# 40 megoldott vizsgafeladat

Elektromágneses terekből

Szilágyi Tamás, 2003. június 15.

A dokumentum weben böngészhető HTML változata az alábbi címen érhető el:
`http://www.hszk.bme.hu/~st444/bmevik/emt/emtvizsga/emtvizsga.html`

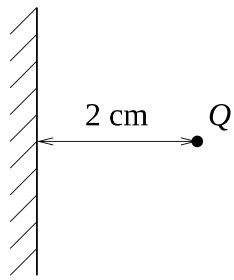
Az alábbiakban az Elektromágneses terek vizsga írásbeli részén eddig előfordult feladatok közül adok közre néhányat, az *általam helyesnek vélt* megoldással együtt. Természetesen semmi garancia nincs arra, hogy a közölt feladatoknak valóban az itt látható a helyes, *evt* által elfogadott, maximális pontszámot érő megoldása!

A feladatok sorrendje: össze-vissza.

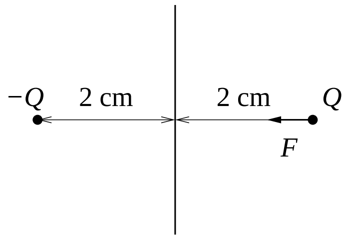
A mű kinyomtatása, másolása, sokszorosítása, reprodukálása, bármilyen adatrögzítő rendszerben való tárolása vagy utánközlése a szerző megkérdezése és kifejezett írásbeli engedélye nélkül, bármikor bárki számára megengedett. *Yo Mama!*

♡

**1. Feladat.** *Az ábra szerint a nagy kiterjedésű fémlap közelébe* $Q = 0.2$ nC *nagyságú pontszerű töltést helyezünk. Mekkora a töltésre ható erő?*




**Megoldás.** A feladatot a helyettesítő töltések módszerével oldjuk meg. A fémlap végtelen kiterjedésű ekvipotenciális sík felület. Ahhoz, hogy ilyen potenciáleloszlást a $Q$ töltés felhasználásával előállítsunk, fel kell venni egy vele átellenes, $-Q$ nagyságú képzeletbeli töltést. E két töltés együttesen olyan teret hoz létre, amelyben a fémlap ekvipotenciális felület. Ezek után az elektrosztatikus teret úgy számíthatjuk, mintha azt az eredeti és képzeletbeli töltések együttesen hozták volna létre:

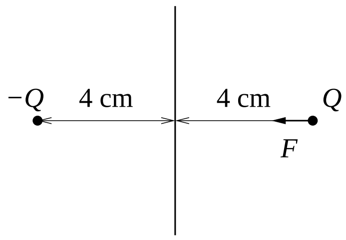


A feladat így két egyforma nagyságú, ellentétes előjelű töltés között fellépő erő meghatározására egyszerűsödik. A $Q$ töltésre ható erő:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(0.2\mathrm{nC})^2}{(4\ \mathrm{cm})^2} \approx 2.24 \cdot 10^{-7}\mathrm{N}$$

**2. Feladat.** *Mekkora erő hat a sík fémlaptól* 4 cm *távolságban lévő,* 1 nC *nagyságú, pontszerű töltésre?*

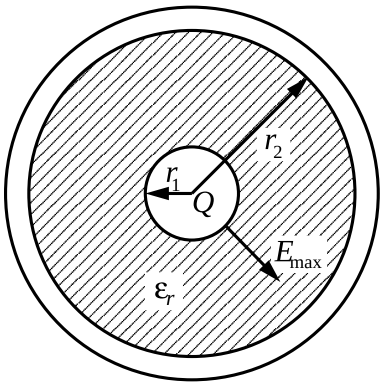
**Megoldás.** Az előző feladat megoldásához teljesen hasonlóan felveszünk egy $-Q$ helyettesítő töltést a fémlap túloldalán:




A $Q$ töltésre ható erő:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(1\mathrm{nC})^2}{(8\ \mathrm{cm})^2} \approx 1.4 \cdot 10^{-6}\mathrm{N}$$

**3. Feladat.** *Mekkora a gömbkondenzátorra kapcsolható maximális feszültség, ha a dielektrikumra* $E_{max} = 120$ *kV/cm? (*$r_1 = 2$ cm*,* $r_2 = 5$ cm*,* $\varepsilon_r = 2$*)*




**Megoldás.** A gömbkondenzátorra kapcsolható maximális feszültséget a dielektrikum $E_{max}$ átütési szilárdsága határozza meg. A dielektrikumban az elektromos térerősség nem állandó nagyságú, hanem a Gauss-tételből következően a középponttól mért távolság négyzetével fordított arányban csökken. Ezért a kondenzátort adott feszültségre feltöltve, a legnagyobb térerősség a belső fegyverzet felületén lép fel. A megengedhető legnagyobb feszültséget tehát úgy kell méretezni, hogy az ehhez tartozó térerősség a belső felületen éppen $E_{max}$ legyen.

A helyettesítő töltések elve alapján úgy számolhatunk, mintha a dielektrikumban fellépő térerősség a gömb középpontjában levő $Q$ (a valóságban nem létező) töltés eredménye lenne. Számítsuk ki, hogy mekkora töltést kellene a középpontba helyeznünk ahhoz, hogy a belső gömb felületén a térerősség $E_{max}$ legyen!

A ponttöltés terére vonatkozó összefüggést felhasználva:

$$E_{max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

ahonnan a „fiktív” töltés nagysága

$$Q = 1.068 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

A kérdés most már csak az, hogy egy ekkora töltés középpontba helyezésével mekkora lesz a feszültség a két fegyverzet között. Ezt a fegyverzetek közötti potenciálkülönbség kiszámításával kapjuk meg. A középponttól $r_1 < r < r_2$ távolságra a térerősség nagysága

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

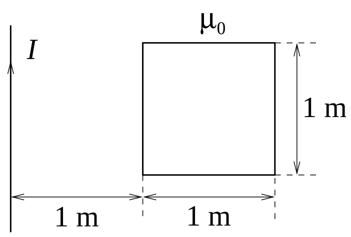
a potenciál pedig

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r}$$

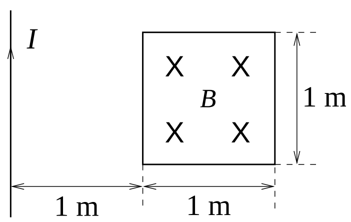
A fegyverzetek között megengedhető legnagyobb feszültség ezek után

$$U_{max} = \phi(r_1) - \phi(r_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = 144\ \mathrm{kV}$$

**4. Feladat.** *Négyzet alakú vezető hurok síkjában lévő hosszú, egyenes vezető árama* $I = 300$ A. *Számítsa ki a vezető keret fluxusát!*




**Megoldás.** Az egyenes vezetőben folyó áram mágneses teret hoz létre, amelynek iránya a jobbcsavarszabállyal határozható meg. A vezető keret felületére az indukcióvektorok éppen merőlegesek lesznek, az alábbi ábra szerint.




