BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Csató Tamásné

ALGEBRA

Műegyetemi Kiadó, 2002.

Lektorok:

Farkas Miklósné dr. egyetemi adjunktus
Dr. Fodor György egyetemi tanár
Dr. Osváth Péter egyetemi docens

(Kilencedik utánnyomás)

Azonosító: **051359**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu István
Terjedelem: 29 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 210/02

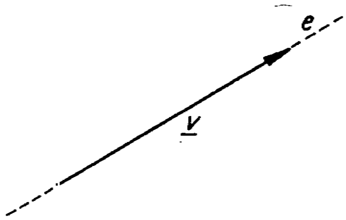
I. A TÉRVEKTOROK

1. A VEKTOR FOGALMA

Fizikai fogalmak matematikai leírásához, geometriai problémák megoldásához kevésnek bizonyulnak a valós számok. Egy mozgó test elmozdulásának, egy mozgás sebességének, gyorsulásának jellemzéséhez, egy geometriai eltolás meghatározásához kevés megadni annak nagyságát, irányára is szükség van. Indokolt tehát olyan matematikai fogalmat alkotni, amely alkalmas nagyság és irány meghatározására is: ez a vektor, eltérően a csak nagyság meghatározására alkalmas skalár-tól. Tekintsünk két pontot (A, B) és az A pontból a B pontba történő eltolást. Ezt az eltolást egyértelműen meghatározza az AB egyenesszakasz, ha irányítjuk, azaz megmondjuk, hogy kezdőpontja A - innen indul a mozgás - és végpontja B - ide irányul az eltolás.

1.1. Definició

Vektornak nevezünk minden irányított egyenesszakaszt. A vektorokat általában aláhuzott kisbetüvel jelöljük.



1. ábra

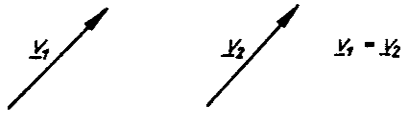
Elnevezések:

1. Az "e" egyenest a $\underline{v}$ vektor tartóegyenesének nevezzük.
2. Két vektort azonos állásunak nevezünk, ha tartóegyeneseik párhuzamosak. (Az azonos állásu vektorokat szokás párhuzamos vektoroknak is nevezni.)
3. A $\underline{v}$ vektor abszolutértékén az egyenes-szakasz hosszát értjük. Jele: $|\underline{v}|$, vagy v.

Két azonos állásu, irányu és abszolutértékü vektor ugyanazt az eltolást, sebességet, gyorsulást határozza meg, ezért indokolt az

1.2. Definició

Két vektor azonos, ha állása, iránya és abszolutértéke azonos.



2. ábra

Megjegyzés:

Előfordul például bizonyos fizikai alkalmazásoknál, hogy nem tekinthetünk egyenlőnek két különböző pontból kiinduló vektort. Amennyiben a kiindulópontot is figyelembe kell venni, "kötött" vektorról beszélünk. A mi tárgyalásunkban a párhuzamos eltolással szemben invariáns "szabad" vektorok szerepelnek.

A továbbiakban értelmezünk két gyakran előforduló egyszerü fogalmat.

1.3. Definició

Az $\underline{a}$ vektort egységvektornak nevezzük, ha $|\underline{a}| = 1$.
Az $\underline{a}$ irányu egységvektor jele: $\underline{a}_e$.

1.4. Definició

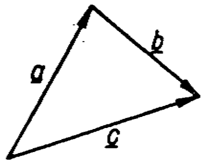
Inditsuk az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort közös kezdőpontból. A két vektor hajlásszögén a két egyenesszakasz által bezárt 0 és π közé eső szöget értjük. Jele: $(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle$, vagy $\varphi(\underline{a}, \underline{b})$.

2. MŰVELETEK VEKTOROKKAL I.

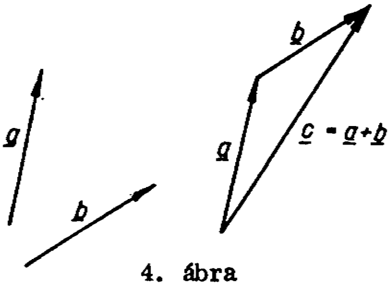
A vektorok között müveleteket értelmezünk oly módon, hogy a gyakorlati felhasználást lehetővé tegyük, szem előtt tartva, hogy ez összhangban kell legyen a valós számok körében már értelmezett müveletekkel.

Vektorok összeadása

Jellemezzen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor egy-egy végrehajtandó eltolást. A két eltolás egymás utáni végrehajtása helyettesithető egy eltolással, amely a 3. ábrán látható módon van kapcsolatban az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorral.



3. ábra



4. ábra

Indokolt tehát a

2.1. Definició

Két vektor ($\underline{a}$ és $\underline{b}$) összegén azt a vektort ($\underline{c}$) értjük, amely a 4. ábrán látható módon keletkezik az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorból.

Elnevezések: az összeadás tagjait komponens vektoroknak, az összeget eredő vektornak nevezzük.

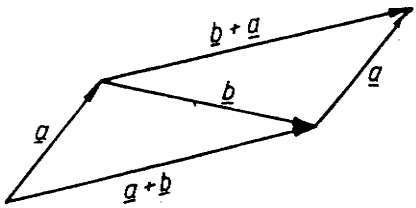
A többtagu vektorösszeget kéttagu összeadásra visszavezetve, a következőképpen értelmezzük:

$$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \ldots + \underline{a}_n = \{[(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) + \underline{a}_3] + \ldots\} + \underline{a}_n$$

Kérdés, hogy a valós számok összeadásának tulajdonságai érvényben maradnak-e a vektorok körében?

Az összeadás tulajdonságai

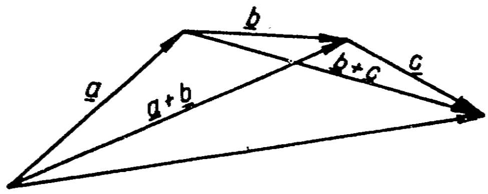
1. Bármely két vektornak van összege, és az egyértelmü.
2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$



5. ábra

Tehát az összeadás kommutativ.

3. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$



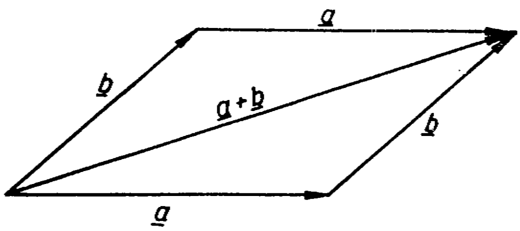
$(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

6. ábra

Tehát az összeadás asszociatív.

Megjegyzés:

Az összeadás elvégezhető az ugynevezett "paralelogramma szabály" alapján is:



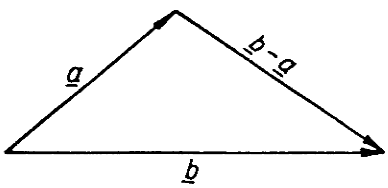
7. ábra

Vektorok kivonása

A kivonást - mint a valós számok körében - az összeadás inverzeként értelmezzük.

2.2. Definició

A $\underline{b}$ és $\underline{a}$ vektor különbségén azt a $\underline{b} - \underline{a}$ vektort értjük, amelyre teljesül, hogy $(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a} = \underline{b}$



8. ábra

Hogy a kivonás korlátlanul elvégezhető legyen - akkor is értelmes legyen a különbség, ha a kisebbitendő és a kivonandó megegyezik - szükség van a nullvektor értelmezésére.

2.3. Definició

Ha $|\underline{a}| = 0$, akkor $\underline{a}$-t nullvektornak nevezzük. A nullvektort - jele $\underline{0}$ - tetszőleges állásunak tekintjük. Ezért a $\underline{0}$ bármely vektorral párhuzamos és bármely vektorra merőleges.

Vektor szórzása számmal (skalárral)

2.4. Definició

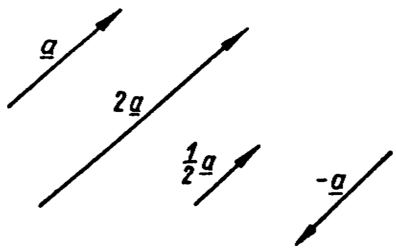
Legyen λ valós szám és $\underline{a}$ tetszőleges vektor. Az $\underline{a}$ vektor λ-szorosán a következő - $\lambda\,\underline{a}$-val jelölt - vektort értjük:

$$|\lambda\,\underline{a}| = |\lambda|\cdot|\underline{a}|$$

$\lambda\,\underline{a}$ állása: $\underline{a}$ állása

$$\lambda\,\underline{a} \text{ iránya: } \begin{cases} \underline{a} \text{ iránya, ha } \lambda > 0 \\ \underline{a}\text{-val ellentétes irányu,} \\ \text{ha } \lambda < 0 \end{cases}$$

Szemléletesen tehát a számmal szorzás a vektor nyujtását (zsugoritását) és negativ szorzó esetén irányának ellenkezőjére változását eredményezi. Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda\,\underline{a} = \underline{0}$.



