3. vizsga

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. a) Írjuk fel a szita-formulát két ill. három eseményre is.

   b) Hogyan definiáltuk az előadáson egy folytonos valószínűségi változó várható értékét?

   Megoldás:

   a) Legyenek $A, B, C \subset \Omega$ események.

   (2 pont) A szita-formula két eseményre: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

   (3 pont) A szita-formula három eseményre:

   $$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

   b)

   (1 pont) Legyen X folytonos valószínűségi változó, aminek sűrűségfüggvénye f_X.

   (3 pont) Ekkor X várható értéke

   $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt,$$

   (1 pont) amennyiben a fenti integrál abszolút konvergens, azaz az

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t)\, dt$$

   integrál véges.

2. Egy normális eloszlású X valószínűségi változóra $\mathbb{E}(X^2) = 5$ és $\mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{2}$ teljesül. Adjuk meg X sztenderdizáltját.

   Megoldás:

   (2 pont) A komplementer eseményre áttérve, valamint X folytonossága miatt

   $$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1),$$

tehát $\mathbb{P}(X < 1) = \dfrac{1}{2}$.

(1 pont) Legyen $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, ekkor a normális eloszlás eloszlásfüggvényének képlete szerint

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X < 1) = \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)$$

(2 pont) Az $\dfrac{1}{2}$ értéket a Φ függvény a 0 helyen veszi fel, így tehát $\dfrac{1-\mu}{\sigma} = 0$, azaz $\mu = 1$.

(2 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2$

(1 pont) $= \sigma^2 + \mu^2 = \sigma^2 + 1$, tehát $5 = \sigma^2 + 1$, $\sigma^2 = 4$, $\sigma = 2$.

(2 pont) Ebből az X sztenderdizáltja $\dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-1}{2}$.

3. Egy urnában 1 zöld, 2 kék és 3 piros golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk 2 golyót visszatevés nélkül. Jelölje X a kihúzott kék, míg Y a kihúzott zöld golyók számát. Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.

Megoldás:

(1 pont) Az X értékkészlete: $\mathrm{ran}X = \{0, 1, 2\}$, az Y értékkészlete: $\mathrm{ran}Y = \{0, 1\}$. (Ha ez az együttes eloszlás táblázatából derül ki, akkor is jár a pont.)

(1 pont) A $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ valószínűségeket kell megadnunk, ahol $i \in \mathrm{ran}X$ és $j \in \mathrm{ran}Y$. (Ha ez egyértelműen kiderül a megoldásból, de nincs külön hangsúlyozva, akkor is jár a pont. Ha ez nincs külön kihangsúlyozva, és a megoldó egyéb mennyiségeket is kiszámol anélkül, hogy jelezné, hogy azok nem tartoznak a válaszhoz, akkor ez a pont nem jár.)

(1 pont) Ha $X = 2$, azaz két kéket húzunk, akkor nem húzunk zöldet, tehát $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 0$,

(2 pont) továbbá, mivel összesen 6 golyó van és így $\binom{6}{2} = 15$-féleképp húzhatunk közülük 2 darabot,

(1 pont) ezért $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{15}$ telejesül.

(1 pont) Az $\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}$ esemény azt jelenti, hogy 1 kéket és 1 pirosat húzunk, tehát

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

(1 pont) Az $\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}$ esemény azt jelenti, hogy 1 kéket és 1 zöldet húzunk, tehát

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{2}{1}}{15} = \frac{2}{15}.$$

(1 pont) Az $\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}$ esemény azt jelenti, hogy 1 pirosat és 1 zöldet húzunk, tehát

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

(1 pont) Az $\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}$ esemény azt jelenti, hogy 2 pirosat húzunk, tehát

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{3}{2}}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

(0 pont) Tehát az együttes eloszlás táblázata

$Y \backslash X$	0	1	2
0	1/5	2/5	1/15
1	1/5	2/15	0

(Más eseménytér segítségével is megoldható a feladat, pl. ha a húzott golyók sorrendjét is figyelembe vesszük. Ilyen esetben is analóg módon történik a pontozás.)

4. Egy társasjátékban minden egyes kör úgy zajlik, hogy a sorra kerülő játékos dob egy (hat oldalú) dobókockával, előrelép a bábujával a táblán annyi mezőt, amennyit dobott, majd végrehajtja annak a mezőnek az utasításait, amelyre érkezett. Tegyük fel, hogy az egyes dobások egymástól függetlenek, továbbá a játékban nincs olyan, hogy valaki kimarad egy körben (tehát minden játékos dob minden körben), valamint a játékosok bábui csak a dobások következtében mozoghatnak a táblán (tehát a mezők utasításai vagy egyéb szabályok nem mozgatják a bábukat). Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy egy adott játékos 50 kör alatt összesen legalább 180 mezőnyit lép előre?

Megoldás:

(1 pont) Jelölje $X_1, \dots, X_{50}$ egy játékos dobásainak az értékét az első 50 körben. Ekkor az X_i-k együttesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

(1 pont) Előadáson kiszámoltuk, hogy $\mathbb{E}(X_i) = 3{,}5$ és $\mathbb{E}(X_i^2) = \dfrac{91}{6}$.

(Természetesen itt nem kell (de lehet) az előadásra hivatkozni, a várható érték definícióját ill. a transzformált várható értékére tanul formulát is lehet használni, vagy persze X_i^2 eloszlásának meghatározásával is kiszámolható $\mathbb{E}(X_i^2)$.)

