ANALÍZIS(1,2) **SZIGORLAT** **2004. február 6.**
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

a.) $\boxed{10}$

1. feladat (17 pont)

a) A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{3n+2} = 2 \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

b) Konvergens-e az alábbi sor?

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n} + \dfrac{6n+1}{3n+2}}$$

a.) $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 2 Akkor is, ha a megoldásból derül ki, hogy tudja.

$\boxed{10}$ $|a_n - A| = \left|\frac{6n+1}{3n+2} - 2\right| = \left|\frac{-3}{3n+2}\right| = \frac{3}{3n+2} < \frac{3}{3n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$ 1 1 1 2 1

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ 1 $\Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 1 „egész rész" hiánya nem baj.

$\boxed{7}$ b.) $\sum_1^\infty a_n$; $a_n > 0$ (Sejtés kb $\sum^\infty \frac{1}{n^2}$ 1, ami konv. 2)

$a_n < \frac{1}{n^2}$ 3 = 1+2 és $\sum^\infty \frac{1}{n^2}$ konv. 2 $\xRightarrow{\text{maj. kr.}}$ $\sum^\infty a_n$ konv. a majoráns krit. miatt 2

(alkalmazási szükséges 1)
(minh krit, $a_n > 0$, 2p)

$\boxed{10}$

2. feladat (20 pont)

10 a) Írja le a lokális növekedés definícióját és létezésének elégséges feltételét! Állítását bizonyítsa be!

10 b) Az $y = f(x)$ grafikonja áthalad az $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ ponton, f kétszer differenciálható és megoldása az

$$y' + \left(e^{\arcsin 3x}\right) y = 5$$

differenciálegyenletnek.
Igaz-e, hogy f az adott pontban lokálisan nő? Van-e az adott pontban inflexiója?

(−1)

a.) Ⓓ f x_0-ban lokálisan növekedő, ha $\exists K_{x_0,\delta}$:

$\boxed{10}$ (2)

$$x \in (x_0-\delta, x_0)\text{-ra } f(x) \le f(x_0) \text{ és } \quad x \in (x_0, x_0+\delta)\text{-ra } f(x_0) \le f(x).$$

Ⓓ f x_0-ban lokálisan csökkenő, ~~ha $\exists K_{x_0,\delta}$~~ : (−1)

$$x \in \cancel{(x_0-\delta, x_0)}\text{-ra } f(x) \ge f(x_0) \text{ és } \quad x \in (x_0, x_0+\delta)\text{-ra } f(x_0) \ge f(x).$$

Ⓣ

Ha f differenciálható x_0-ban és		
1. f lokálisan nő x_0-ban	$\Longrightarrow$	$f'(x_0) \ge 0$
2. f lokálisan nő x_0-ban	$\Longleftarrow$	$f'(x_0) \overset{!}{>} 0$ (2)

Ⓑ

1. $$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\ominus} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \ge 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\pm} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \ge 0$$

diff. def. (2)

2. $$\underbrace{f'(x_0)}_{A} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\circledast} > 0 \qquad \left(A-\varepsilon < \circledast < A+\varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2}\right)$$ (2)

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < \frac{3}{2} f'(x_0), \quad \text{ha } |h| < \delta(\varepsilon).$$ (1) ⟹ állítás (1)

$\boxed{\forall_{h\to 0} \ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0, \text{ ha } h \text{ elég kicsi}}$ (2) vagy $\frac{+}{+} \vee \frac{-}{-} \Rightarrow$

$h>0 \Rightarrow f(x_0+h) \ge f(x_0)$

$h<0 \Rightarrow f(x_0+h) \le f(x_0)$ (2)

b) $y(x_0) = f(x_0) = 2$ (adott) ; $x_0 = 0$

$\boxed{10}$

A de.-ből $\quad y'(x) (= f'(x)) = 5 - e^{\arcsin 3x}\, y(x)$

(1) (1) esetleg plusz pont, az a) rész

$\Rightarrow f'(0) (= y'(0)) = 5 - e^0 \cdot 2 = 3 > 0 \Rightarrow f$ lok. nő $x_0 = 0$-ban