A Gauss-féle gerjesztési törvényből következik, hogy a vezetőtől $r$ távolságban a mágneses indukció nagysága

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r\pi}$$

Az indukció ismeretében a fluxus a

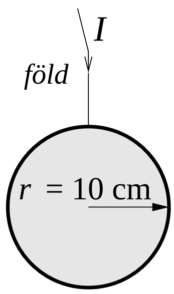
$$\phi = \int_A B \, \mathrm{d}A$$

összefüggésből határozható meg. Szerencsére a merőlegesség miatt a vektorok skaláris szorzata helyett elég a nagyságukat összeszorozni. A mágneses indukció nagysága csak az egyenes vezetőtől mért távolságtól függ, így az integrálás során egy 1 m hosszú „függőleges” vonalat érdemes felületelemnek választani, mivel e mentén $B$ értéke állandó.

Az előbbiek szerint a négyzet alakú keret fluxusa

$$\phi = \int_{r=1}^{2} \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot 1 \cdot \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \int_{r=1}^{2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot [\ln r]_1^2 = 4.16 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

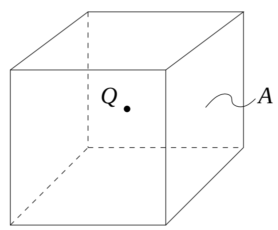
**5. Feladat.** *Mélyen a földbe helyezett,* $r = 10$ cm *sugarú fémgömbbe* $I = 600$ A *áramot vezetünk. Mekkora a fémgömb potenciálja? (*$\sigma_f = 0.2 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$*)*




**Megoldás.** A stacionárius térbeli áramlásra vonatkozó összefüggés szerint a fémgömb potenciálja:

$$U = \frac{I}{4\pi \cdot \sigma_f} \cdot \frac{1}{r} = 2387.3 \text{ V}$$

**6. Feladat.** *Egy 1 m élhosszúságú kocka középpontjába* $Q = 2$ nC *nagyságú ponttöltést helyezünk. Határozzuk meg az eltolási vektornak a kocka egy lapjára vett integrálját!*




**Megoldás.** A IV. Maxwell-egyenlet integrális alakja szerint:

$$\int_A D \, \mathrm{d}A = \int_V \rho \, \mathrm{d}V$$

A felületnek válasszuk a kocka teljes felszínét, a térfogatnak a kocka belsejét. A jobb oldali térfogati integrál értéke

$$\int_V \rho \, \mathrm{d}V = Q$$

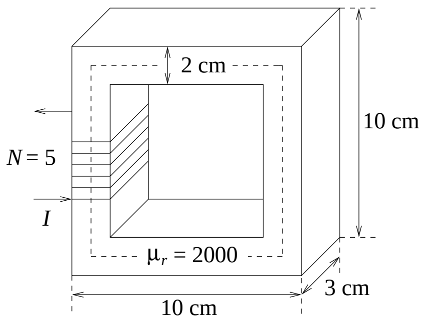
tehát a kocka teljes felületére

$$\int_A D\,\mathrm{d}A = Q$$

Az elrendezés szimmetriája miatt az eltolásvektor felületi integrálja a kocka minden lapjára egyforma értéket ad, így a kocka egy lapjára

$$\int_{A/6} D\,\mathrm{d}A = \frac{Q}{6} = 0.333\ \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$$

**7. Feladat.** *Határozza meg az indukció értékét a vasban az alábbi elrendezés szerint, ha $I = 5$ A! (A vasmag keresztmetszete állandó.)*




**Megoldás.** A vasmag középvonala az ábra alapján $4 \cdot 8$ cm. Így a gerjesztési törvény szerint

$$N \cdot I = 0.32 \cdot H$$

ahonnan

$$H = \frac{N \cdot I}{0.32}$$

a vasban fellépő mágneses indukció pedig

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{0.32} = 0.196\ \mathrm{T}$$

**8. Feladat.** *Határozza meg az energiasűrűséget levegőben, ha $E = 500$ V/cm, $H = 1000$ A/m.*

**Megoldás.** Az elektromágneses tér energiasűrűségének kifejezése

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2\right)$$

Mivel a közeg levegő, $\varepsilon = \varepsilon_0$ és $\mu = \mu_0$. Behelyettesítve:

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \cdot 50000^2 + \mu_0 \cdot 1000^2\right) = 0.64\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

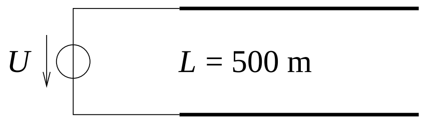
**9. Feladat.** *Egy ideális légvezetéket $Z_2 = 120\ \Omega$ ellenállással zárunk le. A mért állóhullámarány: $\sigma = 1$. Mekkora a távvezeték hullámimpedanciája?*

**Megoldás.** Az állóhullámarány és a reflexiótényező kapcsolata:

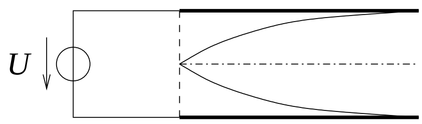
$$\sigma = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$

Ismerve az állóhullámarányt, meg tudjuk határozni a reflexiótényezőt. Esetünkben $r = 0$ adódik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a távvezeték a hullámimpedanciájával van lezárva, ellenkező esetben a reflexiótényező 0-tól különböző lenne (a távvezeték végén reflexió lépne fel). Az előzőek alapján a távvezeték hullámimpedanciája $Z_0 = Z_2 = 120\ \Omega$.

**10. Feladat.** *Mekkora az ábrán látható üresen járó légvezeték legkisebb rezonáns frekvenciája?*




**Megoldás.** Az üresen járó (végtelen impedanciával lezárt) távvezeték forrás felőli végén az áramnak duzzadóhelye, a feszültségnek csomópontja van. A szakadás felőli végen a feszültségnek van duzzadóhelye és az áramnak csomópontja (hiszen a szakadáson keresztül nem folyhat áram, így az áram időtől függetlenül nulla a távvezeték végén). A feszültségeloszlás a távvezeték hosszában:




A legkisebb rezonáns frekvenciához tartozó maximális hullámhossz tehát a távvezeték hosszának negyede:

$$L = \frac{\Lambda_{max}}{4}$$

ahonnan

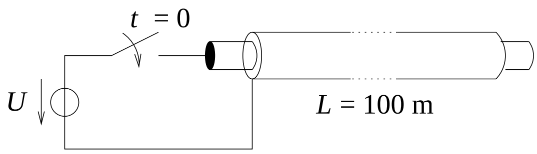
$$\Lambda_{max} = 2000 \text{ m}$$

A legkisebb rezonáns frekvencia:

$$f_{min} = \frac{c}{\Lambda_{max}} = 150 \text{ kHz}$$

A távvezetéket egyéb adat hiányában ideálisnak tételeztük fel, így terjedési sebességként a fény vákuumbeli sebességével számoltunk.

