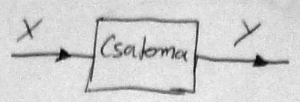
HÍRKÖZLÉSELM.

3 EA

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left[H(X) - H(X|Y) \right] = \max_{p(x)} \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$



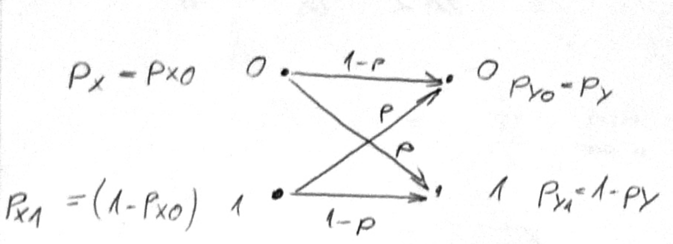
akkor entrópia - átlagos információtartalom maximális, ha $H(Y)$ maximumából kivonjuk $H(Y|X)$ minimumát

$H(X) - H(X|Y)$ - aposzteriori entrópia — esemény utáni entrópia

ha X és Y független $H(X|Y) = 0$

ha $X = Y$ — tökéletes csatorna, azt kapjuk amit adtak

BSC - ~~[illegible]~~ bináris, szimmetrikus csat.



p valszggel téveszt

1-p - valszggel nem téveszt

$$H(Y) = \sum_y p(y) \,\mathrm{ld}\, \frac{1}{p(y)} \underset{BSC}{=} P_y \cdot \mathrm{ld}\, \frac{1}{P_y} + (1-P_Y) \cdot \mathrm{ld}\, \frac{1}{1-P_Y}$$

$$0 \le H(Y) \le \mathrm{ld}\, n$$

n - lehetséges értékek száma

$\Downarrow$

$\mathrm{ld}\, 2 = 1$

bináris eset: $n = 2$ (0 vagy 1)

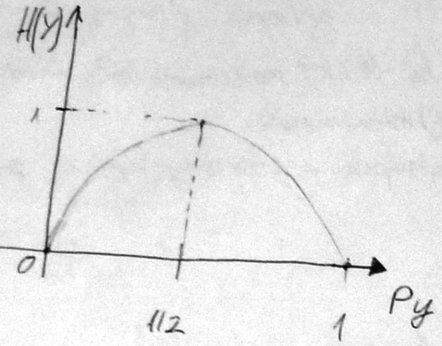
$H(Y)$ maximuma 1 $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ - valószínűségnél

$$p_y = p_x \cdot (1-p) + (1-p_x)\, p = 1/2 \quad \text{ha} \quad p_x = \frac{1}{2}$$

$p_x \cdot (1-p)$: bemenet 0 és nem hibázlom

$(1-p_x)\, p$: bemenet 1 és hibázlom

BSC esetben a csatorna hibavalség től független a bemenet eloszlása, ha p_x eloszlása $\frac{1}{2}$ (egyenletes a bemeneti eloszlás)



max $\frac{1}{2}$-nél

határokon hogy viselkedik:

$$\lim_{p_y \to 0} p_y \cdot \mathrm{ld}\, \frac{1}{p_y} = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{a}\, \mathrm{ld}\, a = \frac{1}{a} \frac{\ln a}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{a \to \infty} \frac{\ln a}{a} =$$

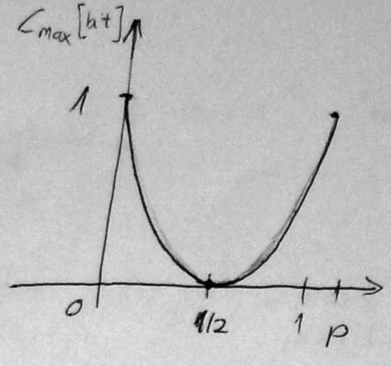
$$a = \frac{1}{p_y} \qquad = \frac{1}{\ln 2} \lim_{a \to \infty} \frac{\frac{1}{a}}{1} = 0$$

$$H(Y|X) = \sum_x p(x) \sum_y p(y|x)\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{p(y|x)} =$$

$$= p_x \left[(1-p)\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{1-p} + p\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{p} \right] + (1-p_x) \left[p\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{p} + (1-p)\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{1-p} \right] =$$

$$= (1-p)\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{1-p} + p\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{p}$$