9. ábra

A számmal szorzás tulajdonságai

Legyen λ és μ valós szám, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges vektor.

1. $(\lambda+\mu)\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a} + \mu\,\underline{a}$
2. $\lambda(\mu\underline{a}) = (\lambda\mu)\,\underline{a}$
3. $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\,\underline{a} + \lambda\,\underline{b}$

Ezek a tulajdonságok a definició közvetlen következményei, belátásukat az olvasóra bizzuk.

3. PÁRHUZAMOS ÉS EGYSÍKÚ VEKTOROK, LINEÁRIS FÜGGŐSÉG, FÜGGETLENSÉG

A számmal szorzás definiciója értelmében

$\lambda \underline{a} \parallel \underline{a}$ ($\lambda \underline{a}$ párhuzamos $\underline{a}$-val).

Igaz-e a fenti állitás megforditása? Legyen $\underline{a} \parallel \underline{b}$ következik-e ebből, hogy $\underline{b} = \lambda \underline{a}$? A következő ellenpélda mutatja, hogy ez a megforditás nem igaz: legyen $\underline{a} = \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$, ekkor $\underline{a} \parallel \underline{b}$, de nincs olyan λ, amellyel $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ volna. Kis módositással azonban már igaz az állitás, ezt mondja ki a következő:

3.1. Tétel

Ha két vektor párhuzamos egymással, akkor legalább az egyikük skalárszorosa a másiknak.

Bizonyitás:

a) Ha $\underline{a} = \underline{b} = \underline{0}$, akkor bármelyikük előáll a másik tetszőleges számszorosaként.

b) Ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, akkor

$\underline{b} = \underline{0}$ esetén $\underline{b} = 0 \cdot \underline{a}$,

$\underline{b} \neq \underline{0}$ esetén $\underline{b}_e = \underline{a}_e$, vagy $\underline{b}_e = -\underline{a}_e$ és igy

$$\underline{b} = |\underline{b}|\, \underline{b}_e = |\underline{b}|\, \underline{a}_e = \frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|}\underline{a}, \quad \text{vagy} \quad \underline{b} = -\frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|}\underline{a}.$$

Ezzel az állitást igazoltuk. ∎

Azokat a vektorokat nevezzük párhuzamosaknak, amelyeknek tartóegyenesei egy és ugyanazzal az egyenessel párhuzamosak. A térben más speciális elhelyezkedés is lehetséges:

3.2. Definició

Azokat a vektorokat nevezzük egysikuaknak (komplanárisaknak), amelyeknek egyenesei egy sikkal párhuzamosak. Nyilvánvaló, hogy két vektor mindig komplanáris. Három vektor már nem biztos, hogy egysiku.

3.3. Tétel

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor tetszőleges $\underline{c}$ esetén $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysikuak.

B i z o n y i t á s :

Amennyiben a $\underline{c}$ is párhuzamos az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal, akkor az állitás triviális, ha $\underline{a} \parallel \underline{b} \nparallel \underline{c}$, akkor egyeneseik az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ egyenesei által meghatározott sikkal párhuzamosak. ■

3.4. Definició

A $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{a}_i$ összeget - ahol λ_i-k $(i=1,2,\ldots,n)$ skalárok - az $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

A következőkben megvizsgáljuk, milyen feltételek biztositják, hogy egy vektort két vagy három vektor lineáris kombinációjaként lehessen előállitani.

Az előbb felvetett kérdésről szól a következő:

3.5. Tétel

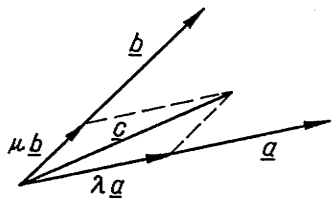
Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ komplanáris vektorok és $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ egyértelmüen előállitható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként.

B i z o n y i t á s :

Először megmutatjuk, hogy $\underline{c}$ előállitható a kivánt alakban:

$$\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b},$$

azután bizonyitjuk az egyértelmüséget.



10. ábra

A felbontást megkonstruáltuk a 10. ábrán. Konstrukciónk azért bizonyitó erejü, mert mást nem használt fel, mint a tételben szereplő feltételeket ($\underline{a} \nparallel \underline{b}$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysikuak). Most megmutatjuk, hogy a felbontás egyértelmü.

Legyen $\lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b}$ és $\lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$ két felbontás:

$$\underline{c} = \lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b} = \lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$$

ezt átrendezve adódik:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \underline{a} = (\mu_2 - \mu_1)\, \underline{b} \quad \text{és ez}$$

csak ugy állhat fenn, ha

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{és} \quad \mu_1 = \mu_2, \text{ mivel } \underline{a} \nparallel \underline{b}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés a tételhez:

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$ és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysikuak, akkor két eset lehetséges:

1. Amennyiben $\underline{c} \parallel \underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ előállitható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként, de nem egyértelmüen.

2. Ha $\underline{c} \nparallel \underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{c}$ nem állitható elő a kivánt alakban.

Kérjük az olvasót, önállóan gondolja meg, hogy a megjegyzésben szereplő állitások igazak.

Egy vektor adott vektorok irányába eső komponensekre bontását vizsgálja tovább a következő

3.6. Tétel

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ három nem egysiku vektor, akkor bármely $\underline{d}$ vektor egyértelmüen állitható elő $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyitás:

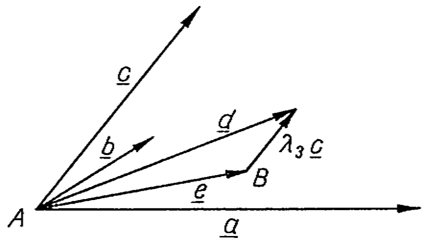
Mivel az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok nem egysikuak, igy köztük nincs sem $\underline{0}$ vektor, sem párhuzamos vektorok.

a) Ha $\underline{d}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ egysikuak, akkor az előbbi tétel szerint a $\underline{d}$ vektor $\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ alakban egyértelmüen előállitható, igy $\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + 0\, \underline{c}$ alaku.

Hasonlóan, ha $\underline{d}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ill. $\underline{d}$, $\underline{a}$, $\underline{c}$ egysikuak, a $\underline{d}$ vektor egyértelmüen előállitható

$$\underline{d} = \lambda \underline{b} + \mu \underline{c} + 0\, \underline{a}, \quad \text{illetve}$$
$$\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{c} + 0\, \underline{b} \quad \text{alakban.}$$

b) Ha a $\underline{d}$ vektor nem komplanáris az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok közül kiválasztott egyik vektorpárral sem, akkor először azt mutatjuk meg, hogy előállitható az ábrán látható módon



11. ábra

$$\underline{d} = \underline{e} + \lambda_3 \underline{c} \tag{1}$$

alakban, ahol $\underline{e}$ egysiku az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorpárral.

Inditsuk az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokat egy pontból (A). A $\underline{d}$ vektor végpontjában állitsunk párhuzamos egyenest $\underline{c}$-vel. Ez az egyenes metszi az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok sikját egy B pontban, mivel a $\underline{c}$ vektor nem egysiku az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorpárral. Ebből $\overrightarrow{AB} = \underline{e}$ jelöléssel következik (1).

Az $\underline{e}$ vektor felirható - mint már tudjuk -

$$\underline{e} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} \tag{2}$$

alakban, mivel $\underline{e}$ egysiku az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorokkal.

Helyettesitsük (2)-t (1)-be és akkor a $\underline{d}$ vektort az állitásunknak megfelelő

$$\underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$$

alakban állitottuk elő.

A sikbeli felbontás esetéhez hasonlóan bizonyitható a felbontás egyértelmüsége.

Tegyük fel, hogy

$$\underline{d} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} \tag{1'}$$

és

$$\underline{d} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} + \mu_3 \underline{c}, \tag{2'}$$

ekkor

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = \mu_1 \underline{a} + \mu_2 \underline{b} + \mu_3 \underline{c}. \tag{3'}$$

Ebből adódik:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\,\underline{a} + (\lambda_2 - \mu_2)\,\underline{b} = (\lambda_3 - \mu_3)\,\underline{c}. \qquad (4')$$

Mivel $\underline{c}$ nem egysiku $\underline{a}$-val és $\underline{b}$-vel, (4') csak ugy állhat fenn, ha $\mu_3 - \lambda_3 = 0$, ebből az következik, hogy

$$(\lambda_1 - \mu_1)\,\underline{a} + (\lambda_2 - \mu_2)\,\underline{b} = \underline{0}. \qquad (5')$$

Mivel $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, (5') csak ugy teljesülhet, hogy

$$\lambda_1 = \mu_1 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \mu_2,$$

tehát $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$, vagyis az előállitás egyértelmü. ■

Az előbbi két tétel állitása ugy is fogalmazható, hogy két nem párhuzamos vektor kifeszit egy sikot, három nem egysiku vektor kifeszíti a teret.

A következőkben definiálunk két fogalmat - a lineáris függetlenség és összefüggés fogalmát -, amelyek most, mint látni fogjuk, szemléletes tartalommal rendelkeznek. A későbbiekben - az absztrakt vektorterek tárgyalásánál - ezek a fogalmak a geometriai kapcsolatokat fogják helyettesiteni.