**11. Feladat.** *Üresen járó koaxiális kábel bemenetére a* $t = 0$ *pillanatban* $U = 1$ kV *egyenfeszültséget kapcsolunk. Mekora lesz a kábelvonal közepén a köpeny és az ér között mérhető feszültség* $t = 2$ μs *idő múlva? A szigetelésre:* $\varepsilon_r = 9$, $\mu_r = 1$.



**Megoldás.** A távvezeték végén a feszültséghullámra vonatkozó reflexiótényező a $Z$ lezáró impedanciával

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

alakban fejezhető ki, ahol $Z_0$ a távvezeték hullámimpedanciája. A forrás felől a lezárás impedanciája $0\ \Omega$ (a forrást deaktiválva), a reflexiótényező így $r_1 = -1$. A szakadásnál nyilván $\infty\ \Omega$ az impedancia, így a reflexiótényező itt $r_2 = 1$.

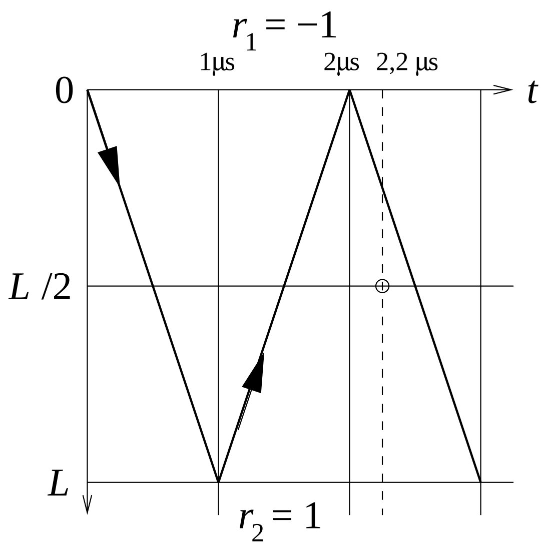
A feszültséghullámok terjedésének szemléltetéséhez készítünk egy menetdiagramot, ehhez azonban ismernünk kell a futásidőt. A távvezetéken a feszültség- és áramhullámok terjedési sebessége

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

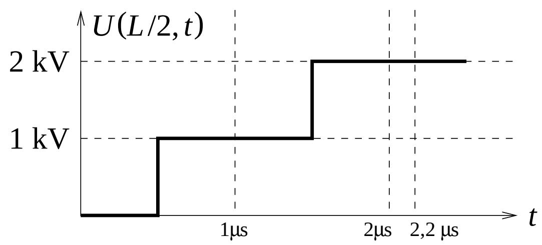
amelynek felhasználásával a futásidő

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{L}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} = 1\ \mu\text{s}$$

Most már megszerkeszthetjük a menetdiagramot, amit a következő ábra szemléltet:

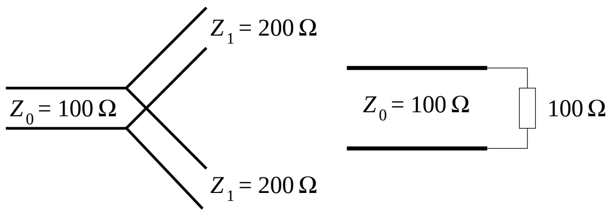



A kérdéses időpontig egy visszaverődés történik a szakadással lezárt végről; a forrás oldaláról visszavert hullám már csak a vizsgált időpont után éri el a távvezeték közepét. A menetdiagramról leolvasható, hogy mi a feszültség időfüggvénye a távvezeték hosszának a felénél:




A kérdéses időpontban a távvezeték felénél $U = 2$ kV a feszültség.

**12. Feladat.** *Egy* 10 km *hosszú,* $Z_0 = 100\ \Omega$ *hullámellenállású távvezetékre a* $t = 0$ *időpillanatban* 400 kV *egyenfeszültséget kapcsolunk. Adja meg a vezeték áramának időfüggvényét a betáplálástól mért* 6 km *távolságban, ha a távvezeték terhelése két párhuzamosan kapcsolt* $Z_1 = 200\ \Omega$ *hullámellenállású távvezeték.*




**Megoldás.** Ideális távvezetékekről lévén szó, a bekapcsolási tranziens fénysebességgel terjed a vezetékek mentén. Amikor a 100 Ω-os távvezetéken végigér a forrásból induló feszültséghullám, a vezetékek csatlakozási pontjánál járva a hullám „nem látja”, hogy a további távvezetékek milyen hosszúak és mivel vannak lezárva. A feszültséghullám a 200 Ω-os távvezetékeknek a hullámellenállásait látja, amelyek egymással párhuzamosan kapcsolódva éppen 100 Ω-mal, tehát a forráshoz csatlakozó távvezeték hullámellenállásával zárják le azt (a jobb oldali ábra szerint). Így a távvezetékek csatlakozási pontjánál nem keletkezik a forrás irányába visszavert hullám.

Ezen meggondolások alapján (az előző feladat megoldásánál közölt gondolatmenethez hasonlóan):

$$i(6\ \mathrm{km}, t) = \frac{400\ \mathrm{kV}}{100\ \Omega} \cdot \varepsilon\left(t - \frac{6\ \mathrm{km}}{c}\right)\ \mathrm{A} = 4 \cdot \varepsilon(t - 20\ \mu\mathrm{s})\ \mathrm{kA}$$

**13. Feladat.** *Egy távvezetéken üresjáráskor* $Z_1 = -j25\ \Omega$, *rövidzáráskor* $Z_2 = j100\ \Omega$ *bemeneti impedanciát mértek. Mekkora a távvezeték hullámimpedanciája?*

**Megoldás.** A $Z_0$ hullámimpedanciájú távvezeték bemeneti impedanciája

$$Z_{be} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 + jZ_0 \cdot \tan\beta l}{Z_0 + jZ_2 \cdot \tan\beta l}$$

ahol $Z_2$ a lezárás impedanciája, $l$ a távvezeték hossza, $\beta$ pedig a távvezetéken terjedő hullámok fázistényezője.

