4 \cdot 10^{-2}$. Adjuk meg a kondenzátor egy lehetséges modelljét!

Megoldás
A kondenzátor modellje az alábbi:



A kapacitás a példában megadott érték: $C = 100$ nF. A megadott adatok alapján a kondenzátor veszteségeiben a kisebb frekvencián a párhuzamos vezetés, a nagyobb frekvencián a soros ellenállás dominál, így a két veszteségi tényezőt külön-külön az ábrán látható két ágra felírva:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\omega R_p C}, \\ D_2 &= \omega R_s C, \end{aligned}$$

azaz az ellenállások:

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{1}{\omega D_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 D_1 C} = 1.592 \text{ M}\Omega, \\ R_s &= \frac{D_2}{\omega C} = \frac{D_2}{2\pi f_2 C} = 21.22 \text{ m}\Omega. \end{aligned}$$

4.2. Egy impedancia soros RL helyettesítőképét mértük. Mekkora az impedancia jósági tényezője (Q), veszteségi tényezője (tgδ), illetve disszipációs faktora (D)? A kapott eredményből határozzuk meg a párhuzamos RL, a soros RC és a párhuzamos RC helyettesítőkép elemeit!

Megoldás
A jósági tényező a meddő és a hatásos teljesítmény hányadosa:

$$Q = \frac{P_m}{P_h} = \frac{I^2 \omega L_s}{I^2 R_s} = \frac{\omega L_s}{R_s},$$

ahol L_s és R_s a soros RL-tag két eleme, I pedig a rajtuk átfolyó áram. A veszteségi tényező és a disszipációs faktor megegyezik:

$$D = \mathrm{tg}\delta = \frac{1}{Q} = \frac{R_s}{\omega L_s}.$$

A helyettesítőképek kiszámításánál úgy járhatunk el, hogy a kívánt kép impedanciáját (vagy admittanciáját) egyenlővé tesszük a keresett kép impedanciájával (vagy admittanciájával), és a reális, illetve képzetes mennyiségek egyenlősége alapján kifejezzük a keresett kép elemeit. A soros RL-tag impedanciája, ill. admittanciája:

$$Z_{L,s} = R_s + j\omega L_s, \quad Y_{L,s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} = \frac{1}{R_s} \frac{1 - j\omega L_s / R_s}{1 + \omega^2 L_s^2 / R_s^2}.$$

A párhuzamos RL-tag admittanciája alapján:

$$\begin{aligned} Y_{L,s} &= Y_{L,p} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}; \\ R_p &= R_s\left(1+\omega^2\frac{L_s^2}{R_s^2}\right) = R_s(1+Q^2), \\ L_p &= L_s\frac{1+\omega^2 L_s^2/R_s^2}{\omega^2 L_s^2/R_s^2} = L_s\frac{1+Q^2}{Q^2} = L_s(1+D^2). \end{aligned}$$

Jól látszik, hogy kis veszteségű (nagy jóságú) tekercs esetében $L_p \approx L_s$. A soros RC-tag impedanciája alapján:

$$\begin{aligned} Z_{L,s} &= Z_{C,s} = R_{C,s} + \frac{1}{j\omega C_s}; \\ R_{C,s} &= R_s, \\ C_s &= -\frac{1}{\omega^2 L_s}. \end{aligned}$$

A kapacitás tehát negatív. A párhuzamos RC-tag admittanciája alapján:

$$\begin{aligned} Y_{L,s} &= Y_{C,p} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p; \\ R_p &= R_s\left(1+\omega^2\frac{L_s^2}{R_s^2}\right) = R_s(1+Q^2), \\ C_p &= -\frac{L_s}{R_s^2+\omega^2 L_s^2}. \end{aligned}$$

A kapacitás itt is negatív, és kis veszteségű (nagy jóságú) tekercs esetében $C_p \approx C_s$.

4.3. Egy $R = 10\ \Omega$ névleges értékű ellenállást 4 vezetékes módszerrel mérünk. A mérőfrekvencia 100 Hz, a mérővezetékek ellenállása $0.1 - 0.1\ \Omega$. Mekkora az ellenállásmérés hibája legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültség és az áram mérésének hibája egyaránt 0.5%? A műszerben található volt- és ampermérő ideális, azaz $R_v = \infty$ és $R_a = 0$.

Megoldás

4 vezetékes mérés esetén a mérővezetékek nem okoznak hibát. Ezen a frekvencián a szórt kapacitások hatásával sem kell számolni, ezért a hiba csak a feszültség- és árammérés hibájától függ:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 1\%.$$

4.4. Egy $R = 10\ \Omega$ névleges értékű ellenállást 3 vezetékes módszerrel mérünk. A mérőfrekvencia 100 Hz, a mérővezetékek ellenállása $0.1 - 0.1\ \Omega$. Mekkora az ellenállásmérés hibája legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültség és az áram mérésének hibája egyaránt 0.5%? A műszerben található volt- és ampermérő ideális, azaz $R_v = \infty$ és $R_a = 0$.

Megoldás

Ebben a mérésben a mérővezetékek rendszeres hibát okoznak, a 3. vezeték nem küszöböli ki a hibát. A legkedvezőtlenebb esetben a rendszeres hiba előjelével egyezik meg a véletlen hibák előjele is:

$$\frac{\Delta R}{R} = h_r + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = \frac{2R_s}{R} + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 3\%.$$

4.5. Egy $R = 10\ \Omega$ névleges értékű ellenállást 5 vezetékes módszerrel mérünk. A mérőfrekvencia 10 kHz, a mérővezetékek ellenállása 0.1 − 0.1 Ω. Mekkora az ellenállásmérés hibája legkedvezőtlenebb esetben, ha a feszültség és az áram mérésének hibája egyaránt 0.5%? A műszerben található volt- és ampermérő ideális, azaz $R_v = \infty$ és $R_a = 0$.