3.7. Definició

Azokat a vektorokat nevezzük lineárisan függetleneknek, amelyek lineáris kombinációjaként a $\underline{0}$ csak 0 együtthatókkal állitható elő.

3.8. Definició

Ha a $\underline{0}$ előállitható az adott vektorok lineáris kombinációjaként ugy, hogy nem minden együttható 0, akkor a vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük. Az előbb bizonyitott tételek következményei az alábbiak:

3.9. Tétel

Két vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem párhuzamos.

Bizonyitás:

Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor beláttuk, hogy bármely vektor, igy a $\underline{0}$ is egyértelmüen előáll $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként. De $0 \cdot \underline{a}$ +

$+ 0 \cdot \underline{b} = \underline{0}$, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan független, másrészt, ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor legalább az egyik - legyen ez az $\underline{a}$ - felirható a másik skalárszorosaként. Igy

$$\underline{a} = c \cdot \underline{b},$$
$$\underline{a} = c \cdot \underline{b} = \underline{0}$$

Az $\underline{a}$ vektor együtthatója biztosan nem nulla, tehát $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan összefüggő. ∎

3.10. Tétel

Három vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem egysiku.

Bizonyitás:

Már korábban bizonyitottuk, hogy ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem komplanárisak, akkor tetszőleges vektor, igy a $\underline{0}$ is egyértelmüen előállitható $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineáris kombinációjaként.

Mivel

$$0 \cdot \underline{a} + 0 \cdot \underline{b} + 0 \cdot \underline{c} = \underline{0}$$

és ez az egyetlen előállitás, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan függetlenek. Másrészt, ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ komplanárisak, akkor megmutatjuk, hogy lineárisan összefüggők.

a) eset: Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor tetszőleges velük egysiku $\underline{c}$ előáll $\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ alakban, vagyis $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} - \underline{c} = \underline{0}$ és $\underline{c}$ együtthatója nem nulla.

b) eset: Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{a} = \lambda \underline{b}$ (vagy $\underline{b} = \mu \underline{a}$) és igy $\underline{0} = \underline{a} - \lambda \underline{b} + 0\,\underline{c}$, tehát $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggők. ∎

Végül az olvasó könnyen beláthatja, hogy ha a tér bármely négy vektorát vizsgáljuk is, ezek mindig lineárisan összefüggők.

3.11. Feladatok

1. Bizonyitsa be, hogy ha az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorhármas lineárisan független rendszert alkot, akkor az $\underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

2. Bizonyitsa be, hogy ha az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorhármas lineárisan összefüggő rendszert alkot, akkor az $\underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c}$ vektorok is lineárisan összefüggőek.

3. Bizonyitsa be vektorok segitségével, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

4. $\underline{a} \nparallel \underline{b}$. Bizonyitsa be, hogy a $|\underline{b}|\,\underline{a} + |\underline{a}|\,\underline{b}$ vektor párhuzamos az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor szögfelezőjével.

5. Bizonyitsa be, hogy ha az egy pontból kiinduló $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok közül $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysiku, végpontjaik akkor, és csak akkor vannak egy sikon, ha $\underline{d} = \alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b} + \gamma\,\underline{c}$, ahol

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

6. Fogalmazza meg a fenti tétel speciális esetét három vektorra és bizonyitsa be.

4. MŰVELETEK VEKTOROKKAL II.

Gyakorlati alkalmazások indokolják, hogy további müveleteket értelmezzünk a vektorok között.

Skaláris szorzás

Értelmezünk a vektorok között egy ugynevezett skaláris szorzást, amely bármely két vektorhoz egy valós számot (skalárt) rendel.

4.1. Definició

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor skaláris szorzata

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\,(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle$$

A skaláris szorzás tulajdonságai

1. A szorzás kommutativ.

$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ – triviális a definició alapján.

2. A definició közvetlen következménye, hogy

$$\lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\lambda\,\underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda\,\underline{b})$$

3. Ugyancsak a definició alapján nyilvánvaló, hogy általában $(\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c} \neq \underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c})$, hiszen a bal oldal a $\underline{c}$ vektorral, a jobb oldal az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos.

4. Az összeadás (kivonás) és a skaláris szorzás között érvényes a disztributiv azonosság:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \qquad (1)$$

és

$$(\underline{a} - \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} - \underline{b} \cdot \underline{c}$$

Bizonyitás:

Ha $\underline{c} = \underline{0}$, akkor (1) és (2) mindkét oldala nulla, tehát érvényesek.

Ha $\underline{c} \neq \underline{0}$, akkor a $\underline{c}$ vektor irányába eső egységvektort $\underline{c}_e$-vel jelölve:

$$\underline{c} = \underline{c}_e \cdot |\underline{c}|.$$

$\underline{c}$-nek ezt az alakját a bizonyitandó azonosságokba helyettesitve és $|\underline{c}|$-kel osztva az

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c}_e = \underline{a} \cdot \underline{c}_e + \underline{b} \cdot \underline{c}_e$$

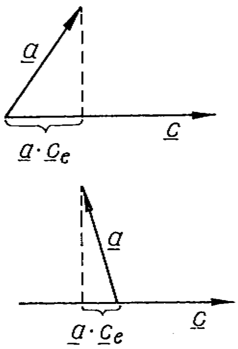
és

$$(\underline{a} - \underline{b}) \cdot \underline{c}_e = \underline{a} \cdot \underline{c}_e - \underline{b} \cdot \underline{c}_e$$

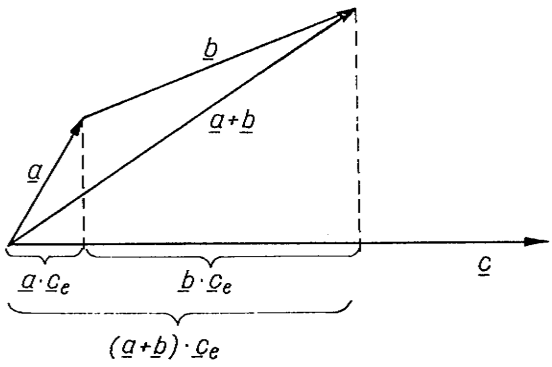
egyenleteket nyerjük. Az elsőről mutatjuk meg, hogy azonosság.

Felhasználjuk a skaláris szorzásnak azt, a definicióból következő tulajdonságát, hogy $\underline{a} \cdot \underline{c}_e$ az $\underline{a}$ vektor merőleges előjeles vetülete a $\underline{c}$ vektorra (12. ábra). A vetület pozitiv, ha $\underline{a}$ és $\underline{c}$ hajlásszöge hegyesszög és negativ, ha a hajlásszög tompaszög.

Hasonlóan $\underline{b} \cdot \underline{c}_e$ a $\underline{b}$ vektor, $(\underline{a} + \underline{b})\,\underline{c}_e$ az $\underline{a} + \underline{b}$ vektor vetülete $\underline{c}$-re.



12. ábra



13. ábra

Igy a 13. ábra alapján következik az állitás, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ hegyesszögben hajlanak $\underline{c}$-hez és hasonlóan belátható, ha mindkettő, ill. csak egyikük tompaszöget alkot a $\underline{c}$ vektorral. ∎

A továbbiak szempontjából igen lényeges az az egyszerü észrevétel, amelyet a következő tétel fogalmaz meg:

4.2. Tétel

Két, nullától különböző vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skalárszorzata nulla.

Bizonyitás:

a) Ha $\underline{a} \perp \underline{b}$-re, akkor az $(\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$ és igy

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

b) Ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, $|\underline{a}| \neq 0$ és $|\underline{b}| \neq 0$, akkor

$$\cos (\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = 0, \text{ vagyis } (\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle = \frac{\pi}{2}. \ ∎$$

Megjegyzés:

Felhivjuk a figyelmet arra, hogy - az eddigiektől eltérően - ez egy olyan szorzásmüvelet, amelynek eredménye nemcsak akkor nulla, ha valamelyik tényező maga is nulla.

Vektoriális szorzás

Értelmezünk a vektorok között egy un. vektoriális szorzást, amely bármely két vektorhoz egy vektort rendel.

4.3. Definició

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor vektoriális szorzatán azt az $\underline{a} \times \underline{b}$-vel jelölt vektort értjük, amelynek abszolutértéke:

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin (\underline{a}, \underline{b})\sphericalangle \ ,$$

állása:

$$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \quad \text{és} \quad \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$$

iránya:

az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

Ezen azt értjük, hogy az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor irányából nézve, az $\underline{a}$ vektort pozitiv - óramutató járásával ellentétes - π -nél kisebb forgás viszi a $\underline{b}$ irányba.