Az üresjárás esetén $Z_2 = \infty$, így

$$-j25 = Z_0 \cdot \frac{\infty + jZ_0 \cdot \tan\beta l}{Z_0 + j\infty \cdot \tan\beta l}$$

amiből

$$-j25 = Z_0 \cdot \frac{1}{j\tan\beta l} \qquad (*)$$

A rövidzár esetén $Z_2 = 0$, így

$$j100 = Z_0 \cdot \frac{0 + jZ_0 \cdot \tan\beta l}{Z_0 + j0 \cdot \tan\beta l}$$

amiből

$$j100 = jZ_0 \cdot \tan\beta l \qquad (**)$$

A $(*)$ és $(**)$ összefüggések egy kétismeretlenes egyenletrendszert alkotnak $Z_0$-ra és $\tan\beta l$-re. $\tan\beta l$-t kiküszöbölve kapjuk, hogy $Z_0 = 50\ \Omega$.

**14. Feladat.** *Egy távvezetéken üresjáráskor $Z_{sz} = -j30\ \Omega$, rövidzáráskor $Z_{rz} = j30\ \Omega$ bemeneti impedanciát mértek. Mekkora a távvezeték hullámimpedanciája?*

**Megoldás.** Az előző feladat megoldásával teljesen azonos módon járunk el.

Az üresjárás esetén $Z_2 = \infty$, így

$$Z_{sz} = -j30 = Z_0 \cdot \frac{\infty + jZ_0 \cdot \tan\beta l}{Z_0 + j\infty \cdot \tan\beta l}$$

amiből

$$-j30 \cdot j\tan\beta l = Z_0 \qquad (*)$$

A rövidzár esetén $Z_2 = 0$, így

$$Z_{rz} = j30 = Z_0 \cdot \frac{0 + jZ_0 \cdot \tan\beta l}{Z_0 + j0 \cdot \tan\beta l}$$

amiből

$$j30 = jZ_0 \cdot \tan\beta l \qquad (**)$$

A $(*)$ és $(**)$ összefüggések egy kétismeretlenes egyenletrendszert alkotnak $Z_0$-ra és $\tan\beta l$-re. $\tan\beta l$-t kiküszöbölve kapjuk, hogy $Z_0 = 30\ \Omega$.

**15. Feladat.** *Levegőben terjedő síkhullám mágneses térerőssége $H = 5 \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot e_x \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$. Határozza meg az elektromos térerősség vektorát, ha a hullám a z-tengely irányában terjed!*

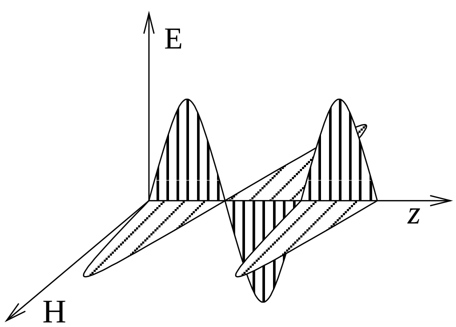
**Megoldás.** Az elektromos és mágneses térerősség hányadosa a közeg hullámimpedanciájával egyezik meg:

$$\frac{E}{H} = Z_0$$

Esetünkben a közeg levegő, így

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120 \cdot \pi \approx 377\ \Omega$$

Az elektromos térerősség iránya olyan, hogy az elektromos térerősség vektora, a mágneses térerősség vektora és a terjedési irány (ebben a sorrendben) jobbrendszert alkotnak. Egy ilyen hullámot szemléltet az alábbi ábra:



A mágneses térerősség vektor $x$ irányú, a terjedés $z$ irányú. Ebből következik, hogy az elektromos térerősség vektora esetünkben $-y$ irányú.

Ezek alapján az elektromos térerősség:

$$E = 377 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot e_y = -1885 \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot e_y \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

**16. Feladat.** *Levegőben a z-irányban terjedő síkhullám mágneses térerőssége:* $H = 5 \cdot [\cos(\omega t) \cdot e_x + \sin(\omega t) \cdot e_y]$ $\mu$A/m. *Határozza meg az elektromos térerősség vektorát!*

**Megoldás.** A megoldás elvét lásd az előző feladat megoldásánál. Az ott leírtak szerint most a $H$ $x$-irányú komponenséhez $E$-nek egy $-y$ irányú komponense, $H$ $y$-irányú komponenséhez $E$ $x$-irányú komponense tartozik. Az egyes pároknál fennáll, hogy az amplitúdók aránya a közeg hullámimpedanciája (ami megegyezik az előző megoldásban kiszámolt értékkel).

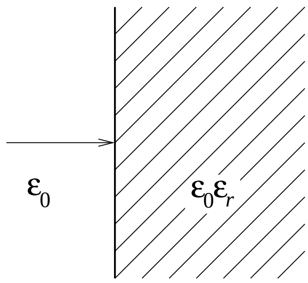
Így az elektromos térerősség vektora a következő alakú (a szögletes zárójelbeli tagok sorrendben megfelelnek a $H$ kifejezésében szereplő megfelelő tagoknak):

$$E = Z_0 \cdot 5 \cdot [\cos(\omega t) \cdot (-e_y) + \sin(\omega t) \cdot e_x] \ \mu\mathrm{V/m}$$

amit szebb alakba írva:

$$E = 1885 \cdot [\sin(\omega t) \cdot e_x - \cos(\omega t) \cdot e_y] \ \mu\mathrm{V/m}$$

**17. Feladat.** *Levegőből érkező síkhullám dielektrikumon* $r = -0.5$ *visszaverődési tényezővel reflektálódik. Mekkora a dielektrikum törésmutatója?*




**Megoldás.** Legyen a baloldali közeg (levegő) hullámimpedanciája $Z_{01}$, a jobboldali közegé $Z_{02}$. A balról jobbra terjedő hullám a határfelületen

$$r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

visszaverődési tényezővel reflektálódik. A reflexiós tényező ismert, így az előző összefüggésbe $r$-et behelyettesítve és átrendezve:

$$Z_{02} = \frac{1}{3} \cdot Z_{01}$$

Felhasználva, hogy a levegő hullámimpedanciája

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

a jobboldali, $\varepsilon_r$ relatív permittivitású közegé pedig

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}}$$

a hullámimpedanciák arányára vonatkozó előbbi eredményünk az alábbi formába írható:

$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{3}$$

Mivel a törésmutatót

$$n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

alakban definiáljuk, az előbb épp ezt kaptuk meg. A jobboldali dielektrikum törésmutatója tehát $n = \frac{1}{3}$.

