1. feladat (3+6=9 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{3^n\,(2n-1)!}$$

a.) $\boxed{3}$ $a_n > 0$ (1) és $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$

Ha $c < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv.

Ha $c > 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div. (2)

($c = 1$: ?-es eset)

b.) $\boxed{6}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n!)^2\ 3^n\ (2n-1)!}{3^{n+1}(2n+1)!((n-1)!)^2} \overset{(2)}{=} \frac{n \cdot n}{3\ (2n+1) \cdot 2n} =$

$= \frac{1}{6}\ \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{6}\ \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{12} < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. (4)

2. feladat (9+11=20 pont)

a) Írja fel a lineáris elsőrendű inhomogén differerenciálegyenlet általános alakját!
y_1 és y_2 megoldja az inhomogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletet!
Mit állíthatunk $y_1 - y_2$ -ről? Állítását bizonyítsa be!

b) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3}{x}\,y = \frac{x^4}{x^2+2}, \qquad x \neq 0$$

a.) $y' + g(x)\,y = f(x)$ (2) (f, g folytonos (α, β)-n)

(T) Ha y_1, y_2 megoldása (I)-nek, akkor $y_1 - y_2$ megoldása a

(H) $y' + g(x)\,y = 0$

homogén differenciálegyenletnek. (2)

(B)

$$(I) \qquad y_1'(x) + g(x)\,y_1(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta),$$

és

$$(I) \qquad y_2'(x) + g(x)\,y_2(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta),$$

akkor a két egyenlet különbségéből kapjuk:

$$y_1'(x) + g(x)\,y_1(x) - (y_2'(x) + g(x)\,y_2(x)) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Tehát:

$$(y_1(x) - y_2(x))' + g(x)\,(y_1(x) - y_2(x)) = 0,$$

5

vagyis a különbség valóban megoldja a homogén egyenletet

b.) lineáris elsőrendű ioh. de-ről van ~~szó~~.

(H): megoldása $y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú.

$$y' - \frac{3}{x}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{3}{x}y \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = 3\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln y = 3\ln x \Rightarrow y = x^3 = \varphi(x)$$

Tehát $y_H = C \cdot x^3$ 4 $\qquad C \in \mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = c(x) \cdot x^3$

$$y_{ip}' = c' \cdot x^3 + c \cdot 3x^2$$

$$c'x^3 + c \cdot 3x^2 - \frac{3}{x}cx^3 = \frac{x^4}{x^2+2} \Rightarrow c' = \frac{x}{x^2+2}$$

$$c = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$$

$$y_{ip} = \frac{x^3}{2}\ln(x^2+2) \quad 5$$

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} \underset{2}{=} Cx^3 + \frac{x^3}{2}\ln(x^2+2)$$

3. feladat (15 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{-4x}, \quad x_0 = 2$

b) $g(x) = x^2\,e^{-5x^2}, \quad x_0 = 0$

c) $h(x) = \dfrac{3}{4 + 8x^2}, \quad x_0 = 0$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \qquad u \in \mathbb{R} \quad 2$$

an2o1006 10/2.

a.) $f(x) = e^{-4(x-2)-8} = e^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4(x-2))^n}{n!} = e^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} (x-2)^n$ (3)

K.T. : $(-\infty, \infty)$ (1)

b.) $g(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n!} x^{2n+2}$ (2) K.T. : $(-\infty, \infty)$ (1)

c.) $h(x) = \frac{3}{4} \frac{1}{1-(-2x^2)} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$ (4)

$|-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ K.T: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2)

4. feladat (12 pont)

Adja meg az m-változós függvény parciális deriváltjának definícióját!

Bizonyítsa be, hogy a parciális derivált létezése szükséges feltétele a totális deriválhatóságnak!

(D) $f'_{x_k}(\underline{a}) = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m)}{h_k}$ (3)

(T) $\underline{a} \in \text{int}\, D_f$

(9)

Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható $\Longrightarrow$ mindegyik változója szerinti parciális deriváltja $\exists$.

(B) Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a totális deriválhatóság definícióját: $\underline{h} := (0, 0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots, 0)$

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = A_k \cdot h_k + \varepsilon_k(\underline{h}) \cdot h_k$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(a_1, \ldots, a_k + h_k, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m)}{h_k} = A_k + \varepsilon_k(\underline{h})$$

és ebből $h_k \to 0$ $(\Longrightarrow \underline{h} \to \underline{0})$ esetén $f'_{x_k}(\underline{a}) = A_k$ adódik.

5. feladat (9 pont)*

Legyen

$$f(x, y) = xy + x^2 - x + y - 2$$

Van-e az f -nek lokális szélsőértéke?

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = y + 2x - 1 = 0 \\ f'_y = x + 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = -1, \; y = 3$$

A $P_1(-1, 3)$ pontban lehet csak lokális szélsőérték. (5)

an20100610/3.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$D(P_1) = -1 < 0 \Rightarrow P_1$-ben sincs lokális szélsőérték (4)

Tehát sehol sincs lok. szé..