<u>A vektoriális szorzás tulajdonságai</u>

1. A szorzás nem kommutativ:
$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, mivel $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{b} \times \underline{a}$ abszolutértéke és állása azonos és iránya ellentétes.
2. $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = \lambda \underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times \lambda \underline{b}$. A definició alapján nyilvánvaló.
3. A vektoriális szorzás nem asszociativ:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) .$$

Állitásunkat egy ellenpéldával igazoljuk. Legyen

$$\underline{a} = \underline{b} \neq \underline{0} \quad \text{és} \quad \underline{c} \perp \underline{a}, \quad \underline{c} \neq \underline{0}, \quad \text{akkor}$$

a bal oldal:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{a}) \times \underline{c} = \underline{0},$$

a jobb oldal:

$$\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{c})$$

egy olyan vektor, amely komplanáris $\underline{a}$-val és $\underline{c}$-vel és merőleges $\underline{a}$-ra, abszolut értéke:

$$|\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{c})| = |\underline{a}| \cdot |\underline{a} \times \underline{c}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} =$$
$$= |\underline{a}|\ |\underline{a}|\ |\underline{c}| \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = |\underline{a}|^2 |\underline{c}| \neq 0.$$

4. A vektoriális szorzás disztributiv:

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \tag{1}$$

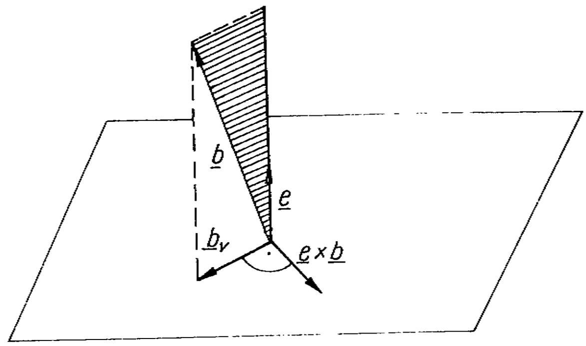
Elég az állitást abban az esetben bizonyitani, amikor az $\underline{a}$ vektor egységvektor ($\underline{a} = \underline{e}$),
mert ha $|\underline{a}| \neq 1$, akkor az egységvektorra bizonyitott egyenlőséget $|\underline{a}|$-kel végigszorozva nyerjük (1)-et.

Geometriai eszközökkel bizonyitjuk, hogy az

$$\underline{e} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{e} \times \underline{b} + \underline{e} \times \underline{c} \tag{2}$$

egyenlőség azonosság.

Felhasználjuk a vektoriális szorzásnak azt a geometriai jelentését, hogy $\underline{e} \times \underline{b}$ a $\underline{b}$ vektor $\underline{e}$-re merőleges sikbeli vetületének az $\underline{e}$ irányából nézve pozitiv irányu 90°-os elforgatottja (14. ábra).



14. ábra

$\underline{e} \times \underline{b}$ merőleges $\underline{e}$-re és $\underline{b}$-re és velük jobbrendszert alkot, igy csak azt kell belátni, hogy

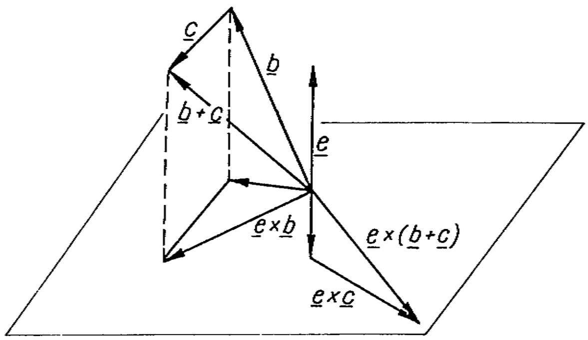
$$|\underline{b}_v| = |\underline{e} \times \underline{b}| .$$

A bevonalkázott háromszögből

$$|\underline{b}_v| = |\underline{b}| \cdot \sin (\underline{e}, \underline{b})\sphericalangle \quad .$$

Ezután vetitsük az egymáshoz füzött $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$ vektort egy az $\underline{e}$ vektorra merőleges sikra, majd forgassuk el a vektorháromszöget $\underline{e}$ irányából nézve $+ 90^{\circ}$-kal (15. ábra).

Ekkor az $\underline{e} \times \underline{b}$, $\underline{e} \times \underline{c}$, $\underline{e} \times (\underline{b} + \underline{c})$ vektorokból álló vektorháromszöghöz jutunk, ami eredeti állitásunk igaz voltát jelenti. ∎



15. ábra

A skaláris szorzat nulla voltából a vektorok merőlegességére lehet következtetni - mint ezt már bizonyitottuk - a vektoriális szorzatából a tényezők párhuzamosságára. Pontosabban:

4.4. Tétel

Két nullától különböző vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk nulla.

Bizonyitás:

a) Ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, akkor $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\underline{a},\underline{b})_{\measuredangle} = 0$.
Ebből következik, hogy $\sin(\underline{a},\underline{b})_{\measuredangle} = 0$, mivel
$\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$.
Igy $(\underline{a},\underline{b})_{\measuredangle} = 0$ vagy π, vagyis $\underline{a} \parallel \underline{b}$.

b) Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$ és egyik sem nullvektor, akkor a 3.1. tétel alapján

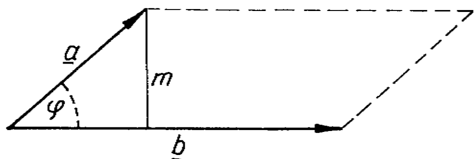
$\underline{a} = \lambda \underline{b}$, és

$\lambda \underline{b} \times \underline{b} = \underline{0}$.

Ezzel állitásunk mindkét részét beláttuk. ■

A vektoriális szorzat egy geometriai jelentése:

$|\underline{a} \times \underline{b}|$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszitett paralelogramma területe (16. ábra)



16. ábra

$$T_p = |\underline{b}| \cdot m = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi ,$$

tehát $T_p = |\underline{a} \times \underline{b}|$.

A kétszeres vektoriális szorzat kiszámitását segiti elő a

4.5. Tétel (kifejtési tétel)

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{a} \qquad (1)$$

Bizonyitás:

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ közül legalább egy vektor nullvektor, akkor mindkét oldala (1)-nek $\underline{0}$, tehát az állitás igaz. A továbbiakban már feltehetjük, hogy egyik vektor sem nullvektor.

Ha $\underline{b} = \lambda \underline{a}$, akkor (1) a következő alakot ölti:

$$(\underline{a} \times \lambda \underline{a}) \times \underline{c} = (\underline{a}\,\underline{c})\,\lambda \underline{a} - (\lambda \underline{a}\,\underline{c})\,\underline{a} \qquad (2)$$

(2) mindkét oldala nullvektor, tehát az állitás ekkor is igaz. Most már feltehetjük, hogy $\underline{a} \nparallel \underline{b}$.

Az látszik, hogy (1) bal oldala $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ komplanáris az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorpárral, mivel $\underline{a} \times \underline{b}$-re - vagyis egy $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re is merőleges vektorra - merőleges. Ebből következik (3.5. tétel), hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ felirható az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor lineáris kombinációjaként. További feladatunk annak kimutatása, hogy az együtthatók az állitásban szereplő skaláris szorzatok.

Vegyük észre, hogy ha (1) fennáll valamely $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármasra, akkor - tetszőleges valós λ esetén - $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\lambda \underline{c}$-re is teljesül, és ha van olyan

$$\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}_1 \quad \text{és} \quad \underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}_2 \quad \text{amelyek (1)-et}$$

kielégitik, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}_1 + \underline{c}_2$ is kielégiti azt. Ezekről az állitásokról egyszerü behelyettesitéssel meggyőződhetünk, csupán a skaláris és vektoriális szorzás már ismert tulajdonságait felhasználva.

Tehát, ha (1) érvényes az

$$\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}_1\ ;\quad \underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}_2 \quad \text{és} \quad \underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}_3 \quad \text{vektorhármasokra, akkor}$$

fennáll

$$\underline{a},\ \underline{b},\ \lambda_1 \underline{c}_1 + \lambda_2 \underline{c}_2 + \lambda_3 \underline{c}_3\text{-ra is.}$$

Ezért, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges nem párhuzamos vektorok és $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$, $\underline{c}_3$-t lineárisan függetleneknek választjuk - megfelelő a $\underline{c}_1 = \underline{a}$, $\underline{c}_2 = \underline{b}$, $\underline{c}_3 = \underline{a} \times \underline{b}$ választás - és igazoljuk (1)-et az

I : $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}$
II : $\underline{a}, \underline{b}, \underline{b}$ és
III : $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ vektorhármasokra,

akkor fentiek értelmében minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorhármasra is érvényes, felhasználva, hogy tetszőleges $\underline{c}$ előáll $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ lineáris kombinációjaként (3.6. tétel).

I-et helyettesitve (1)-be: az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a}\,\underline{a})\,\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{a})\,\underline{a} \qquad (3)$$

egyenlőséget kapjuk.

II-t helyettesitve (1)-be: az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b} = (\underline{a}\,\underline{b})\,\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{b})\,\underline{a} \qquad (4)$$

egyenlőséget kapjuk.

III-at helyettesitve (1)-be: az

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{b}) = [\underline{a}\,(\underline{a} \times \underline{b})]\,\underline{b} - [\underline{b}\,(\underline{a} \times \underline{b})]\,\underline{a} \qquad (5)$$

egyenlőséget kapjuk.