Az előző egyenletet x szerint differenciálva:

$$y'' = -e^{\arcsin 3x} \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 \cdot y - e^{\arcsin 3x}\, y'$$ szorzat deriv. (1) $(e^{f(x)})'$ (2)

$x = 0, \quad y = 2, \quad y' = 3$:

(1) (1)

$$y''(0) = f''(0) = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -9 \ne 0$$

(1)

$\Rightarrow$ nincs inflexiós pontja $x = 0$-ban, mert nem teljesül a szükséges feltétel (2)

(Ha számolási hiba miatt $y''(x_0) = 0 \Rightarrow$ infl. lehet, de ... (2))

sz 040206/2.

feladat (20 pont)

(7) a) Írja le a függvénysorozatok határfüggvényének folytonosságára, differenciálhatóságára és integráljára vonatkozó tételeket!

(4) b) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}^+$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$, $x \in \mathbb{R}$

Egyenletes-e a konvergencia a $[-1,1]$ intervallumon?

(9) c) $I_n = \int\limits_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$, $\qquad I = \int\limits_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$

Az I_n és az I kiszámolásával ellenőrizze, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ egyenlőség fennáll-e!

a.) $\boxed{7}$

(T1) Ha az f_n függvények folytonosak x_0-ban és $f_n \rightrightarrows f$ $K_{x_0,r}$-ben, akkor az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény is folytonos x_0-ban. (2) (−1) (−2)

(Intervallumra is kimondható!)

Elégséges feltétel az integráljel és a limesz felcserélhetőségére:

(T2) Ha $f_n \in C^0_{[a,b]}$ és

$$\left(f_n \rightrightarrows f \text{ vagyis } f_n \xrightarrow{u} f\right) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{a_n} = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{A}$$

$[a,b]$-n (−1) (2)

(T3) Ha $f_n \in C^1_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n

$f_n' \xrightarrow{u} g$ (egyenl. konv.) (−1)

$f_n \to f$ (pontonkénti konv.) vagy egyenl. (−1)

$\Longrightarrow$ f differenciálható $[a,b]$-n és $f' = g$ (3)

b.) $\boxed{4}$

$f_n(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 1$ (1)

Ha $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\underbrace{1+nx^2}_{\to\infty}} = 0$ (1)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(egy. konv. def. (1p))

$[-1,1]$-en nem egyenletes a konvergencia, mert bár f_n-ek folytonosak itt, de a határfüggvény nem (2)

c.) $\boxed{9}$

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+nx^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega \frac{1}{1+(\sqrt{n}x)^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left.\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}x}{\sqrt{n}}\right|_0^\omega =$$ (1) (2)

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}\omega}{\sqrt{n}} - 0\right) = \frac{\pi/2}{\sqrt{n}}$$ (1) (1) (1) ; $I = \int_0^\infty 0\,dx = 0$ (1) indoklás (1)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}} = 0 = I$ igaz (1)

sc 04020613.

4. feladat (13 pont)

(3) a) Mikor mondjuk, hogy az f függvény a g függvényt az x_0 pontban pontosan másodrendben érinti?

(4) b) Írja fel az f függvény x_0 pontra támaszkodó n-edrendű Taylor polinomját! Mit tud mondani T_n és f érintkezéséről?

(6) c) Igazolja, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

a.) $\boxed{3}$ (D) Az f és g legalább $(n+1)$-szer differenciálható függvények *pontosan n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0)=g^{(i)}(x_0),\quad 0\le i\le n \quad \text{és} \quad f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0).$$

Tehát most: $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0)=g'(x_0)$, $f''(x_0)=g''(x_0)$, (2) de $f'''(x_0)\neq g'''(x_0)$ (1)

b.) $\boxed{4}$ (T)

(−1/2)

Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Egyetlen olyan legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinom van, amely x_0-ban legalább (−1/2) n-edrendben érinti f-et, mégpedig (2)

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ (2)

c.) $\boxed{6}$ (T)

Legyen f legalább n-szer differenciálható K_{x_0}-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0;$$

Tehát $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ az x_0-ban.

(M) A közelítés jóságát mutatja a tétel.

