ANALÍZIS 1.	**I. VIZSGA**	**2016. január 11.**
Mérnök informatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (10 pont) Adja meg az $z^4-(1-2i)z^2-i-1=0$ egyenlet összes megoldását.

$\dfrac{1-2i+\sqrt{(1-2i)^2+4i+4}}{2}=\dfrac{1-2i+\sqrt{1}}{2}$, vagyis $z^2 \overset{\mathbf{1p}}{=} -i \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ vagy $z^2 \overset{\mathbf{1p}}{=} 1-i \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, vagyis $z_1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $z_3 \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$, $z_4 \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$.

---

2. feladat (8+7 pont)

a) Igazolja, hogy ha $a_n \to \infty$ esetén $\frac{1}{a_n} \to 0$. Igaz-e, hogy $a_n \to 0$ esetén $\frac{1}{a_n} \to \infty$?

b) Adja meg az alábbi határértékeket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)^{n^3}$$

---

a) $a_n > 0$, ha $n > N_1$ (**1p**), vagyis $\varepsilon > \left|\frac{1}{a_n}-0\right| = \frac{1}{a_n}$ pontosan akkor, ha $a_n > \frac{1}{\epsilon}$ (**2p**). Mivel $a_n \to \infty$, így létezik $N_2 > N_1$, hogy $n > N_2$ esetén ez teljesül (**2p**), ez lesz tehát az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat ε-hoz tartozó küszöbszáma (**1p**). A másik állítás nem igaz, például $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$,de $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n \not\to \infty$ (**2p**).

b) $\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2} \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} \overset{\mathbf{1p}}{\to} e^2$,vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik N, hogy $n > N$ esetén

$$\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^3} \overset{\mathbf{1p}}{>} (e^2-\varepsilon)^n \overset{\mathbf{1p}}{\to} \infty,$$

ha $e^2 - \varepsilon > 1$, vagyis a speciális rendőrelv értelmében $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^3} \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty$.

A második sorozat ennek reciproka, így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+2}\right)^{n^3} = 0$ (**2p**).

---

3. feladat (7 pont)
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját. Konvergens a sorozat?

$$\sqrt[n]{2^{2n} + (-4)^n + n^2}.$$

Páros n esetén

$$4 \leftarrow 4\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} \leq a_n = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n + n^2} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3} \to 4, \qquad \mathbf{(3p)}$$

páratlan n esetén

$$a_n = \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1, \qquad \mathbf{(1p)}$$

vagyis a torlódási pontok halmaza $\{1, 4\}$ (**1p**), és

$$1 = \liminf a_n \neq \limsup a_n = 4, \qquad \mathbf{(1p)}$$

vagyis a sorozat nem konvergens (**1p**).

---

4. feladat (11 pont)
Milyen a és b esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\operatorname{sh} ax}, & \text{ha } x < 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \\ (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos?

---

f az $x \neq 0$ pont kivételével folytonos függvények összetétele, illetve hányadosa, vagyis folytonos (**1p**).

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(2x)}{\operatorname{sh} ax} = \lim_{x\to 0-} \frac{2\cos(2x)}{a \operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}, \qquad \textbf{(2p)}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}} \overset{\textbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x}} \overset{\textbf{1p}}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x} \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{1} \overset{\textbf{1p}}{=} 0.$$

f folytonos a 0 pontban, ha

$$\frac{2}{a} = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = b = 1, \qquad \textbf{(2p)}$$

vagyis ha $a = 2$, $b = 1$ (**1p**).

---

5. feladat (9 pont)
Adja meg az

$$f(x) = \frac{\operatorname{th}^2(3x)}{\operatorname{arctg}(5x) + 1}$$

függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban.

$f(0) = 0$ (**1p**), és

$$f'(x) = \frac{3\frac{2\operatorname{th}(3x)}{\operatorname{ch}^2(3x)}(\operatorname{arctg}(5x) + 1) - \operatorname{th}^2(3x)\frac{5}{25x^2+1}}{(\operatorname{arctg}(5x) + 1)^2}, \qquad \textbf{(6p)}$$

vagyis $f'(0) \overset{\textbf{1p}}{=} 0$, így az érintőegyenes egyenlete $y = 0$ (**1p**).

---

6. feladat (6+7 pont)

a) Ismertesse Weierstrass első és második tételét.

b) Adja meg az $f(x) = \operatorname{sh}(x^3 - 6x^2 + 9x + 200)$ függvény minimumát illetve maximumát az $[2, 4]$ intervallumon.

a) Weierstrass I: korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos. (**3p**)
Weierstrass II: korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a maximumát és a minimumát. (**3p**)

b) $f(2) = \operatorname{sh} 202$, $f(4) = \operatorname{sh} 204$ (**1p**), és

$$f'(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (3x^2 - 12x + 9)\operatorname{ch}(x^3 - 6x^2 + 9x + 200) = 0$$

ha $3x^2 - 12x + 9 = 0$, vagyis ha $x = 1 \notin [2, 4]$, vagy $x = 3 \in [2, 4]$ (**2p**). $f(3) = \operatorname{sh} 200$, tehát az sh függvény szigorú monoton növekedése miatt a minimum sh 200, a maximum pedig sh 204 (**2p**). (Ugyanezen monotonitás miatt elég lenne a belső függvény minimumát, illetve maximumát keresni, az is teljes értékű megoldás.)

---

7. feladat* **(5+5 pont)** Számolja ki az alábbi integrálokat

$$a)\ \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \operatorname{tg}(3x)dx, \qquad b)\ \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg}(3x)dx.$$

---

a) Páratlan függvény integrálja origóra szimmetrikus intervallumon, vagyis az integrál értéke 0 (**5p**). Vagy így:

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg}(3x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \left[\frac{1}{3}\ln\sin(3x)\right]_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \overset{\mathbf{2p}}{=} -\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

8 feladat* **(11 pont)**
Megfelelő helyettesítéssel határozza meg az alábbi integrált:

$$\int \frac{1}{e^x - 5}dx.$$

$t \overset{\mathbf{1p}}{=} e^x$ helyettesítéssel $x \overset{\mathbf{1p}}{=} \ln t$, és $(\ln t)' \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{t}$, vagyis

$$\int \frac{1}{e^x - 5} dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \int \frac{1}{t(t-5)} dt,$$

ahol

$$\frac{1}{t(t-5)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{A}{t} + \frac{B}{t-5} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{A(t-5) + Bt}{t(t-5)},$$

így $B \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{5}$, $A \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{1}{5}$. Ebből következik, hogy

$$\int \frac{1}{e^x - 5} dx \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{1}{5} \left(\int \frac{1}{t} - \frac{1}{t-5} dt \right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{-\ln|t| + \ln|t-5|}{5} + c \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{-\ln e^x + \ln|e^x - 5|}{5} + c.$$

---

9 feladat* (6+8 pont)

a) Hogyan értelmezzük az $\int_a^b f(x)dx$ integrált, ha $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$?

b) Adja meg az

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx$$

integrál értékét, ha létezik.

---

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, ha $f \in \mathcal{R}(a+\varepsilon, b)$, illetve ha a határérték létezik (**6p**).

b) $$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx, \text{ és}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \int (\operatorname{arctg} x)' (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{3}} dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{3}{2} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{2}{3}} + c$$

így

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[(\operatorname{arctg} x)^{\frac{2}{3}} \right]_\varepsilon^1 =$$

$$\overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{3}{2} \left((\operatorname{arctg} 1)^{\frac{2}{3}} - \lim_{\varepsilon \to 0+} (\operatorname{arctg} \varepsilon)^{\frac{2}{3}} \right) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}}$$