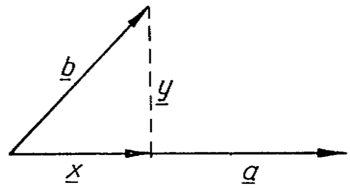
(5) bal oldala és jobb oldalának mindkét tagja, igy jobb oldala is nullvektor, tehát (5) teljesül.

(3)-ban $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szerepét felcserélve és (-1)-gyel szorozva adódik (4), igy elég (3)-at bizonyitani. Osszunk végig $|\underline{a}|^2$-tel:

$$(\underline{a}_e \times \underline{b}) \times \underline{a}_e = (\underline{a}_e\,\underline{a}_e)\,\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{a}_e)\,\underline{a}_e \qquad (3')$$

A bal oldalon álló $\underline{y} = (\underline{a}_e \times \underline{b}) \times \underline{a}_e$ vektor a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}, \underline{b}$ sikbeli $\underline{a}$-ra merőleges irányu vetületi vektora (17. ábra).

Ezt az $\underline{x} = (\underline{b} \cdot \underline{a}_e)\,\underline{a}_e$ vektor segitségével $\underline{y} = \underline{b} - \underline{x}$ alakba irhatjuk. Ez (3') és ezzel együtt az eredeti állitás igazolását jelenti. ■



17. ábra

Vegyesszorzat

Szokás értelmezni a vektorok között egy három argumentumu müveletet az un. vegyes szorzatot, amely lényegében nem uj müvelet, hanem a vektoriális és skaláris szorzat összetétele.

4.6. Definició

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatának az $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ szorzatot nevezzük. Jele: $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$.

A vegyesszorzat tulajdonságai

1. Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor az általuk kifeszitett hasáb térfogata: $V_h = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$.

Bizonyitás:

Tegyük fel, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysikuak, hiszen ekkor feszitenek ki hasábot.

$$(\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c} = |\underline{a} \times \underline{b}|\,(\underline{a} \times \underline{b})_e\,\underline{c}$$

$\underline{a} \times \underline{b}$ mint tudjuk az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszitett paralelogramma területe.

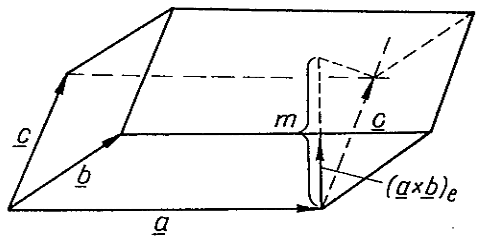
$(\underline{a} \times \underline{b})_e \cdot \underline{c}$ a $\underline{c}$ vektor vetülete a hasáb $(\underline{a}, \underline{b})$ lapjára merőleges vektorra, vagyis a hasáb magassága. (A vetület pozitiv, mert $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})_{\sphericalangle} \leq \frac{\pi}{2}$ következik abból, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot.)

Igy $V_h = t \cdot m = |\underline{a} \times \underline{b}|\,(\underline{a} \times \underline{b})_e\,\underline{c}$ ∎

Megjegyzés:

1. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ balrendszert alkotnak, akkor

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = -V_h$$



18. ábra

2. $(\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c} = \underline{a}\,(\underline{b} \times \underline{c})$
   Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egysikuak, akkor az 1. tulajdonság, ha egysikuak, akkor a 4. tulajdonság következménye. ∎
3. $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b} = \underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a}$
   $\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c} = \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = \underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b}$ és $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = -\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c}$.

   Ugyanis a definició és 2. alapján:
   $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c} = \underline{c}\,(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b}$ és
   $\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b} = (\underline{c} \times \underline{a})\,\underline{b} = \underline{b}\,(\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a}$. ∎
4. Az $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ vegyesszorzat akkor és csak akkor nulla, ha a három tényező egysiku.

   Bizonyitás:

a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egysiku.
Ha oly módon egysikuak, hogy van közöttük nullvektor, akkor $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$. Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$ és ebből következik, hogy $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$. Végül ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kifeszitenek egy sikot, amellyel $\underline{c}$ a feltétel szerint párhuzamos és ezért

$$\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad (\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c} = 0.$$

b) Legyen $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$.
Az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ skaláris szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nullvektor, vagy $\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b}$. Ha $\underline{c} = \underline{0}$ vagy $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ valóban egysikuak.
Ha $\underline{c} \perp \underline{a} \times \underline{b}$, akkor $\underline{c} \parallel$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor sikjával.
Ezzel állitásunk mindkét részét igazoltuk. ∎

Reciprok vektorhármas

Már korábban beláttuk, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem komplanáris vektorok, akkor tetszőleges $\underline{d}$ vektor egyértelmüen előállitható lineáris kombinációjukként:

$$\underline{d} = \lambda_1\,\underline{a} + \lambda_2\,\underline{b} + \lambda_3\,\underline{c} \tag{1}$$

Most a vegyesszorzat felhasználásával meghatározzuk a felbontásban szereplő λ_1, λ_2, λ_3 együtthatókat.

(1) mindkét oldalát megszorozva rendre a $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{c} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorral a következő egyenleteket nyerjük:

$$\underline{d}\,\underline{b}\,\underline{c} = \lambda_1\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} \tag{2}$$

$$\underline{d}\,\underline{c}\,\underline{a} = \lambda_2\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a} \tag{3}$$

$$\underline{d}\,\underline{a}\,\underline{b} = \lambda_3\,\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b} \tag{4}$$

(2), (3) és (4)-ből a vegyesszorzatra vonatkozó 3. tulajdonságot felhasználva és $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} \neq 0$-val osztva, a következő formulák adódnak az együtthatókra:

$$\lambda_1 = \frac{\underline{d}\,\underline{b}\,\underline{c}}{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}; \qquad \lambda_2 = \frac{\underline{a}\,\underline{d}\,\underline{c}}{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}; \qquad \lambda_3 = \frac{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{d}}{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}$$

Megjegyzés:

A $\dfrac{\underline{b} \times \underline{c}}{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}$; $\dfrac{\underline{c} \times \underline{a}}{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}$; $\dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}$

vektorokat szokás az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok reciprok vektorhármasának nevezni.

4.7. Feladatok

1. Melyek azok az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egységvektorok, amelyek kielégitik a következő egyenlőséget?

$$(\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{c})\,\underline{a}$$

2. Mutassa meg, hogy ha

$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{d}$ és
$\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{d}$, akkor
$\underline{a} - \underline{d} \parallel \underline{b} - \underline{c}$-vel.

3. Mutassa meg, hogy bármely $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármas esetén fennáll az

$$|\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}| \leq |\underline{a}|\,|\underline{b}|\,|\underline{c}|$$

egyenlőség.

4. Mely $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok elégitik ki a következő egyenlőséget?

a) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{0}$

b) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0$

5. A VEKTOR KOORDINÁTÁS ALAKJA

Az a felismerés, hogy három lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként a tér bármely vektora egyértelmüen előállitható, lehetővé teszi, hogy a vektorokat rendezett számhármasokkal jellemezzük és ezáltal a vektormüveleteket geometriai eszközök nélkül is elvégezhessük.

5.1. Definició

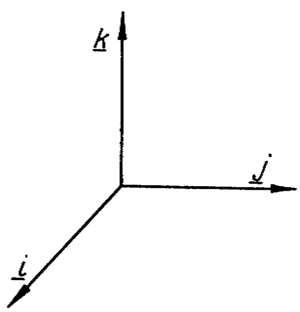
Legyen $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ egy lineárisan független vektorhármas, amellyel a tér tetszőleges $\underline{x}$ vektora előállitható

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \quad \text{alakban.}$$

Az x_1, x_2, x_3 rendezett számhármast az $\underline{x}$ vektor $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Mivel különböző bázisvektorok esetén ugyanannak a vektornak különbözőek a koordinátái, rögzitjük a bázisvektorokat.

A müveletek végzése akkor a legegyszerübb, ha bázisvektoroknak speciálisan páronként egymásra merőleges egységvektorokat választunk.

Legyen $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként egymásra merőleges, jobbrendszert alkotó egységvektorrendszer. A továbbiakban, ha egy vektor koordinátáiról beszélünk, a 19. ábrán is látható $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisvektorokra vonatkoztatjuk azokat.