(B)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{\to 0}{f(x)-T_n(x)}}{\underset{\to 0}{(x-x_0)^n}}\overset{(1)\ \text{L'H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\ (1)\ \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\overset{\text{L'H}}{=}\underset{n\text{ lépés után}}{\cdots}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!\,(x-x_0)^{n-n}}=\frac{0}{n!}=0$$

(1) (1)

(Az utolsó tört kivételével a törtek $\frac{0}{0}$ alakúak, ezért alkalmazhattuk a L'Hospital szabályt.) ∎

(2)

sz 040206/4.

...feladat (17 pont)

(11) a) $f(x,y) = x + 2y + \frac{x}{y}$

Vannak-e lokális szélsőértékhelyei az f függvénynek?

(6) b) Írja le a kétváltozós függvény lokális szélsőértékeivel kapcsolatban tanult tételeket!

a.) $\boxed{11}$

(1) $f_x' = 1 + \frac{1}{y} = 0$

(1) $f_y' = 2 - \frac{x}{y^2} = 0$ (1)

$x=2$, $y=-1$ pontban teljesül a szükséges feltétel, tehát csak a $P_0(1,-1)$ pontban lehet lokális szélsőérték. (1)

(1) $f_{xx}'' = 0$; (1) $f_{xy}'' = f_{yx}'' = -\frac{1}{y^2}$; $f_{yy}'' = \frac{2x}{y^3}$ (1)

$D(1,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow$ nincs lok. szé.

(2) (1) (1)

(13)

b.) $\boxed{6}$

Szükséges feltétel differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésére:

(T) (2)

$K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ és f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.
Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor

$$df(\underline{a},\underline{h}) = 0 \qquad \forall \quad |\underline{h}| < \delta\text{-ra.}$$

vagy $f_{x_i}'(\underline{a}) = 0$, $i = 1, \dots, m$

(13)

Elégséges tétel lokális szélsőérték létezésére speciálisan kétváltozós függvényre:

(T) (4)

Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$, és

$$D(x,y) := |\underline{\underline{H}}(x,y)| \ (= \det \underline{\underline{H}}(x,y)) = \begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{vmatrix}$$ (1)

$f_x'(x_0,y_0) = 0$, (−1) $f_y'(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) > 0$: *van* lok. szélsőérték: (−1) (2)
$f_{xx}''(x_0,y_0) > 0$: lok. min. (−1/2)
$f_{xx}''(x_0,y_0) < 0$: lok. max.

$f_x'(x_0,y_0) = 0$, $f_y'(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) < 0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték (1)
$f_x'(x_0,y_0) = 0$, $f_y'(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) = 0$: ? (További vizsgálat szükséges) +

(¬B)

1.

2.

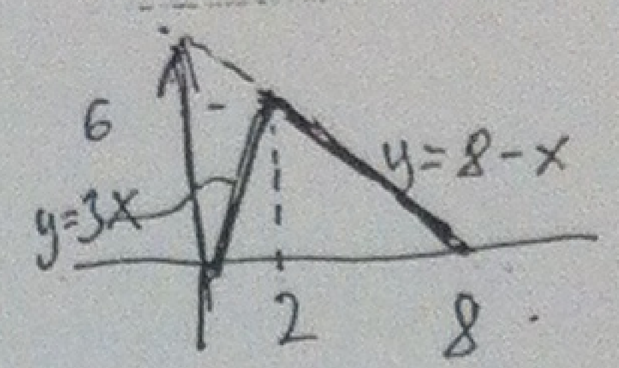
sz 09020615.

6. feladat (13 pont)

$$\iint_T \sin y \, \mathrm{d}T = ?,$$

ahol T az $A(0,0)$, $B(8,0)$ és $C(2,6)$ csúcspontú háromszög.

1. megoldás (13)



$$\int_0^6 \int_{x=\frac{y}{3}}^{8-y} \sin y \, dx \, dy = \int_0^6 x\Big|_{x=\frac{y}{3}}^{8-y} \sin y \, dx =$$ (5)

$$= \int_0^6 \left(8-\frac{4}{3}y\right)\sin y \, dy \underset{(2)}{=} \left(8-\frac{4}{3}y\right)(-\cos y)\Big|_0^6 - \frac{4}{3}\int_0^6 \cos y \, dy \underset{(4)}{=}$$

