3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Oldja meg a $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$ egyenletet a komplex számok körében! **MO.** Az egyenlet nyilván $(z^3)^2 - 2z^3 + 1 = (z^3 - 1)^2 = 0$, azaz $z^3 = 1$, amiből $z_1 = 1$ és $z_{2,3} = \pm 1/2e^{j2\pi/3}$.

2. Legyen az (a^n) sorozat a következő: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 3, \frac{1}{8}, \frac{9}{8}, \frac{17}{8}, \frac{25}{8}, 4, \frac{1}{16}, \frac{17}{16}, \frac{33}{16}, \frac{49}{16}, \frac{65}{16}, 5, \frac{1}{32}, \frac{33}{32}, \frac{65}{32}, \ldots$

a) Döntse el hogy (an) konvergens-e !

b) Határozza meg (an) sűrűsödési értékeit !

c) $\liminf (an) = ?$ $\quad \limsup (an) = ?$

MO. Rendezzük a sorozatot az alábbi végtelen háromszög alakba:

$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{1}{8}, \frac{9}{8}, \frac{17}{8}, \frac{25}{8}, \frac{1}{16}, \frac{17}{16}, \frac{33}{16}, \frac{49}{16}, \frac{65}{16}, \frac{1}{32}, \frac{33}{32}, \frac{65}{32}, \ldots$

Ekkor az első oszlopban egy 0–hoz tartó, a második oszlopban egy 1–hez tartó, és így tovább, az n. oszlopban egy $n-1$–hez tartó részsorozat van. Így a_n nem konvergens, mert több sűrűsödési értéke van, nevezetesen sűrűsödési értékei a természetes számok, tehát $\liminf (an) = 0$ $\quad \limsup (an) = \infty$.

3. Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Minden korlátos sorozatnak van monoton részsorozata

b) Minden monoton sorozatnak van korlátos részsorozata

c) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata

d) Minden konvergens sorozatnak van korlátos részsorozata

MO. a) Igaz, mert *minden* sorozatnak van monoton részsorozata (lásd a Bolzano–Weierstrass tétel első felének "csúcsos" bizonyítását). b) Nem igaz, pl. $a_n =$ n c) Igaz: Bolzano–Weierstrass tétel d) Igaz, mert minden konvergens sorozat maga is korlátos, így *mnden* részsorozata korlátos.

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 8x} = ?$

MO. $x - \sqrt{x^2 - 8x} = \dfrac{8x}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} = \dfrac{8}{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{x}}} \longrightarrow \dfrac{8}{1+1} = 4$ ha $x \longrightarrow \infty$.

5. Döntse el, hogy korlátos–e az $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{e^x}$ függvény az $I = [1, \infty)$ intervallumon!

MO. Igen: egyrészt $f(x)$ pozitív I–n, másrészt L'Hospitallal $\exists \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$, így van $P > 1$, hogy $0 < f(x) < 1$ minden $x > P$–re és az $I' = [1, P]$ intervallumon $f(x)$ folytonossága miatt korlátos. Végül nyilván I'–beli korlátja és 1 közül a nagyobb korlátja lesz I–n is.

6. Bizonyítsa be, hogy minden $x > 0$ esetén $1 - x < \dfrac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$.

MO. Legyen $f(x) = 1 - x,\ g(x) = \dfrac{1}{1+x},\ h(x) = 1 - x + x^2$. Ekkor $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ és $f'(x) = -1 < -\dfrac{1}{(1+x)^2} = g'($ ha $x > 0$. (Ez utóbbi egyenlőtlenség azért igaz, mert $g'(0) = -1 = h'(0)$ és $g''(x) = 2\frac{1}{(1+x)} < 2 = h''(x)$ ha $x > 0$.

7. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \, dx = ?$

MO. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \, dx = \int_0^\pi \sin^x \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi \sin^x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int_0^\pi \sin^x \ dx - \int_0^\pi \sin^x \cos^2 x \, dx =$

$\displaystyle -\cos x|_0^\pi + \left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_0^\pi = 2 - 2\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$

8. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} \, dt = ?$

MO. Legyen $f(x) = e^{x^2}$ és $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, dt$. Ekkor $F(0) = 0$ és így f folytonossága miatt

$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} \, dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = \left. e^{x^2} \right|_{x=0} = e^0 = 1.$

Vagy hasonkóan L'Hospitallal f folytonossága miatt

$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0) = \left. e^{x^2} \right|_{x=0} = e^0 = 1.$