C csatorna kapacitás



1 vagy 0 hibavalószínűségnél maximális a kapacitás

$p=0 \rightarrow$ tökéletes

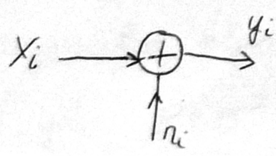
$p=1 \rightarrow$ invertálás, ez is fasza

p - csatorna hibázásának a valsége

olyan csatorna, amely azonos valséggel kiveszt és nem kiveszt, azon nem tudunk információt átvinni

DMC - diszkrét idejű memóriamentes csatorna (BSC is ilyen volt)

diszkrét idejű memóriamentes AWGN csat



A - additív

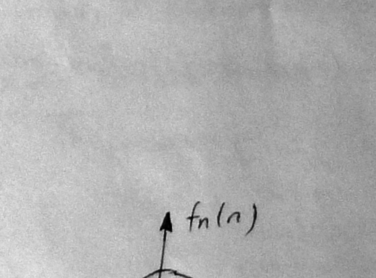
W - fehér

G - Gauss

N - Zaj

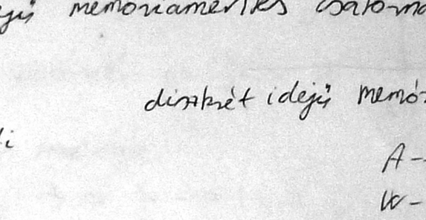
$y_i = x_i + n_i$

G: Gauss $f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{n^2}{\sigma_n^2}\right]$



Gauss folyamat gyengén stacionárius

W: spektrális teljesítménysűrűség fv:



azt írja le, hogy zajminták függetlenek egymástól

$N_0 = 2\sigma_n^2$

$N_0 = \frac{h \cdot f}{\exp\left[\frac{h \cdot f}{kT_0}\right] - 1}$

h - Planck áll. k - Boltzmann-áll

$T_0 = 17\ °C$

entrópia folytonos esetre:

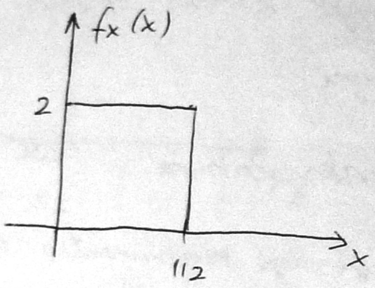
X - folytonos val. változó

$f_X(x)$

<u>differenciális entrópia:</u>

$$H(X) \doteq -E_X\{ld\, f_X(x)\} =$$

$$= -\int_X f_X(x)\, ld\, f_X(x)\, dx$$

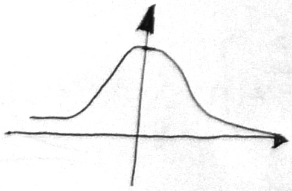


$ld\, f_X(x) = ld\, 2 = 1$

$H(X) = -1$ bit

$-1 \rightarrow$ formalitásból adódik

ahol + :



$H(X) = \frac{1}{2} ld(2\pi e \sigma^2)$

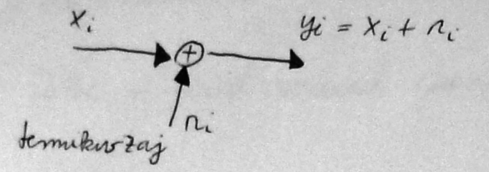
ZH 1: 27 $18^{\underline{00}}$ E1A

teszt

tétel entrópia, kölcsönös információ

példa: entrópiaszámolás (információ tartalom), csatorna kapacitást kens - távolság