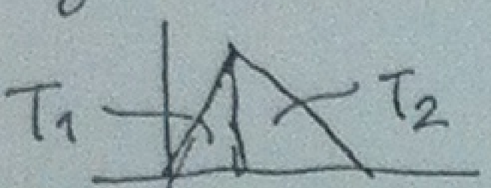
(2) = (1) + (1)

$u = 8-\frac{4}{3}y \qquad v' = \sin y$

$u' = -\frac{4}{3} \qquad v = -\cos y$

$$= 8 - \frac{4}{3}\sin y\Big|_0^6 = 8 - \frac{4}{3}\sin 6$$ (2) = (1) + (1)

2. megoldás:



(13)

$$\iint_T \ldots = \iint_{T_1} \ldots + \iint_{T_2} \ldots = \int_0^2 \int_0^{3x} \sin y \, dy \, dx + \int_2^8 \int_0^{8-x} \sin y \, dy \, dx \underset{(6)}{=}$$

$$= \int_0^2 \underbrace{-\cos y\Big|_0^{3x}}_{-\cos 3x + 1 \ (1)} (1) \, dx + \int_2^8 \underbrace{-\cos y\Big|_0^{8-x}}_{-\cos 8x + 1 \ (1)} (1) \, dx =$$

$$= \left(-\frac{\sin 3x}{3} + x\right)\Big|_0^2 \ (1) + \left(\sin(8-x) + x\right)\Big|_2^8 \ (1) = \ldots = 8 - \frac{4}{3}\sin 6 \ (1)$$

1. megoldás

$y = 3x$ (1) $\qquad 0 \le y \le 6$ (1) $\qquad \int_0^6 \int_{y/3}^{8-y} \sin y \, dx \, dy$ (1)

$y = 8 - x$ (1) $\qquad \frac{y}{3} \le x \le 8-y$ (1)

parc. integrálás határozatlan integrálra (3)

N-L formula (1)

2. megoldás. $y = 3x$ (1) $\qquad T_1: 0 \le x \le 2 \qquad T_2:$ (1). $\iint_{T_1} \sin y \, dy \, dx$ (1)

$y = 8 - x$ (1) $\qquad 0 \le y \le 3x$ (1) $\qquad \iint_{T_2} \ldots$ (1)

sz 04020616.

u

...feladat
(csak az elégséges (indokolt esetben kis mértékben a közepes) szigorlathoz javítjuk ki):

7. feladat (15 pont)

(10) a) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x\,(1+x)^2}$$

(5) b) $\ln(-e) = ?$, $\ln(1+j) = ?$, $\operatorname{Im} e^{-1+j\frac{\pi}{4}} = ?$

a.) $H:\ y' + \frac{y}{x} = 0$ (1) $\Rightarrow\ y' = -\frac{y}{x}$, $y \equiv 0$ mo.

$\boxed{10}$ $\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x}\,dx$ (1) $\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1$

$\Rightarrow |y| = e^{C_1} e^{\ln\frac{1}{|x|}} = \frac{e^{C_1}}{|x|} \Rightarrow y = \frac{\pm e^{C_1}}{x}$ ill. $y \equiv 0$

$\Rightarrow y_H = \frac{C}{x}$ (2) $C \in \mathbb{R}$

$y_{ip} = \frac{C(x)}{x}$; $y'_{ip} = \frac{C'x - C}{x^2}$

$I:\ \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x(1+x)^2} \Rightarrow C' = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow C = \frac{-1}{1+x}$

$y_{ip} = -\frac{1}{x(1+x)}$; $\underbrace{y_{id} = y_H + y_{ip}}_{1} = \frac{C}{x} - \frac{1}{x(1+x)}$

b.) $\ln(-e) = \ln|-e| + j\,\mathrm{arc}(-e) = \ln e + j(-\pi) = 1 - j\pi$ (1)

$\boxed{5}$ $\ln(1+j) = \ln|1+j| + j(\mathrm{arc}(1+j)) = \ln\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4}$ (1)

$e^{-1+j\frac{\pi}{4}} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (1)

$\operatorname{Im} e^{-1+j\frac{\pi}{4}} = e^{-1}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1)

$\ln z = \ln|z| + j\,\mathrm{arc}\,z$ (1) (akkor is, ha csak jól alkalmazza.)

sz 040206/7.