**18. Feladat.** *Egy közegben* $\varepsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$. *Mekkora itt az* $f = 10^6$ Hz *frekvenciájú síkhullám terjedési együtthatója?*

**Megoldás.** A síkhullámokra vonatkozó terjedési együttható kifejezése

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

amely esetünkben a következő alakú:

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot j2\pi \cdot f \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r} = j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \sqrt{3}$$

A megadott adatokat behelyettesítve $\gamma = j \cdot 0.0363\ \frac{1}{\mathrm{m}}$ adódik. Ez tiszta képzetes, a csillapítási tényező tehát 0 (ami onnan is következik, hogy $\sigma = 0$ tehát a közeg ideális szigetelő), a fázistényező pedig $0.0363\ \frac{1}{\mathrm{m}}$.

**19. Feladat.** *Egy közegben* $\varepsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0.1$ S/m. *Mekkora itt az* $f = 10^6$ Hz *frekvenciájú síkhullám terjedési együtthatója?*

**Megoldás.** Az előző feladat megoldásával megegyező módon számolva a terjedési együttható:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{0.789 \cdot e^{j90^o}} = 0.888 \cdot e^{j45^o}\ \frac{1}{\mathrm{m}}$$

**20. Feladat.** *Egy csőtápvonal méretei:* $a = 2$ cm, $b = 1.5$ cm. *Mekkora a* $\mathrm{TE}_{10}$ *módus határfrekvenciája? (*$\varepsilon_r = 1$*)*

**Megoldás.** A $\mathrm{TE}_{\mathrm{mn}}$ módus határhullámhossza

$$\lambda_h = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Behelyettesítve az $m = 1$, $n = 0$, $a = 0.02$ m, $b = 0.015$ m értékeket, a határhullámhosszra $\lambda_h = 4$ cm adódik. A határfrekvencia:

$$f_h = \frac{c}{\lambda_h} = 7.5 \cdot 10^9\ \mathrm{Hz} = 7.5\ \mathrm{GHz}$$

Ne felejtsük el, hogy a csőtápvonalnak alsó határfrekvenciája van, tehát a kiszámolt frekvenciánál *kisebb* frekvenciájú hullámok nem tudnak terjedni a csőben.

**21. Feladat.** *Egy csőtápvonal méretei:* $a = 3$ cm, $b = 5$ cm. *A kitöltő anyagra:* $\varepsilon_r = 3.2$. *Mekkora a* $TM_{11}$ *módus határfrekvenciája?*

**Megoldás.** A TM módusok határhullámhosszát a TE módusokra vonatkozó, előző megoldásban felhasznált képlettel azonosan számíthatjuk. A határhullámhosszra így $\lambda_h = 0.092$ m adódik. A határfrekvencia:

$$f_h = \frac{c}{\lambda_h} = 3.26 \text{ GHz}$$

**22. Feladat.** *Mekkora az* $a = 2$ cm *oldalú négyzet keresztmetszetű csőtápvonalban terjedő hullámnak a csőben mérhető hullámhossza, ha* $TE_{10}$ *módusban üzemel, és a hullám szabadtéri hullámhossza* $\lambda = 8$ cm, *az anyag relatív permittivitása pedig* $\varepsilon_r = 16$?

**Megoldás.** Tekintsük a csőtápvonalra vonatkozó diszperziós összefüggést:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \varepsilon_r - \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2$$

Az ismert számadatokat behelyettesítve:

$$16 \cdot \left(\frac{2\pi}{0.08}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{0.02}\right)^2$$

Ebből

$$\frac{2\pi}{\Lambda} = 272.07$$

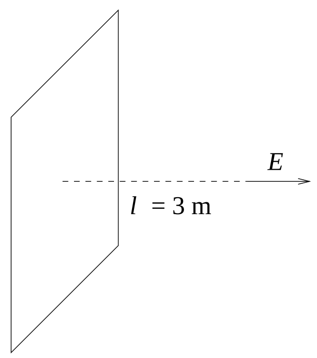
ahonnan

$$\Lambda = 2.3 \text{ cm}$$

**23. Feladat.** *A végtelennek tekinthető ideális vezető sík felületi töltéssűrűsége* $\sigma = 10^{-10}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$. *Számítsa ki a térerősség nagyságát a síktól* 3 m *távolságban!* ($\varepsilon = \varepsilon_0$)

**Megoldás.** Induljunk ki a IV. Maxwell-egyenletből:

$$\int_A D \, \mathrm{d}A = \int_V \rho \, \mathrm{d}V$$



Képzeletben vegyük körül a síkot egy végtelen zárt felülettel. Tekintsük a sík egységnyi felületű részét (ábra)! A síkot körülvevő képzeletbeli zárt felületből ennek mindkét oldalára egy-egy egységnyi felületű rész jut. Az ezek által „körülzárt” töltés a fémsík egységnyi felületén levő töltés mennyisége, amelynek számértéke éppen a felületi töltéssűrűséggel egyezik meg. Írhatjuk tehát, hogy

$$\varepsilon_0 \cdot E \cdot 2 = \sigma$$

ahonnan a térerősség

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 5.65\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Figyelemreméltó tény, hogy ez az érték nem függ a fémlaptól mért távolságtól.

**24. Feladat.** *Határozza meg az 1. elektróda potenciálját, ha* $Q_1 = 0$, $U_2 = 10$ kV, $C_{10} = 2$ nF, $C_{20} = 2$ nF *és* $C_{12} = 10$ nF.

**Megoldás.** Három elektródánk van, az 1-es, a 2-es és a (0-ás indexű) föld. A részkapacitások és az elektródák közötti potenciálkülönbségek segítségével kifejezhető az egyes elektródák töltése. Az 1-es elektróda töltése például a következő alakban számolható:

$$Q_1 = C_{12} \cdot (U_1 - U_2) + C_{10} \cdot U_1$$

Mivel az 1-es elektróda töltése a feladat szerint zérus, az egyenlet a következő alakban írható:

$$0 = C_{12} \cdot U_1 - C_{12} \cdot U_2 + C_{10} \cdot U_1$$

Ebből kifejezve az első elektróda potenciálját (földhöz viszonyított feszültségét):

$$U_1 = \frac{C_{12} \cdot U_2}{C_{12} + C_{10}} = 8.33\ \mathrm{kV}$$

**25. Feladat.** *Két,* $r_0 = 1$ cm *sugarú,* $Q_1 = 3$ nC *ill.* $Q_2 = -3$ nC *töltésű gömbelektróda egymástól* $d = 20$ cm *távolságra helyezkedik el levegőben. Számítsa ki e töltésrendszer elektrosztatikus energiáját!*

**Megoldás.** Az egyes gömbelektródák geometriai középpontjában a potenciált a következő módon számítjuk ki:

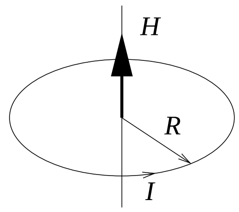
$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d} = 2561.5\ \mathrm{V} \\
\phi_2 &= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d} = -2561.5\ \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Az elrendezés elektrosztatikus energiája:

$$W = \frac{1}{2} \cdot (\phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2) = 7684.4\ \mathrm{J}$$

