Bevezető matematika B, 1. zárthelyi dolgozat, megoldások, A csoport

1. (6 pont) A polcokon lévő könyvek száma számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 5$ és $d = 4$. A legfelső polcon lévő könyvek n darabszámára a $37 < a_n = 5 + 4\,(n-1) < 45$ egyenlőtlenség teljesül **(2p)**, ahonnan $9 < n < 11$, így $n = 10$. **(1p)**

A legfelső polcon lévő könyvek száma $a_{10} = a_1 + 9\,d = 5 + 36 = 41$ **(1p)**, így a könyvszekrényben lévő könyvek száma a számtani sorozat első 10 tagjának összege, azaz $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \dfrac{5+41}{2} \cdot 10 = 230$. **(2p)**

2. (7 pont)

$$\left(1 + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{2\,x\,y}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{2\,x}{x^2+2\,x\,y+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2+x(x-y)+y(x+y)-2\,x\,y}{x^2-y^2} : \frac{2\,x}{x^2+2\,x\,y+y^2} =$$

(2p)

$$\frac{x^2-y^2+x^2-x\,y+x\,y+y^2-2\,x\,y}{x^2-y^2} : \frac{2\,x}{x^2+2\,x\,y+y^2} = \frac{2\,x^2-2\,x\,y}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2+2\,x\,y+y^2}{2\,x} = \textbf{(1+1p)}$$

$$\frac{2\,x(x-y)}{(x-y)\,(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{2\,x}\ \textbf{(2 p)}\ = x+y\ \textbf{(1 p)}$$

3. (6 pont) $$\sqrt{\frac{x}{x^{-7}\cdot\sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{-7}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{7}{2}}\cdot x^{\frac{7}{6}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}}\ \textbf{(2 p)}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{21}{6}+\frac{7}{6}+\frac{5}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{9}{6}}}\ \textbf{(2 p)}\ = x^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{9}{6}\right)} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = x^2\ \textbf{(2 p)}$$

Másképp: $$\sqrt{\frac{x}{x^{-7}\cdot\sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt{\frac{x^8}{\sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} = \frac{\sqrt{x^8}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} = \frac{x^4}{x^{\frac{7}{6}}\cdot x^{\frac{5}{6}}} = \frac{x^4}{x^{\frac{12}{6}}} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

4. (6 pont)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\log_{\sqrt{2}} 6} = \left(2^{-1}\right)^{1-\log_{\sqrt{2}} 6} = 2^{-1+\log_{\sqrt{2}} 6} =\ \textbf{(1 p)}$$

$$= 2^{-1}\cdot 2^{\log_{\sqrt{2}} 6} = 2^{-1}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2\log_{\sqrt{2}} 6} = 2^{-1}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 36} = \frac{1}{2}\cdot 36 = 18\ \textbf{(3p)}$$

és

$$3^{\log_9 4} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 4} = 9^{\frac{1}{2}\log_9 4} = 9^{\log_9 4^{1/2}} = 9^{\log_9 2} = 2\ \textbf{(2p)}$$

így a kifejezés értéke $18 + 2 = 20$.

5. (6 pont) Tegyük fel, hogy Áron egyedül x óra alatt, Béla egyedül $2x$ óra alatt festi le a kerítést. Ekkor

Áron és Béla együtt 1 óra alatt a kerítés $\frac{1}{3}$ részét festi le,

Áron 1 óra alatt a kerítés $\frac{1}{x}$-edrészét festi le,

Béla 1 óra alatt a kerítés $\frac{1}{2x}$-edrészét festi le. **(2p)**

Így az időegység alatt elvégzett munka mennyiségére az $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$ egyenlet teljesül **(2p)**, ahonnan $x = \frac{9}{2}$ **(1p)**, így Áron és Béla külön-külön 4,5 és 9 óra alatt festenék le a kerítést **(1p)**.

6. (6 pont)
Teljes négyzetté alakítással

$$f(x) = 10\left(x^2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 10\left(\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} + \frac{1}{10}\right) \;\; \textbf{(2 p)} = 10\left(\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{50}\right) = 10\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} \;\; \textbf{(2p)}$$

Így f-nek minimuma van $x = -\frac{1}{5}$-nél, és a minimum értéke $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$ **(2p)**

7. (6 pont)
Az egyenletnek pontosan akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív, azaz $D < 0$. **(1p)**
$D = (-2p)^2 - 4(p+6)$ **(1 p)** $= 4p^2 - 4p - 24 = 4(p^2 - p - 6)$ **(1p)**
E másodfokú polinom gyökei $p_1 = 3$ és $p_2 = -2$ **(1p)**, így a
$D = 4(p+3)(p-2) < 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-2 < p < 3$. **(2p)**

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 4} \geq 0 \iff \frac{(x-5)(x+1)}{x-4} \geq 0 \;\; \textbf{(1 p)}$$

A számláló előjele: $-1 < x < 5$ esetén negatív, $x < -1$ vagy $x > 5$ esetén pozitív **(2p)**
A nevező előjele: $x < 4$ esetén negatív, $x > 4$ esetén pozitív **(1p)**

Így az egyenlőtlenség megoldása $-1 \leq x < 4$ vagy $x \geq 5$ **(3p)**
(Ha az intervallmok jók, de a végpontok nem, akkor -1 pont.)