6. feladat (10 pont)*

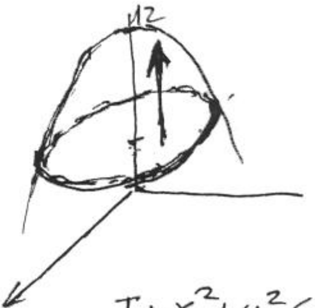
Számítsa ki a

$$z = 12 - (x^2 + y^2) \quad \text{és a} \quad z = 3$$

felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

A $z=3$ síkkal vett metszetgörbe:

$$3 = 12 - (x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 = 3^2$$



$$\text{Térf} = \iint_{x^2+y^2 \le 3^2} \int_{z=3}^{12-(x^2+y^2)} 1 \, dz \, dT = \quad (2)$$

$$= \iint_T z \Big|_3^{12-(x^2+y^2)} dT = \iint_T \underbrace{\left(12-(x^2+y^2)-3\right)}_{9-(x^2+y^2)} dT \quad (1)$$

$T: x^2+y^2 \le 3^2$

polártranszformáció:

$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 3$

$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$|J| = r$

$$\text{Térf.} = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{(9-r^2)\underbrace{r}_{|J|}}_{9r-r^3} \, d\varphi \, dr = (2\pi - 0) \int_0^3 (9r - r^3)\, dr = \quad (4) \quad (1)$$

$$= 2\pi \left(9\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3 = 2\pi\left(\frac{9}{2}\cdot 9 - \frac{3^4}{4} - 0\right) \left(= 2\pi\,\frac{3^4}{4}\right) \quad (2)$$

Hengerkoordinátás transzformációval is dolgozhattunk volna.

7. feladat (16 pont)*

a) Írja fel $u(x,y) + j\,v(x,y)$ alakban a $\operatorname{ch} z$ függvényt!

A Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenletek segítségével vizsgálja meg differenciálhatóság és regularitás szempontjából!

b) Oldja meg a $\operatorname{ch} z = 0$ egyenletet!

a) $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x+jy) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} jy + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} jy =$

$= \operatorname{ch} x \cos y + j \operatorname{sh} x \sin y$

$u(x,y) = \operatorname{ch} x \cdot \cos y$

$v(x,y) = \operatorname{sh} x \cdot \sin y \quad (4)$

u, v mindenütt totálisan deriválható, mert az összes parciális derivált ∃ és folytonos.

C–R: $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$

$u'_x = \operatorname{sh} x \cos y$; $v'_y = \operatorname{sh} x \cos y$ $\quad u'_x \equiv v'_y$

$u'_y = -\operatorname{ch} x \sin y$; $v'_x = \operatorname{ch} x \cdot \sin y$ $\quad u'_y \equiv -v'_x$

Tehát ch z mindenütt deriválható és így mindenütt reguláris. (6)

b.) $\operatorname{ch} z = 0$: $u(x,y) = 0$ és $v(x,y) = 0$

Tehát $\operatorname{ch} x \cos y = 0$ (1)

$\operatorname{sh} x \sin y = 0$ (2)

(1)-ből mivel $\operatorname{ch} x \neq 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

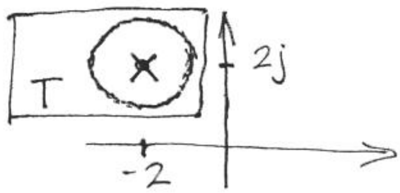
Mivel ekkor $\sin y \neq 0 \xRightarrow{(2)\text{-ből}} \operatorname{sh} x = 0$, tehát $x = 0$

Tehát $\operatorname{ch} z = 0$, ha $z = 0 + j\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (6)

8. feladat (9 pont)*

$$I = \oint_{|z-2j+2|=1} \frac{\ln z}{z-2j+2}\, \mathrm{d}z\,, \qquad \operatorname{Re} I = ?, \quad \operatorname{Im} I = ?$$

$|z-(-2+2j)| = 1$



reg T-n (itt $z \neq 0$)

$$I = \oint_{|z-(-2+2j)|=1} \frac{\ln z}{z-(-2+2j)}\, dz = 2\pi j \ln z \Big|_{z=-2+2j}$$

$$\ln(-2+2j) = \ln|-2+2j| + j \operatorname{arc}(-2+2j) = \ln\sqrt{8} + j\frac{3\pi}{4}$$

$$I = 2\pi j\left(\ln\sqrt{8} + j\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{6\pi^2}{4} + j\, 2\pi \ln\sqrt{8}$$

$\operatorname{Re} I = -3\pi^2$; $\operatorname{Im} I = 2\pi \ln\sqrt{8}$

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

a) $\binom{-1/2}{4} = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

b) Írja fel az

$$f(x) = \sqrt[3]{1-2x^4}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.) $\binom{-1/2}{4} = \dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ (2)

b.) $\left(1+(-2x^4)\right)^{\frac{1}{3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}(-2x^4)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}(-2)^n x^{4n}$ (4) (1)

$|-2x^4| = 2|x|^4 < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow R = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (3)

10. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = e^{y^2}\cos\pi x \qquad P_0(-1,1)$$

a) $\operatorname{grad} f(P_0) = ?$

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel 6\underline{i} - 8\underline{j}$

$f'_x = e^{y^2}(-\sin\pi x)\cdot\pi$ (2) $\qquad f'_y = e^{y^2}\cdot 2y\cos\pi x$ (2)

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = 0\underline{i} - 2e\underline{j}$ (1)

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e}$ (2)

$\underline{v} = 6\underline{i} - 8\underline{j} \Rightarrow |\underline{v}| = \sqrt{36+64} = 10 \Rightarrow \underline{e} = \frac{6}{10}\underline{i} - \frac{8}{10}\underline{j}$ (1)

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (-2e\underline{j})\cdot\left(\frac{3}{5}\underline{i} - \frac{4}{5}\underline{j}\right) = -2e\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}e$ (2)

an2v100610/6.