19. ábra

5.2. Tétel

Két koordinátás alakban adott vektor akkor és csak akkor azonos, ha megfelelő koordinátái azonosak.

a) Ha két vektor koordinátái ugyanabban a bázisban azonosak, akkor triviális, hogy a két vektor azonos.

b) Ha

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k},$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 k \qquad \text{és} \qquad \underline{a} = \underline{b},$$

akkor

$$(a_1 - b_1) \underline{i} + (a_2 - b_2) \underline{j} + (a_3 - b_3) \underline{k} = \underline{0},$$

ami $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ lineáris függetlensége miatt csak ugy teljesülhet, hogy

$$a_1 = b_1,$$
$$a_2 = b_2,$$
$$a_3 = b_3. \quad \blacksquare$$

5.3. Tételek

Müveletek koordinátákkal adott vektorokkal:

1. Összeadás és kivonás

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

és

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

Az összeadás müveleti tulajdonságait felhasználva:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1) \underline{i} + (a_2 + b_2) \underline{j} + (a_3 + b_3) \underline{k},$$
$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1) \underline{i} + (a_2 - b_2) \underline{j} + (a_3 - b_3) \underline{k}. \quad \blacksquare$$

2. Szorzás skalárral

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k},$$

akkor

$$c \cdot \underline{a} = c\, a_1 \underline{i} + c\, a_2 \underline{j} + c\, a_3 \underline{k}$$

a skalárral szorzás disztributivitása alapján. ∎

3. Skaláris szorzás

Legyen

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k},$$

akkor

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Bizonyitás:

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0 \qquad (1),$$

mert a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra és

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1 \qquad (2),$$

mert egység abszolutértékü bázisvektorokat választottunk. Felhasználva (1)-et, (2)-t és a skaláris szorzás müveleti azonosságait, következik az állitás. ∎

4. Vektor abszolut értéke

A skaláris szorzás definiciója alapján: $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$ és igy

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\,\underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

A skaláris szorzás felhasználásával az egységvektorok koordinátáinak egy geometriai jelentését mutatjuk meg:

Legyen

$$\underline{e} = e_1 \underline{i} + e_2 \underline{j} + e_3 \underline{k} \quad \text{és} \quad |\underline{e}| = 1 .$$

$$\underline{e} \cdot \underline{i} = \cos (\underline{e}, \underline{i})_{\sphericalangle} = e_1 ,$$

$$\underline{e} \cdot \underline{j} = \cos (\underline{e}, \underline{j})_{\sphericalangle} = e_2 \quad \text{és}$$

$$\underline{e} \cdot \underline{k} = \cos (\underline{e}, \underline{k})_{\sphericalangle} = e_3 .$$

A bázisvektorokkal alkotott szögek koszinuszait a vektor iránykoszinuszainak nevezzük.

5. Vektoriális szorzás

Először a bázisvektorok vektoriális szorzatait vizsgáljuk:

$$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}; \qquad (1)$$

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \quad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \quad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

a vektoriális szorzás definiciója alapján.

(1) és a vektoriális szorzás müveleti azonosságainak felhasználásával:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \times (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \underline{j} +$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{k}.$$

A koordináták felirását segiti elő a következő séma

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k,$$

ahol a szereplő számnégyesekhez rendre az

$a_2 b_3 - b_2 a_3$, $a_1 b_3 - a_3 b_1$ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ számokat rendeljük.

6. Vegyesszorzat

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{c}$$

3. és 5. alapján:

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 +$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3,$$

vagy az előbbi séma felhasználásával:

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Megjegyzés:

Az 5. és 6. alatt használt elemsémával - mátrix - és a fenti módon hozzárendelt szorzatösszeggel - determináns - a későbbi fejezetekben részletesen foglalkozunk, itt csak a koordináták könnyebb megjegyzése miatt használtuk.

6. A TÉR ANALITIKUS GEOMETRIÁJA

A középiskolában tanult analitikus (koordináta) geometria keretében egy koordinátarendszer rögzitése után a sik pontjait vektorokkal jellemezték. Ezzel az eszközzel mód nyilt sikgörbék egyenleteinek meghatározására és különböző mértani helyek algebrai eszközökkel történő megkeresésére.

Ehhez hasonlóan felhasználjuk a térvektorokat arra, hogy velük a tér pontjait jellemezzük, majd a sikbeli problémákhoz hasonlóakat oldjunk meg segitségükkel a térben.

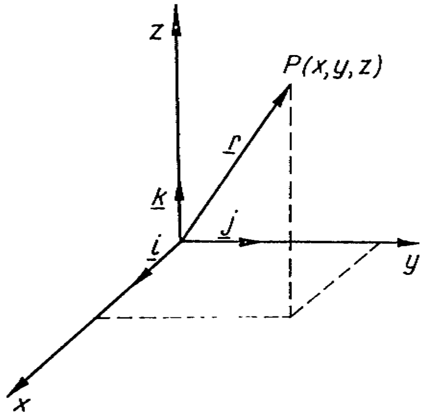
6.1. Definició

A tér egy rögzitett 0 pontjából (origó) a tér egy tetszőleges P pontjába mutató $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ vektort a P pont helyvektorának nevezzük.

A tér pontjai és az 0 pontból kiinduló helyvektorok között kölcsönösen egyértelmü a megfeleltetés. Ha az 0 ponton kivül három bázisvektort is rögzitünk, akkor a tér pontjai és a rendezett számhármasok között is egy kölcsönösen egyértelmü relációt létesitettünk.

6.2. Definició

Az $\underline{r}$ helyvektor koordinátáit nevezzük a P pont koordinátáinak (20. ábra).



20. ábra

6.3. Két pont távolsága

Legyen

$\underline{r}_1 = x_1\,\underline{i} + y_1\,\underline{j} + z_1\,\underline{k}$ a P_1 pont helyvektora, és

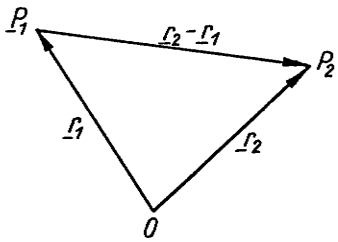
$\underline{r}_2 = x_2\,\underline{i} + y_2\,\underline{j} + z_2\,\underline{k}$ a P_2 pont helyvektora. Ekkor

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\underline{i} + (y_2 - y_1)\,\underline{j} + (z_2 - z_1)\,\underline{k}$$

és

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

(l. 21. ábra)



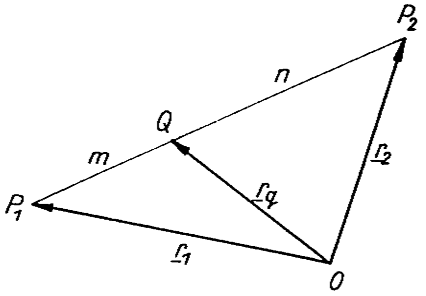
21. ábra

6.4. Egy szakaszt adott arányban osztó pont helyvektora

$$|\overrightarrow{P_1 Q}| : |\overrightarrow{Q P_2}| = m : n$$

$(\underline{r}_q - \underline{r}_1)\,n = (\underline{r}_2 - \underline{r}_q)\,m$ és innen

$$\underline{r}_q = \frac{n\,\underline{r}_1 + m\,\underline{r}_2}{m + n}$$



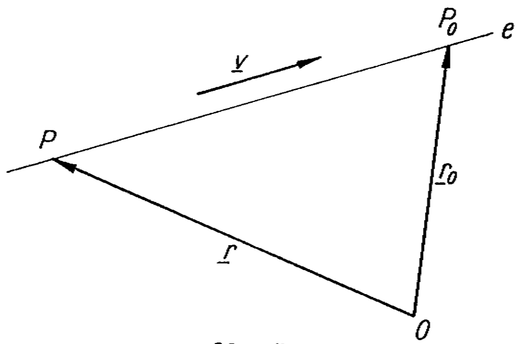
22. ábra

Speciálisan a P_1P_2 szakaszt felező pont $\underline{r}$ helyvektora:

$$\underline{r} = \frac{\underline{r}_1 + \underline{r}_2}{2}$$

6.5. Egyenes egyenlete

Az egyenes helyzetét egy pontja és egy az egyenessel párhuzamos vektor, ún. irányvektor (jele: $\underline{v}$, 23. ábra), egyértelmüen meghatároz-za. Keresünk egy olyan egyenletet, amelyet az egyenes tetszőleges P pontjának $\underline{r}$ helyvektora kielégit, de más pontok helyvektorai nem elégitik azt ki.



23. ábra

Mivel $\underline{r} - \underline{r}_0 \parallel \underline{v}$,

$\underline{r} - \underline{r}_0 = t \cdot \underline{v}$,

$\underline{r} = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v}$ (t tetszőleges valós szám) (1)

Az (1) egyenlet az egyenes paraméteres vektoregyenlete.

Felhasználva, hogy két vektor - rögzitett bázisban - akkor és csak akkor egyenlő, ha megfelelő koordinátái egyenlőek, az

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}; \quad \underline{r}_o = x_o\,\underline{i} + y_o\,\underline{j} + z_o\,\underline{k} \quad \text{és}$$

$$\underline{v} = v_1\,\underline{i} + v_2\,\underline{j} + v_3\,\underline{k}$$

jelöléssel kapjuk az egyenes paraméteres egyenletrendszerét:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + v_1\,t \\ y &= y_o + v_2\,t \\ z &= z_o + v_3\,t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Megjegyzés:

1. (2)-ből kiküszöbölhető a t paraméter. Ha az irányvektor egyik koordinátája sem nulla, vagyis az egyenes nem párhuzamos egyik koordinátasikkal sem, akkor az

$$\frac{x - x_o}{v_1} = \frac{y - y_o}{v_2} = \frac{z - z_o}{v_3} \quad \text{egyenletrendszert nyerjük.}$$

2. Az $\underline{r} - \underline{r}_o \parallel \underline{v}$ feltétel a vektoriális szorzat segitségével is megfogalmazható, és akkor az egyenes egyenletének egy ritkábban használt alakjához jutunk:

$$(\underline{r} - \underline{r}_o) \times \underline{v} = \underline{0} \qquad (3)$$

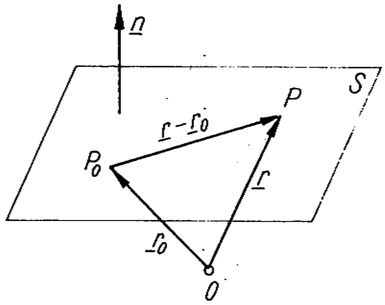
3. Természetesen az egyenes térbeli helyzetét sok más adatpár is meghatározza. Nem kivánjuk itt a gyakoribb eseteket sem tárgyalni, kitüzzük feladatként az olvasó számára.