DM AWGN



termikus zaj — nem függ a bemenettől

$$C_{max} = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left[H(X) - H(X|Y) \right] = \max_{p(x)} \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

$$\max_{p(x)} = \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

$$\max_{p(x)} \left[H(X+N) - H(N) \right]$$

<u>maximális</u>, ha bemeneti változó is Gauss-eloszlást követ

legyen P a teljesítménye

bem. jel $P = \sigma^2$ X - folytonos értékű, diszkrét idejű, 0 várható értékű

$\mu = 0$ B sávszélességen visszük át az információt T_S szimbólumidő

zaj: $N_0/2 = \sigma_n^2$ N folytonos $\mu_n \neq 0$

$T = \frac{1}{2B}$ - mintavétellel visszaállítható a bemeneti jel

$$H(Y) = H(X+N) = \frac{1}{2} \operatorname{ld} 2\pi e \left[\sigma^2 + \sigma_n^2 \right]$$

$$C_{max} = H(X+N) - H(N) = \frac{1}{2} \operatorname{ld} \left(2\pi e \left[\sigma^2 + \sigma_n^2 \right] \right) - \frac{1}{2} \operatorname{ld} \left(2\pi e \, \sigma_n^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ld} \frac{2\pi e (\sigma^2 + \sigma_n^2)}{2\pi e \, \sigma_n^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ld} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{ld} \left(1 + \frac{P}{N_0/2} \right)$$

SNR - signal-to-noise-ratio - jel-zaj arány

C_{max} — hány bitet tudok átvinni

· ha alacsony a ~~jelszint~~ zajszint → csatorna kapacitás nagy

ha = a kettő → 1/2 bit a csat. kapacitás

csatornakapacitás: [bit/sec]

bit / csatorna használat

$$T = \frac{1}{2B} \qquad \frac{1}{B} = 2T$$

$$\boxed{C_{max} = \underbrace{B}_{\text{sávszél}} \, ld\left(1 + \frac{P}{B \underbrace{N_0}_{\text{sávba eső zajteljesítmény}}}\right)}$$

Sávkorlátozott additív Gauss-zajos diszkrét csatorna kapacitása

ZH-ra kell:

Shannon I – II

I → forrásk.

II → csatornakap.

F — FK — CSAT. — FDK — NY

FK → forráskódolás

forráskódolás célja: csak azt visszük át, ami érdekes
tömörítés, annak érdekében, minél kevesebbszer kelljen a csatornát használni (minél költséghatékonyabb, optimálisabb módon)

F — FK — CSK | CSAT | CSDK — FDK — NY

-Red   +Red

ISC

forráskódoló igyekszik a forrásban lévő redundanciát eltüntetni

csatornakódoló redundanciát ad hozzá

JSC – joint source channel coding – jövő

Forráskódolás (információ tömörítése)

forrás ABC diszkrét

$p(X)$ – forrás szimbólumok milyen vséggel jelennek meg

$x_i \frown l_i$

kódszó hossz

$$H(x) \leq \sum_{x_i} p(x_i)\, l_i = L_x < H(x) + 1$$

megfejthető legyen a kód – fontos!

pillanatkód – egyik kód ~~xxxx~~ vége nem eleje a másiknak

prefix – eleje fix

a	0
b	10
c	11

0 | 1 1 | 1 0 | 1 0 | 0 | 1 | ...
a c b b a

nem prefix:

a	1
b	10
c	11

1 1 10 1 0 0 1

↓

nem tudom, hogy a vagy c

postfix – végek nem egyeznek

a	1	0
b	10	01
c	00	11

↓

1	1	10	1	00	1
a	a	b	a	c	a

1	1	1 0	0 0
a	a	b	c

HIRKÖZLÉSELMÉLET

4 EA

Forráskódolás

$H(X) \le L(X) < H(X)+1$ - SHANNON - I. [bit]

pillanatkód legyen - egyik kódszó sem lehet eleje egy másik kódszónak
(prefix)