**26. Feladat.** *Mekkora I áram hozza létre az* $R = 5$ cm *sugarú körvezető középpontjában a* $H = 10^3\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ *mágneses térerősséget?*

**Megoldás.** A körvezető által keltett mágneses teret az ábra szemlélteti.




A gerjesztési törvény szerint

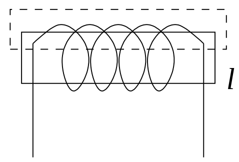
$$H \cdot l = I$$

ahonnan a szükséges áramerősség

$$I = H \cdot 2\pi \cdot R = 314.2 \text{ A}$$

**27. Feladat.** *Egy* $N = 50$ *menetű szolenoid tekercsben* 0.1 A *áram folyik. Határozza meg az* $\int_l H \, \mathrm{d}l$ *vonalintegrál értékét arra a zárt görbére, amely a tekercs tengelye mentén megy át a tekercs belsején, és kívül záródik!*

**Megoldás.** A következő ábrán szaggatott vonal jelöli az integrálási görbét.




Az első Maxwell-egyenlet integrális alakja szerint

$$\oint_l H \, \mathrm{d}l = \int_A j \, \mathrm{d}A$$

A görbe által kifeszített felületet a vezető N-szer döfi, így

$$\int_A j \, \mathrm{d}A = N \cdot I = 5 \text{ A}$$

amely egyben a feladat megoldását is adja.

**28. Feladat.** *Egy távvezeték paraméterei* $f = 800$ Hz *frekvencián:* $Z_0 = 568 \cdot e^{-j7.5^o}$ $\Omega$, $\gamma = 17.7 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j81.2^o} \frac{1}{\text{km}}$. *Számítsa ki a vezeték* 1 km *hosszúságú szakaszának induktivitását!*

**Megoldás.** A távvezeték nem ideális, mert $Z_0$ nem valós. Feltesszük, hogy $R' = 0$. (Hogy miért? Ez egy elég ésszerű feltevés, másrészt enélkül a feladat nemigen oldható meg...) A hullámimpedancia így

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

alakban írható, amelynek a valós része

$$\sqrt{\frac{L'}{C'}} = 568 \cdot \cos(-7.5^o) = 563.1 \ \Omega$$

vagyis

$$\frac{L'}{C'} = 317126.7 \qquad (*)$$

A terjedési tényezőre $R' = 0$ esetén

$$\gamma^2 = j\omega L' \cdot (G' + j\omega C')$$

teljesül, amelynek képzetes része

$$\omega^2 L'C' = 9.473 \cdot 10^{-11}$$

melyből

$$L'C' = 3.749 \cdot 10^{-18} \qquad (**)$$

Az (*) és (**) összefüggések szorzatából négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy

$$L' = 1.09 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = 1.09 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{km}}$$

**29. Feladat.** *Mekkora az* $f = 50$ Hz*-en üzemelő távvezeték hullámimpedanciája, ha a terjedési együtthatója* $\gamma = 0.023 \cdot e^{j85^o}\ \frac{1}{\mathrm{km}}$*, soros veszteségi ellenállása* $R' = 0.879\ \frac{\Omega}{\mathrm{m}}$*, hosszegységre eső induktivitása* $L' = 15.9\ \frac{\mathrm{mH}}{\mathrm{m}}$*?*

**Megoldás.** A távvezeték terjedési együtthatója

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

hullámimpedanciája

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

A $\sqrt{R' + j\omega L'}$ mennyiség kiszámolásához minden adatot ($R'$, $L'$, $\omega = 2\pi \cdot f$) ismerünk:

$$\sqrt{R' + j\omega L'} = 2.252 \cdot e^{j40^o}$$

Ezután a $\sqrt{G' + j\omega C'}$ mennyiséget is könnyen meghatározhatjuk:

$$\sqrt{G' + j\omega C'} = \frac{\gamma}{\sqrt{R' + j\omega L'}} = 0.0102 \cdot e^{j45^o}$$

E két mennyiség hányadosa pedig a keresett hullámimpedanciát adja:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \frac{\sqrt{R' + j\omega L'}}{\sqrt{G' + j\omega C'}} = 220.5 \cdot e^{-j5^o}\ \Omega$$

**30. Feladat.** *Egy* $Z_0 = 600\ \Omega$ *hullámellenállású veszteségmentes légvezeték* $Z_2 = 300\ \Omega$ *lezárásán a szinuszos feszültség amplitúdója* $U_2 = 120$ V*. Számítsa ki a vezeték mentén fellépő legnagyobb és legkisebb feszültség amplitúdó értékét!*

**Megoldás.** A vezeték végén a reflexiótényező

$$r(0) = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{-300}{900} = -0.333$$

Mivel ez valós, a vezeték végén a maximális feszültség lép fel. Tehát $U_{max} = U_2 = 120$ V.

Az állóhullámarány:

$$\sigma = \frac{1 + |r(0)|}{1 - |r(0)|} = \frac{1.333}{0.666} = 2$$

Ez megadja a maximális és minimális feszültségamplitúdó arányát, így $U_{min} = \frac{U_{max}}{\sigma} = 60$ V.

**31. Feladat.** *Egy $l = 10$ cm hosszúságú Hertz-dipólus $f = 100$ MHz frekvencián $P = 100$ W teljesítményt sugároz ki. Mekkora az antenna áramának $I_{eff}$ effektív értéke?*

**Megoldás.** A Hertz-dipólus által kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{1}{2} R_s \cdot I^2 = R_s \cdot I_{eff}^2$$

ahol

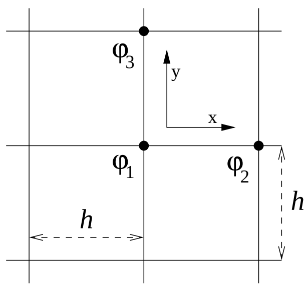
$$R_s = 80 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

az antenna sugárzási ellenállása (az a fiktív ellenállás, ami adott nagyságú áram esetén ugyanannyi teljesítményt disszipál, amekkorát az antenna elsugároz).