6.6. Sik egyenlete

A sik térbeli helyzetét meghatározza például egy P_o pontja és egy, a sikra merőleges $\underline{n}$ vektor - neve: a sik normálvektora - A sik tetszőleges P pontjának $\underline{r}$ helyvektora kielégiti az

$$(\underline{r} - \underline{r}_o) \cdot \underline{n} = 0 \qquad (1)$$

egyenletet, mivel $\underline{r} - \underline{r}_o \perp \underline{n}$. Más pontok viszont nem elégitik ki (1)-et, mert ha P nincs rajta az S sikon, akkor $\underline{r} - \underline{r}_o$ nem merőleges $\underline{n}$-re. Tehát (1) az S sik egyenlete.



24. ábra

A sik egyenletének koordinátás alakja

Legyen

$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$;

$\underline{r}_0 = x_0\,\underline{i} + y_0\,\underline{j} + z_0\,\underline{k}$ és

$\underline{n} = n_1\,\underline{i} + n_2\,\underline{j} + n_3\,\underline{k}$

akkor (1)-ből

$$(x-x_0)\,n_1 + (y-y_0)\,n_2 + (z-z_0)\,n_3 = 0 \qquad (2)$$

adódik.

A sik egyenletének Hesse-féle normálalakja

Ehhez az egyenletalakhoz ugy jutunk, hogy egységabszolutértékü normálvektorral irjuk fel (1)-et.

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n}_e = 0 \qquad (3)$$

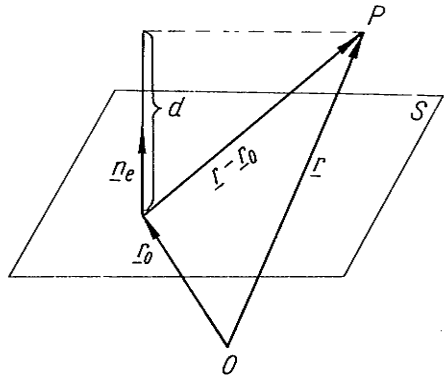
(3) igen alkalmas tetszőleges P pont siktól mért távolságának meghatározására. Ugyanis az $(\underline{r} - \underline{r}_0)\,\underline{n}_e$ szorzat - az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor vetülete $\underline{n}_e$ - re - a P pont d előjeles távolságát adja az S siktól (l. 25. ábra)

Három pont által meghatározott sik egyenlete

Ha ismerjük az S sik P_1, P_2, P_3 nem egy egyenesen fekvő pontjának helyvektorát, meghatározhatunk egy normálvektort

$\underline{n} = (\underline{r}_3 - \underline{r}_1) \times (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$

módon, és felirhatjuk S egyenletét (1) alakban, de felhasználhatjuk a következő sikegyenlet-alakot is.



25. ábra

A sik kétparaméteres vektoregyenlete

Legyen adott az S sik egy P_0 pontjának $\underline{r}_0$ helyvektora és két, az S sikkal párhuzamos vektor $\underline{u}$ és $\underline{v}$ ($\underline{u} \nparallel \underline{v}$). Az S sik tetszőleges P pontjának $\underline{r}$ helyvektora a fenti adatokkal

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t_1\, \underline{u} + t_2\, \underline{v}$$

alakban irható, ahol a t_1 és t_2 paraméterek tetszőleges valós számok.

Bizonyitás:

Az S sik két nem párhuzamos $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektora segitségével a sik bármely vektora, igy az $\underline{r} - \underline{r}_0$ vektor is lineáris kombinációként előállitható, vagyis

$$\underline{r} - \underline{r}_0 = t_1\, u + t_2\, \underline{v}\,,$$

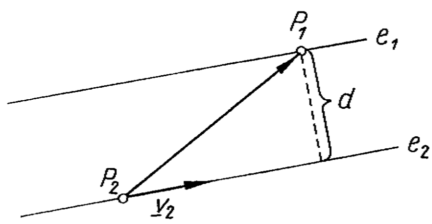
amint állitottuk. ∎

Az előbbiekben tárgyalt apparátus - sik és egyenes egyenletek - valamint a vektorműveletek alkalmazásával sikokra és egyenesekre vonatkozó metszési-, távolsag-, tükrözési - feladatok analitikus megoldása is lehetővé vált. Nem kivanjuk a fenti feladattipusokat részletesen tárgyalni, csupán néhány alapfeladat megoldását ismertetjük.

1. Három sik közös pontjának meghatározása:
   Megoldjuk a sikok egyenleteiből álló egyenletrendszert.

2. Két sik metszésvonala egyenletének felirása:
Az egyenes irányvektora a sikok normálisainak vektoriális szorzata. Az egyenes egy pontjának koordinátáit a sikok egyenleteiből álló egyenletrendszer egy megoldása adja.
3. Két párhuzamos egyenes távolsága (d)

$$d = \left| \overrightarrow{P_2 P_1} - (\overrightarrow{P_2 P_1} \frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|}) \cdot \frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|} \right|$$



26. ábra

7. HOMOGÉN LINEÁRIS VEKTOR-TRANSZFORMÁCIÓK (TENZOROK)

Tekintsük a következő vektor-transzformációt: a tér minden vektorának hosszát kétszeresére növeljük. Ez a T transzformáció a tér tetszőleges $\underline{v}$ vektorához a $2\underline{v}$ vektort rendeli, más szóval: $\underline{v}$ képe $2\,\underline{v}$.

Jelben: $T\,\underline{v} = 2\,\underline{v}$

Milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a transzformáció (más szóval leképezés)?

1. Két vektor összegének a képe megegyezik a képek összegével. Ugyanis

$$2\,(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = 2\,\underline{v}_1 + 2\,\underline{v}_2$$

2. Egy vektor skalárszorosának a képe megegyezik a vektor képének skalárszorosával. Ugyanis:

$$2\,c\,\underline{v} = c\,2\,\underline{v}$$

7.1. Definició

Homogén lineáris transzformációnak vagy homogén lineáris leképzésnek, vagy lineáris operátornak, röviden tenzornak nevezünk minden olyan T hozzárendelési utasitást, amely vektorhoz vektort rendel, és rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

1. $T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T\underline{v}_1 + T\underline{v}_2$

2. $T c \underline{v} = c T \underline{v}$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy a tenzor egy vektorhalmazon értelmezett vektorértékü függvény, amely az 1. és 2. tulajdonságokkal rendelkezik.

7.2. Tétel

Ha ismerjük a bázisvektorok képeit, ismerjük a tér összes vektorának a képét.

Bizonyitás:

Legyenek a bázisvektorok: $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ és képeik

$$T\underline{e}_1 = \underline{a},$$
$$T\underline{e}_2 = \underline{b},$$
$$T\underline{e}_3 = \underline{c}.$$

Ekkor tetszőleges

$\underline{v} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$ képe:

$$T\underline{v} = x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} \tag{1}$$

felhasználva az 1. és 2. tulajdonságot.

Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektort a rögzitett $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázisbeli koordinátáival adjuk meg:

$$\begin{aligned} T\underline{e}_1 &= \underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3 \\ T\underline{e}_2 &= \underline{b} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + b_3\underline{e}_3 \\ T\underline{e}_3 &= \underline{c} = c_1\underline{e}_1 + c_2\underline{e}_2 + c_3\underline{e}_3, \end{aligned} \tag{2}$$

akkor $\underline{v}$ transzformáltja az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázisban (1) és (2) felhasználásával a következőképpen irható fel:

$$
\begin{aligned}
T\,\underline{v} = (x\,a_1 + y\,b_1 + z\,c_1)\,\underline{e}_1 &+ \\
+ (x\,a_2 + y\,b_2 + z\,c_2)\,\underline{e}_2 &+ \\
+ (x\,a_3 + y\,b_3 + z\,c_3)\,\underline{e}_3 &.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Jól látszik, hogy ha rögzitjük a bázist, a tenzort egyértelmüen jellemzik a bázisvektorok képeinek koordinátái. A bázisvektorok transzformáltjainak (2) alatti koordinátáit egy táblázatba szokták összefoglalni oly módon, hogy $T\,\underline{e}_1$ koordinátáit helyezik el a táblázat első oszlopában.

$$
\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}
\tag{2'}
$$

Ezt a 3 sorból és 3 oszlopból álló elem-elrendezést 3x3-as négyzetes mátrixnak nevezzük. (A fogalommal részletesebben külön fejezet foglalkozik!) Jele: $\underline{\underline{T}}$ ■

7.3. Definició

A $\underline{\underline{T}}$ mátrixot a T tenzor $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ bázisbeli mátrixának nevezzük.