$\{a, b, c, d, e \ldots\} \longleftrightarrow \{f_1 \ldots f_m\}$

m - lehetséges üzenetek száma

forráskódokból forrás üzeneteit akarjuk meghatározni

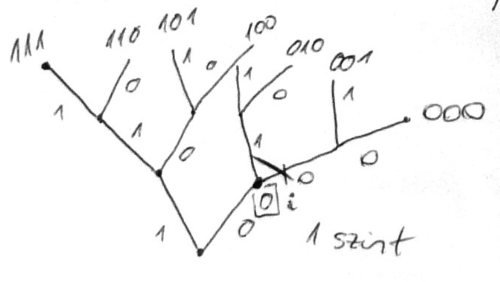
bináris gyökeres fa:

levél - 000 - 111 - bináris sorozat hossza

levél hossza megegyezik a bináris fa magasságaival (szintjei számával)

összes levél: 2^L - L-szintek száma

itt kódok 3 bit hosszúak



fát csonkíthatjuk → így keletkezett a [0] levél

i-ik szinten elvágjuk a fát

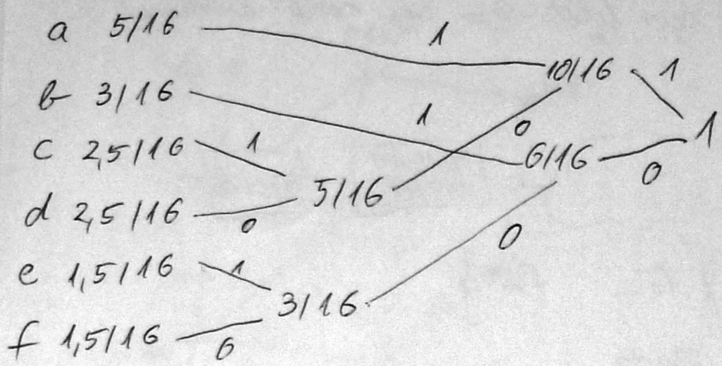
levágott fa összes levele: 2^{L-i} (részfa)

$$\boxed{2^L \ge \sum_{i=1}^{m} 2^{L-i}}$$ - Kraft - egyenlőtlenség

m darab kódot akarunk elhelyezni a fán, változó hosszan

Kraft-egy. szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy kód pillanatkód legyen

<u>Huffman 1952</u> $m = 6$ (a, b, c, d, e, f)



11	a
01	b
101	c
100	d
001	e
000	f

legkisebb valség-eket vonjuk össze és adjuk össze a ~~legkisebb~~ valségeket

– bináris fát csináltunk így – nem teljes fa

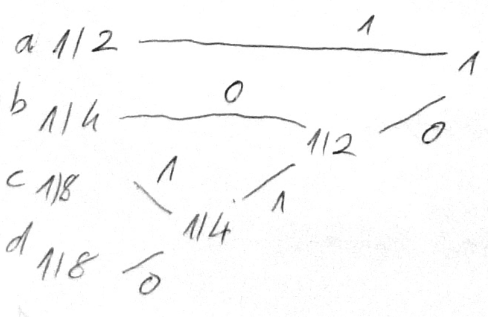
alsó ág – 0, felső – 1 – ha csak véletlenszerűen írogatjuk a 0-t és 1-eot az is fasza (csak megcsavarja a fákat)

pillanatkódot kaptunk ezzel a módszerrel

<u>Kódhatékonyság</u>:

$$h = \frac{H(X)}{L(x)}$$ – forrás entrópiája / átlagos kódszóhossz

$$\frac{8}{16}\cdot 2 + \frac{8}{16}\cdot 3 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5 \longrightarrow L(x)$$



a : 1
b : 00
c : 011
d : 010

$$L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

megegyezik a forrás entrópiájával is ebben az esetben, mert a valségek 2 negatív hatványai