Megoldás

Az 5 vezetékes mérés – elvileg – minden zavaró hatást kiküszöböl. Ez a példában adott frekvencián a gyakorlatban is jól teljesül. Így a mérési hiba:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 1\%.$$

4.6. Egy impedanciát 3 voltmérős módszerrel mérünk. A gerjesztés $U_g = 10.000$ V, a normáellenállás értéke $R_N = 100$ Ω, a normálellenálláson és a vizsgált impedancián eső feszültség rendre $U_N = 07.053$ V, illetve $U_x = 06.877$ V.

a) Mekkora az impedancia abszolút értéke és fázisa?

b) Nem ismerjük a voltmérők bizonytalanságát, de a kijelzés digitális. 20 V-os méréshatárban pontosan a megadott számjegyeket jelzik ki a műszerek. A normálellenállás bizonytalansága 0.01%. A rendelkezésre álló információ alapján adjuk meg az impedancia abszolút értéke mérésének relatív hibáját, a legkedvezőtlenebb esetet feltételezve!

c) Az impedancia abszolút értékének vagy fázisának mérése pontosabb?

Megoldás

a) Az impedancia abszolút értéke és fázisa:

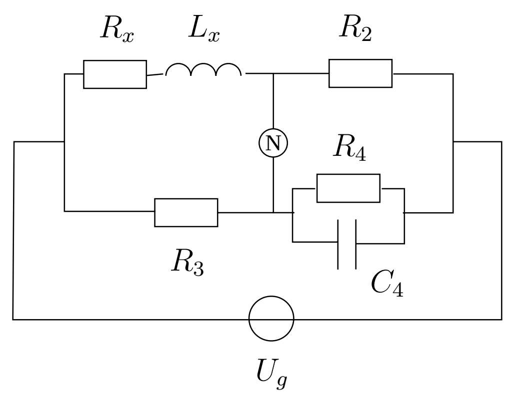
$$|Z| = \frac{U_x}{U_N} R_N = 97.50\ \Omega, \quad \varphi = \arccos \frac{U_g^2 - U_x^2 - U_N^2}{2U_x U_N} = 1.5406 = 88.25°.$$

b) $|Z|$ hibájának becslésénél csak a kvantálási hibára van információnk. Ezt felhasználva a hiba:

$$\frac{\Delta|Z|}{|Z|} = \frac{\Delta R_N}{R_N} + \frac{\Delta U_x}{U_x} + \frac{\Delta U_N}{U_N} = 0.01\% + \frac{1}{7053} + \frac{1}{6877} = 3.87 \cdot 10^{-4} \approx 0.04\%.$$

c) Mivel $\cos\varphi$ kifejezésében különbségek szerepelnek, $\cos\varphi \approx 0$, azaz $\varphi \approx 90°$ esetén az eljárás nagyon érzékeny lesz a feszültségmérés hibájára. Mivel példánkban ez az eset állt elő, az impedancia abszolút értékének mérése pontosabb.

4.7.



Az ábrán látható ún. Maxwell–Wien-híd induktivitás soros helyettesítőképét (L_x, R_x) méri. Az állítható elemek R_4 és C_4, $R_2 = R_3 = 100$ Ω.

a) Adjuk meg a kiegyenlítés feltételét, valamint L_x és R_x értékét, ha $f = 159.1$ Hz mellett $R_4 = 10$ kΩ és $C_4 = 500$ nF!

b) Adjuk meg az induktivitás jósági tényezőjét!

c) Mekkora R_x mérésének hibája, ha ezen a frekvencián C_4 veszteségi tényezője $D_4 = 0.002$?

Megoldás

a) A kiegyenlítés feltétele:

$$\begin{aligned}\frac{Z_x}{Z_3} &= \frac{Z_2}{Z_4},\\ \frac{R_x + j\omega L_x}{R_3} &= R_2(G_4 + j\omega C_4).\end{aligned}$$

Ebből a mérendő impedancia elemei:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = 1\ \Omega, \quad L_x = R_2 R_3 C_4 = 5\ \text{mH}.$$

b)

$$Q = \frac{2\pi f L_x}{R_x} = 5.$$

c) A kondenzátor veszteségi tényezőjét legegyszerűbben úgy vehetjük figyelembe, hogy a párhuzamos helyettesítőképet alkalmazzuk:

$$R_p = \frac{1}{D_4 2\pi f C_4} = 1\ \text{M}\Omega, \quad G_p = D_4 2\pi f C_4 = 1\ \mu\text{S}.$$

Ez az ellenállás R_4-gyel párhuzamosan kapcsolódik. Kiegyenlítés esetén a hídról leolvasott ellenállás R_4 lesz, a valódi kiegyenlítő ellenállás viszont a két ellenállás párhuzamos eredője, azaz R_4-nél kisebb érték. Eszerint a hiba pozitív előjelű. Az eredő ellenállás:

$$G_4' = G_4 + G_p = 101\ \mu\text{S}, \quad R_4' = \frac{1}{G_4 + G_p} \cong 9901\ \Omega.$$

A hiba pedig:

$$h = \frac{R_4 - R_4'}{R_4} = \frac{G_p}{G_4 + G_p} = 0.99\%.$$