A hullámhossz $\lambda = \frac{c}{f} = 3$ m, így a sugárzási ellenállás esetünkben $R_s = 0.877\ \Omega$. Az adott teljesítmény eléréséhez szükséges áram

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{P}{R_s}} = 10.68 \text{ A}$$

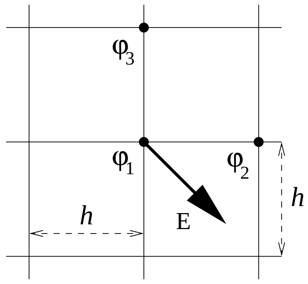
**32. Feladat.** *Elektrosztatikus térben a jelölt rácspontok potenciáljai:* $\phi_1 = 3$ kV, $\phi_2 = 1$ kV, $\phi_3 = 5$ kV. *A rácstávolság:* $h = 2$ cm. *Határozza meg közelítőleg az elektromos térerősség nagyságát a $\phi_1$ potenciálú pontban, és rajzolja be az irányát!*




**Megoldás.** A $\phi_1$ és $\phi_2$ közötti potenciálkülönbséggel a potenciál $x$ irányú gradiensét, a $\phi_1$ és $\phi_3$ különbségével az $y$ irányú potenciálgradienst tudjuk becsülni. Az ábrára berajzolt $x$ és $y$ irányok mellett:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_2 - \phi_1}{h}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx \frac{\phi_3 - \phi_1}{h}$$

Az elektromos térerősség $E = -\text{grad}\,\phi$ szerint adódik: $E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$. Mindezek alapján a térerősség nagysága $E = \sqrt{2} = 1.41\ \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$, irányát az alábbi ábra mutatja:




**33. Feladat.** *Mekkora a mélyen a földbe helyezett,* $r_0 = 10$ cm *sugarú fémgömb* $R_f$ *földelési ellenállása? (A föld vezetőképessége:* $\sigma_f = 0.015\ \frac{\text{S}}{\text{m}}$*.)*

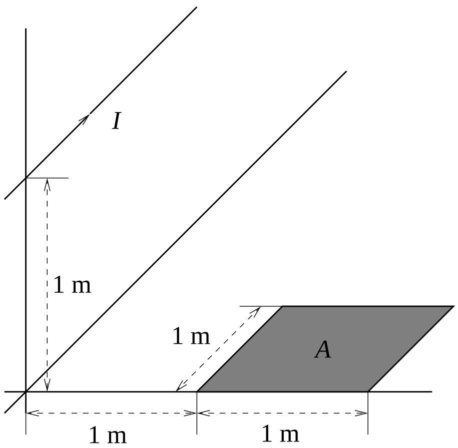
**Megoldás.** A stacionárius térbeli áramlásra vonatkozó összefüggés szerint:

$$\phi = R_f \cdot I = \frac{I}{4\pi \cdot \sigma_f \cdot r_0}$$

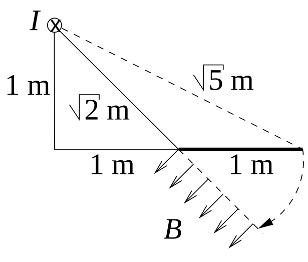
Ebből a földelési ellenállás:

$$R_f = \frac{1}{4\pi \cdot \sigma_f \cdot r_0} = 53.1\ \Omega$$

**34. Feladat.** *Mekkora az ábra szerint az* $I = 300$ A *vonaláram közelében elhelyezkedő* 1 m *oldalú, négyzet alakú A felület fluxusa?*




**Megoldás.** A következő metszeti rajz mutatja a geometriai viszonyokat:



A vastagított vonal az $A$ felület vetülete. Ennek a fluxusa nem változik, ha az ábra szerint ezt a felületet az $I$ áram irányával párhuzamos éle mentén elfordítjuk úgy, hogy az sugárirányú legyen. (Az új, szaggatott vonallal rajzolt helyzetben berajzoltuk a $B$-vektorokat.)

A mágneses indukció nagysága az $I$ áramtól $r$ távolságra

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

amelynek felületi integráljaként kapjuk a felület fluxusát:

$$\phi = \int_A B \, \mathrm{d}A$$

Elemi felületnek az 1 m hosszú, $I$-vel párhuzamos vonalat választva látható, hogy az $I$-től való távolság szerint $\sqrt{2}$-től $\sqrt{5}$-ig kell az integrálást elvégezni:

$$\phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot [\ln r]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 2.75 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

**35. Feladat.** *Egy* 250 m *hosszú, a végén hullámellenállással lezárt,* $Z_0 = 60\ \Omega$ *hullámellenállású ideális légvezeték bemenetére a* $t = 0$ *pillanatban* 120 V *egyenfeszültséget kapcsolunk. Adja meg az áram időfüggvényét a bemenettől* 50 m *távolságra!*

**Megoldás.** Mivel a távvezeték a hullámimpedanciájával van lezárva, a végén nem lép fel reflexió, amiből az is következik, hogy a feszültség- és áramhullámok csak egy irányban, a feszültségforrástól a lezáró ellenállás irányába terjednek. Ezek továbbá egymással fázisban vannak, amplitúdójuk hányadosa minden időpillanatban és a vezeték mentén mindenhol a hullámellenállás.

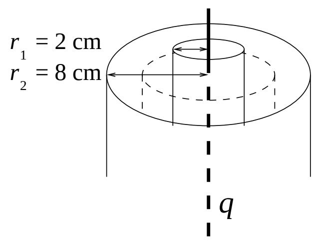
A vezeték ideális, tehát a feszültség- és áramhullámok vezetékmenti terjedési sebessége megegyezik a fény vákuumbeli sebességével. A feszültség bekapcsolásakor egy 120 V nagyságú feszültséghullám indul el a távvezeték forrás felőli végétől. Amikor eléri a vezeték végét, a feszültség a vezeték mentén mindenhol 120 V, és mivel a lezáráson reflexió nem lép fel, ez az állapot a továbbiakban fennmarad. Az ehhez tartozó áram $i = \frac{120}{60} = 2$ A.

A forrástól 50 m távolságra lévő pontba a $t = 0$ pillanatban induló hullám a $t = \frac{50\text{ m}}{c} = 0.166\ \mu$s pillanatban érkezik. Ez alapján az áram időfüggvénye a kérdéses pontban:

$$i(50\text{ m}, t) = 2 \cdot \varepsilon(t - 0.166\ \mu\text{s})\ \text{A}$$

**36. Feladat.** *Végtelen hosszú hengerkondenzátor külső elektródájának az átmérője* 16 cm, *a belső elektróda átmérője* 4 cm. *A belső vezető potenciálja* 1 kV, *ha a két vezető közötti* 8 cm *átmérőjű hengerfelületet választjuk* 0 *potenciálúnak. Mekkora a két vezető közötti feszültség?*

**Megoldás.**



Egyéb információ hiányában a megoldás során a kondenzátor dielektrikumára az $\varepsilon = \varepsilon_0$ feltételezéssel élünk.

A feladatot a helyettesítő töltések elvének felhasználásával oldjuk meg. Keresünk egy olyan töltéselrendezést, amelynek elektrosztatikus terében van végtelen hosszú, ekvipotenciális hengerfelület. Ilyen töltéselrendezés a végtelen hosszú vonaltöltés.