Huffman-kódolás nem hatékony, ha a forrás eloszlás "nagyon nem" egyenletes

Forráskiterjesztés

m^N - N darab szimbólumot fogok össze
m darab forrásszimbólum volt
↓
nehet ennyire nő

feltesszük, hogy kódok egymástól függetlenül generálódnak (nincs korreláció)

aa 25/256 - itt $N=2$ - 2 szimbólumot fogok össze
⋮ ⋮

$L(A_{kit})$ - kiterjesztett forrás átlagos kódhossza

$$H(A_{kit}) \leq L(A_{kit}) < H(A_{kit})+1$$ - Shannon I.

$$N \cdot H(A) \leq L(A_{kit}) < N \cdot H(A)+1$$

elosztjuk N-el:

$$H(A) \leq L(A) < H(A) + 1/N$$

minél nagyobb N → annál jobban közelítjük $H(A)$-t → 100%-os forráskódolást

Huffman kód igényli apriori eloszlást → forrásszimbólumok előfordulási valószínűségeit

nem egzaktul ismerjük eloszlást - Huffman kód még jól alkalmazható
↓
pl ha $e = 2/16$ ugyanúgy alakul a kódolás (a fa)
$f = 1/16$
„kicsi jó(k) megengedhető"

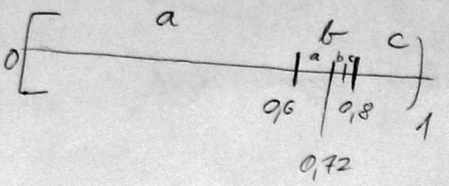
ha a forrás bináris → dolog ~~nem~~ nem tömöríthető

Aritmetikai kódolás:

ő is igényli a forrásszimbólumok apriori vségét
nem igényli viszont a memóriamentességet

a	b	c
0,6	0,2	0,2

osszuk fel [0,1)-et az arányok szerint



b: [0,6, 0,8)

bab: [0,72 ; 0,76)

0, 1 1 – bináris

2^{0} 2^{-1} 2^{-2} → 0,75

változó hosszúságú a kód

ha dekódoló tudja milyen hosszú a szó → akkor egyértelmű a dekódolás

0,75 → tudja, hogy b -mert 0,6 – 0,8 közt

:

extra szimbólum beiktatása – STOP

forráskódolás téma vége, ezután egyenletes eloszlásúnak tekintjük (optimálisnak)

optimális forráskódoló összes redundanciát eltünteti a forrásból

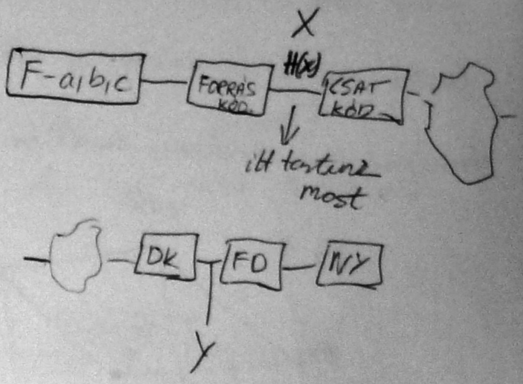
eltünteti a korrelációt is

↓

ezt szeretnénk átvinni a csatornán

Csatornakódolás

másnéven hibajavító kódolás



Shannon II

$H(X)$ forrás – forráskódoló kimenete

C kapacitású csatorna

$$C = \max_{p(x)} \left\{ I(X,Y) \right\}$$

ha $H(X) < C$, akkor létezik olyan transzformáció (csatornakódolás)

$\Omega_C(X) = X' < C$ – ha ez még fennáll, akkor minden határon túl csökkenthető a hibavalószínűség

másik megfogalmazás:

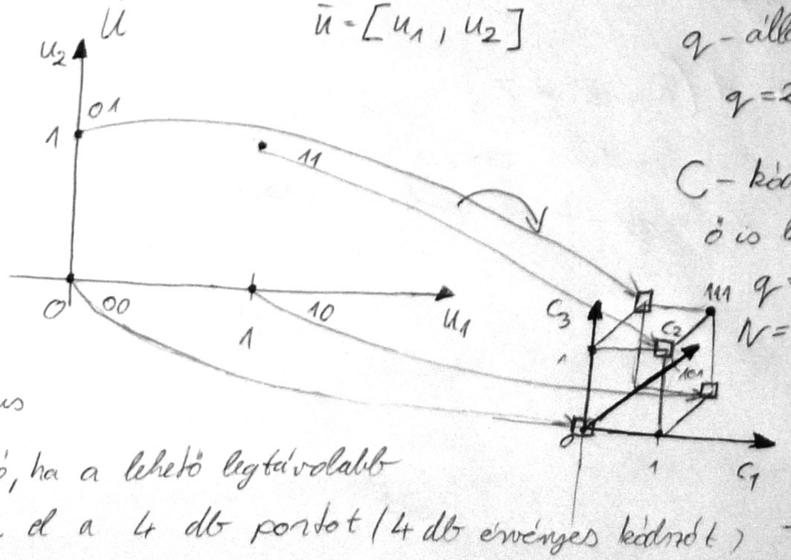
K hosszú üzenetszó N hosszú kódszóvá kódolom

$\lim_{k \to \infty} \frac{K}{N} < C$ – akkor hibavalség tetszőleges mértékben megközelítheti kis a nullát

példa: üzenet teret kódtérre képzünk le
üzenet bináris, 2 szimbólum hosszú (2 bit hosszú)

$m = q = 2$

$k = 2$



q – állapotok száma
q = 2 mert bináris

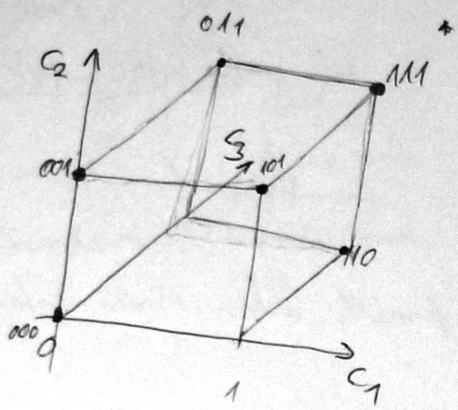
C – kódtér
ő is legyen bináris
$q = 2$
$N = 3$ – kódszóhossz
$\bar{c} = [c_1, c_2, c_3]$

heurisztikus

az a jó, ha a lehető legtávolabb helyezzük el a 4 db pontot (4 db érvényes kódszót) – 2 élhossz táv vannak hibák, amiket tudunk jelezni, javítani, de néha nem tudjuk észre sem venni őket (dekódolás során)

kocka másik 4 csúcsa is alkalmas lenne, de nem jó *

heurisztikus módszer korlátja – 3D-ig tudom rajzolni



• – lineáris alteret alkotnak ha bármelyik pontot összeadom binárisan, akkor maradok az altérben (megkapom valamelyik pontot)

a másik 4-re ez nem teljesül, így azok nem jók

Hamming-távolság

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i \neq y_i)$$

igazságfv:
χ – 1, ha argumentuma igaz
0, ha nem igaz

•–• – Hamming távolsága 2
2 bit-ben van eltérés
001 – 111

minimális kódtávolság:

$$d_{min} = \min d(\bar{c}, \bar{c}' \neq \bar{c})$$

lineáris alteret alkotó pontok minimális kódtávolsága az érvényes kódszavak közti Hamming-távolságok minimuma