(1 pont) Így

$$\mathbb{D}^2(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

(Valójában a 7. gyakorlat 8. feladatában kiszámoltuk ezt a szórásnégyzetet, ha valaki esetleg erre hivatkozik, akkor is jár a fenti pont, az azt megelőző pontért pedig ebben az esetben elég a várható értéket megadni.)

(1 pont) Vagyis $\mathbb{D}(X) = \sqrt{35/12} \approx 1{,}7078$.

(1 pont) A játékos dobásainak száma 50 kör alatt $\sum_{i=1}^{50} X_i$,

(1 pont) így a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{50} X_i \geq 180) = 1 - \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{50} X_i < 180)$.

(Az előadáson a centrális határeloszlás tétele olyan alakban volt kimondva, amely a komplementer eseményre alkalmazható, azonban a tétel álltítása a de Moivre–Laplace-tételnél látott általánosabb alakban is érvényes, így tehát ha valaki nem tér át a komplementer eseményre, és a tételt helyesen alkalmazza, akkor is jár minden pont.)

(1 pont) A bal oldalt sztenderdizálva

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i < 180\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{50\cdot 35}{12}}} < \frac{180 - 50\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{50\cdot 35}{12}}}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{50\cdot 35}{12}}} < \frac{5}{\sqrt{\frac{875}{6}}}\right).$$

(1 pont) A centrális határeloszlás tétele alkalmazható a fenti szituációban, mert az X_i-k függetlenek, azonos előszlásúak és véges pozitív szórásúak,

(1 pont) eszerint a fenti valószínűleg közelítőleg

$$\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{\frac{875}{6}}}\right) \approx \Phi(0{,}41)$$

(1 pont) $\approx 0{,}6591$, tehát a keresett valószínűség közelítőleg $1 - 0{,}6591 = 0{,}3409$.

5. Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett, azonos eloszlású valószínűségi változók $\frac{1}{2}$ várható értékkel és $\frac{1}{4}$ szórással. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbb{D}(X+Y) = \frac{1}{4}$ is teljesül. Határozzuk meg X és Y korrelációját illetve az $\mathbb{E}(XY)$ várható értéket. Lehetséges-e, hogy X és Y függetlenek?

Megoldás:

(1 pont) A feladat szerint $\mathbb{D}^2(X+Y) = \dfrac{1}{16}$.

(1 pont) Az összeg szórásnégyzetére tanult formula szerint

$$\frac{1}{16} = \mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$$

(1 pont) $= 2 \cdot \dfrac{1}{16} + 2\mathrm{cov}(X,Y)$

(1 pont) azaz $-\dfrac{1}{32} = \mathrm{cov}(X,Y)$.

(1 pont) Ebből $\mathrm{corr}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\,\mathbb{D}(Y)}$

(1 pont) $= -\dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$.

(1 pont) Továbbá $-\dfrac{1}{32} = \mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

(1 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = -\dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{32}$.

(1 pont) Ha X és Y függetlenek lennének, akkor $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ teljesülne,

(1 pont) tehát X és Y nem lehetnek függetlenek.

(Ha a formulák nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a formulákért is jár a pont.)

6. Egy 10 elemű minta alapján meghatároztuk a hozzá tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt, amelyre az

$$F^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 1, \\ 2/5 & \text{ha } 1 < t \le 3, \\ 1/2 & \text{ha } 3 < t \le 7, \\ 7/10 & \text{ha } 7 < t \le 8, \\ 1 & \text{ha } 8 < t. \end{cases}$$

formula adódott. Számoljuk ki ez alapján a mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást.

Megoldás:

(1 pont) Mivel $t \le 1$-re $F^*(t) = 0$, így a mintaelemek közt nincs 1-nél kisebb,

(1 pont) azonban $F^*(t) = \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10}$, ha $1 < t \le 3$, tehát 4 darab 1-es szerepel a mintában.

(1 pont) Mivel továbbá $F^*(t) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$, ha $3 < t \le 7$, így tehát a 4 db 1-esen kívül még 1 db 3-as is van a mintában.

(2 pont) Hasonló érveléssel adódik, hogy 2 db 7-es és 3 db 8-as van a mintában, tehát a rendezett minta

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 8.$$

(1 pont) Így tehát a mintaátlag

$$\overline{x} = \frac{1+1+1+1+3+7+7+8+8+8}{10} = 4{,}5$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s^{*\,2} = \frac{n}{n-1}s^2$, ahol s^2 a tapasztalati szórásnégyzet, n pedig a minta elemszáma (jelen esetben 10), a tapasztalati szóránégyzet pedig az $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ képlettel számolható,

(1 pont) ahol

$$\overline{x^2} = \frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 7^2 + 7^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2}{10} = 30{,}3,$$

(1 pont) így tehát

$$s^{*\,2} = \frac{10}{9} \cdot (30{,}3 - 20{,}25) = \frac{67}{6} \approx 11,1667.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórás tehát $s^* = \sqrt{s^{*\,2}} \approx 3{,}3417$.

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó. Ha a megoldó számológép segítségével számolja az átlagot és a korrigált tapasztalati szórást közvetlenül a mintából (tehát a fenti helyettesítéseket nem végzi el), a korrigált tapasztalati szórás és szórásnégyzet, valamint a tapasztalati szórásnégyzet képletének (vagy egy összevont képletnek), illetve az $\overline{x^2}$ értelmezésének szerepelnie kell az előző 4 pontért. Ezek bármelyikének hiányáért egyenként 1 pont levonás jár a fenti 4-ből (vagyis például egy puszta eredményközlés esetén mindössze az átlagért jár pont).