A $q$ vonalmenti töltéssűrűségű végtelen hosszú vonaltöltéstől $r$ távolságban a potenciál:

$$\phi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{1}{r}$$

A feladat szerint:

$$\begin{aligned} \phi(0.02\text{ m}) &= 1\text{ kV} \\ \phi(0.04\text{ m}) &= 0\text{ V} \end{aligned}$$

A potenciál kifejezését felhasználva:

$$\begin{aligned} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{1}{0.02} &= 1\text{ kV} \\ \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{1}{0.04} &= 0\text{ V} \end{aligned}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat:

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{0.04}{0.02} = 1\text{ kV}$$

Ebből kifejezzük a vonaltöltés vonalmenti töltéssűrűségét:

$$q = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot 1000}{\ln\frac{0.04}{0.02}} = 8.03 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

Ekkora vonalmenti töltéssűrűség hoz létre olyan elektrosztatikus teret, amely teljesíti a feladatban foglalt potenciálviszonyokat. A teret ezután úgy tekinthetjük, mintha ez a $q$ vonaltöltés hozná azt létre (ez persze csak a fegyverzetek közötti hengeres térrészben igaz, de ezen kívül úgysem érdekel minket a tér).

A két elektróda közötti feszültség:

$$U = \phi(0.02\text{ m}) - \phi(0.08\text{ m}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{0.08}{0.02}$$

amelyre $q$ előbb kiszámolt értékét behelyettesítve $U = 2001$ V adódik.

**37. Feladat.** *Légszigetelésű köralakú síkkondenzátor lemezei* $A = 100\text{ cm}^2$ *felületűek, egymástól* $d = 10$ mm *távolságra vannak. Mekkora a közöttük lévő tér energiája, ha a köztük lévő feszültség* $U = 1$ kV*?*

**Megoldás.** Mivel a kondenzátor dielektrikuma levegő, $\varepsilon = \varepsilon_0$. A kondenzátor kapacitása:

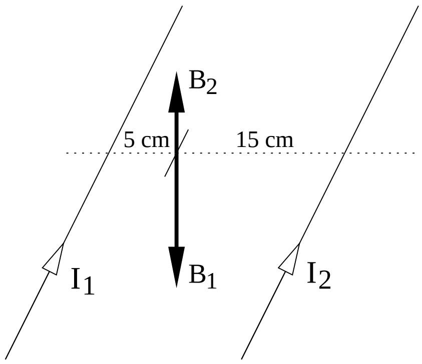
$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

A kondenzátorban tárolt elektrosztatikus energia:

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot U^2 = 4.427\ \mu\text{J}$$

**38. Feladat.** *Két végtelen hosszú párhuzamos vezető egymástól* $d = 20$ cm *távolságra helyezkedik el. A vezetőkben azonos irányban folyó áramok* $I_1 = 10$ A *illetve* $I_2 = 15$ A. *Mekkora a mágneses indukció értéke a két vezeték között az 1. vezetőtől* 5 cm *távolságban, ha a teret kitöltő közegre* $\mu_r = 10$*?*

**Megoldás.** A vezetők mágneses terét a megadott távolságban a következő ábra szemlélteti:



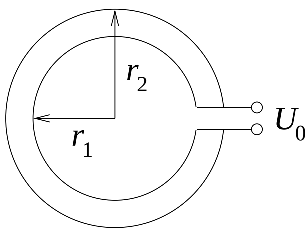

A mágneses indukcióvektorok nagysága:

$$B_1 = \mu_0\mu_r \cdot \frac{I_1}{2\pi \cdot 0.05} = 3.99 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$
$$B_2 = \mu_0\mu_r \cdot \frac{I_2}{2\pi \cdot 0.15} = 1.99 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Mivel $B_1 > B_2$, az eredő mágneses indukció $B_1$ irányába mutat, nagysága pedig

$$B = B_1 - B_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

**39. Feladat.** *Mekkora az ellenállása annak a körgyűrűnek, amelynek a belső sugara* $r_1$*, külső sugara* $r_2$*, a papírra merőleges vastagsága* $m$*, fajlagos vezetése* $\sigma$*, a vezetőre kapcsolt feszültség* $U_0$*. A rákapcsolásnál a légrés mérete elhanyagolható.*




**Megoldásunk** akkor ad jó eredményt, ha a körgyűrű vastagsága elhanyagolható a kerületéhez képest. Ebben az esetben az ellenállást számolhatjuk úgy, mintha egy olyan hasábbal lenne dolgunk, amelynek hossza a gyűrű középvonalának $2\pi \cdot \frac{r_1+r_2}{2}$ kerülete, keresztirányú méretei pedig $m$ és $r_2 - r_1$.

Az ellenállás kifejezése ilyen feltételek mellett:

$$R = \frac{2\pi \cdot \frac{r_1+r_2}{2}}{\sigma \cdot (r_2 - r_1) \cdot m} = \frac{\pi}{\sigma \cdot m} \cdot \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}$$

És hogy miért szerepel a feladatban $U_0$? Ezt csak az *evt* tudja. . .

**40. Feladat.** *Kör keresztmetszetű vezetőben folyó áram amplitúdója $I_m$. Mekkora a vezetékben fellépő legnagyobb áramsűrűség, ha a vezető R sugara sokkal nagyobb, mint az áram frekvenciájához tartozó behatolási mélység?*

**Megoldás.** Az erős áramkiszorítás esetével állunk szemben. Ekkor a $\delta$ behatolási mélységre $\delta \ll R$ teljesül, ami azt jelenti, hogy gyakorlatilag csak a vezető felszínének környezetében folyik áram. Az áramsűrűség a felülettől mért mélység függvényében $J(x) = J(0) \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$ szerint exponenciálisan csökken. A $\delta$ behatolási mélység azt a mélységet jelenti, ahol a felszíni $J(0)$ áramsűrűség $e$-ed részére csökken: $J(\delta) = J(0) \cdot \frac{1}{e}$.

A gyakorlatban az erős áramkiszorítás esetét úgy számolhatjuk, mintha a vezető felületétől mért $\delta$ behatolási mélységig egyenletesen $J(\delta)$ lenne az áramsűrűség, ezen belül pedig egyáltalán nem folyna áram. Ekkor a vezető keresztmetszetének külsejében az áramsűrűség a

$$J_m = \frac{I_m}{2\pi \cdot R \cdot \delta}$$

összefüggéssel becsülhető. A valóságban a vezető felszínén fellépő maximális $J(0)$ áramsűrűséget akkor tudnánk meghatározni, ha számszerűen ismernénk a $\delta$ behatolási mélységet: $J(0) = e \cdot J(\delta)$ szerint számolhatnánk a megoldást.