A mátrix irásmóddal könnyen megjegyezhetővé válik (3) is. Irjuk a $T\,\underline{v}$ vektor koordinátáit egy oszlopba és tegyük zárójelbe, ezzel jelölve, hogy egy vektor három koordinátájáról van szó.

$$
T\,\underline{v} = \begin{pmatrix} x\,a_1 + y\,b_1 + z\,c_1 \\ x\,a_2 + y\,b_2 + z\,c_2 \\ x\,a_3 + y\,b_2 + z\,c_3 \end{pmatrix}
\tag{3'}
$$

Hasonlóan a $\underline{v}$ vektor koordinátáit:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{alakban irva}
$$

értelmezzük a $\underline{\underline{T}}$ mátrix és $\underline{v}$ vektor szorzatát ugy, hogy az eredmény (3') legyen, vagyis

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,a_1 + y\,b_1 + z\,c_1 \\ x\,a_2 + y\,b_2 + z\,c_2 \\ x\,a_3 + y\,b_3 + z\,c_3 \end{pmatrix}
$$

Figyeljük meg, hogy a szorzat-vektor elemei ugy keletkeznek, hogy a szorzandó mátrix megfelelő sorainak számhármasait, mint egy vektor három koordinátáját tekintve, képezzük a skaláris szorzatát az $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ koordinátáju $\underline{v}$ vektorral.

Igy a T transzformáció valamely bázisbeli mátrixát ismerve, tetszőleges $\underline{v}$ e bázisbeli koordinátákkal adott vektornak a transzformáltját igen egyszerüen meghatározhatjuk.

Lássunk egy-két példát fentiekre.

7.4. Példák

1. Tekintsük az $[x\ y]$ koordinátasík helyvektorainak az origó körül történő 45^{o}-os F elforgatását.

Geometriai ismereteink alapján nyilvánvaló, hogy az összeg elforgatottja megegyezik a komponensek elforgatottjainak az összegével és egy vektor megnyujtása és forgatása sorrendben felcserélhetők. E két tulajdonság éppen azt jelenti, hogy az F transzformáció tenzor.

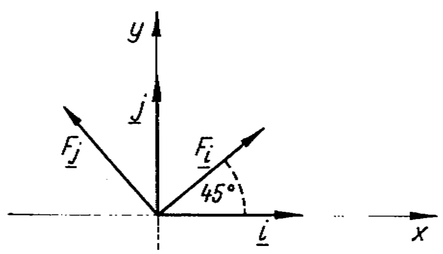
Rögzitsük az $\underline{i}$, $\underline{j}$ bázisvektorrendszert és irjuk fel az F tenzor mátrixát e bázisban. Mint láttuk, akkor csak az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektor képét kell meghatároznunk:

$$F\,\underline{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$$

$$F\,\underline{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\underline{j}$$

és ennek alapján a tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



27. ábra

Tetszőleges $\underline{v} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$ vektor transzformáltjának koordinátái az $\underline{i}, \underline{j}$ bázisban a következők:

$$F\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2. Vizsgáljuk a tér helyvektorainak az [xy] sikra történő vetitését. Ez a V vektortranszformáció is homogén és lineáris, tehát tenzor.

Irjuk fel a V tenzor mátrixát, ha $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a bázisvektorok.

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egy homogén lineáris transzformáció vizsgálata során felmerül a kérdés, hogy van-e olyan vektor, amelyhez a transzformáció egy az eredeti vektorral párhuzamos képvektort rendel hozzá.

7.5. Definició

Ha a T tenzor az $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort vele párhuzamos vektorba viszi át:

$$T\,\underline{s} = \lambda\,\underline{s},$$

akkor az $\underline{s}$ vektort a tenzor sajátvektorának, a λ skalárt a tenzor sajátértékének nevezzük.

7.6. Példa

Legyen T az XY koordinátasik helyvektorainak az első szögfelezőre történő tükrözése, majd kétszeresre nyujtása. Mivel a vektorok összeadása, ill. skalárral szorzása sorrendben felcserélhető a tükrözés és nyujtás transzformációval, T tenzor.

A tenzor mátrixa az $\underline{i}, \underline{j}$ koordinátarendszerben a következő:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Van-e a tenzornak sajátvektora? Geometriai meggondolás alapján minden olyan vektor, amelynek arkusza 45°, 135°, 225°, vagy 315° sajátvektor és csak ezeknek a vektoroknak a képe párhuzamos az eredeti vektorral. Minden sajátvektor a $\lambda = 2$, vagy a $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozik, mivel a transzformáció minden vektort kétszeresére nyujt.

A sajátértékek és sajátvektorok elvi problémái és megkeresésük módszere geometriai meggondolások nélkül a lineáris transzformációk általánosabb tárgyalásánál a 8. fejezetben kerül tárgyalásra. Annyit azonban már itt megemlitünk, hogy a probléma megoldása lényegében olyan λ keresése, amely mellett a $\underline{\underline{T}}\ \underline{s} = \lambda \underline{s}$ egyenletnek van $\underline{s} \neq \underline{0}$ megoldása. Ezt részletesebben irva, kapjuk a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \end{pmatrix} \quad \text{egyenletet,}$$

és a szorzást elvégezve, a

$$\begin{aligned} 2\,s_2 &= \lambda s_1 \\ 2\,s_1 &= \lambda s_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer egyszerüsége miatt könnyen látható, hogy $\underline{s} \neq \underline{0}$ megoldása akkor és csak akkor van, ha $\lambda = 2$ vagy $\lambda = -2$ és minden olyan $\underline{s}$ megoldás, amelynek az $\underline{i}$, $\underline{j}$ koordinátarendszerbeli koordinátái abszolutértékben azonosak. Tehát a T tenzornak két sajátértéke van:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = -2.$$

A λ_1-hez tartozó sajátvektorok mind

$$\underline{s}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{alakuak,}$$

a λ_2-höz tartozó sajátvektorok

$$\underline{s}_2 = d \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{alakuak, ahol}$$

c és d tetszőleges valós számok.

Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektor két lineárisan független sajátvektor. Válasszuk ezeket bázisvektoroknak, akkor a T tenzor mátrixa a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ diagonál mátrix lesz.

7.7. Tétel

Ha egy homogén lineáris térvektor transzformációnak van három, sikvektor transzformációnak két lineárisan független sajátvektora, akkor ezeket választva bázisnak, a tenzor mátrixa diagonálmátrix lesz. A mátrix főátlójában levő elemek a sajátértékek:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

A tétel állitása - mint ahogy ezt a példában részleteztük - a fogalmak közvetlen következménye. ■

7.8. Feladatok

1. Mutassa meg, hogy a T homogén lineáris transzformáció nullvektorhoz nullvektort rendel.

2. Legyen T egy homogén lineáris transzformáció,

$$T\,\underline{a} = \underline{a}_1,$$
$$T\,\underline{b} = \underline{b}_1,$$
$$T\,\underline{c} = \underline{c}_1,$$

az $\underline{a}_1$, $\underline{b}_1$, $\underline{c}_1$ vektorok lineárisan függetlenek. Lehet-e a fentiekből egyértelmüen következtetni az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris függetlenségére vagy összefüggő voltára?

II. KOMPLEX SZÁMOK ALGEBRÁJA

1. A KOMPLEX SZÁM FOGALMA, MŰVELETEK

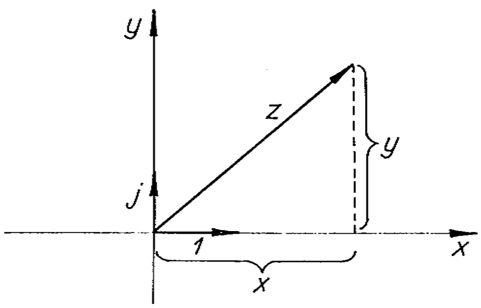
Az előző fejezetben értelmezett vektorműveletek közül a szorzásműveletek - skaláris és vektoriális egyaránt - bár jól használhatók voltak, több, a valós számok szorzásműveleténél megszokott tulajdonsággal nem rendelkeztek, többek között nem tették lehetővé osztás értelmezését a vektorok között. Ebben a fejezetben ugy fogunk műveleteket definiálni a sikvektorok halmazán, hogy a szorzás invertálható műveletté váljék. Ezáltal a sikvektorok az előbbi fejezetben értelmezett összeadással, skalárral szorzással és az uj szorzásművelettel testet alkotnak, amelyet komplex számtestnek, elemeit pedig komplex számoknak nevezzük. A komplex számok jól használhatók a fizikában, főként az elektromosságtanban, de fontos szerepet játszanak az algebrai egyenletek megoldásában is.

Tekintsük egy sik összes vektorait. Ezt a sikot a továbbiakban komplex számsiknak fogjuk nevezni. Rögzitsünk egy derékszögü koordinátarendszert a sikon, és az egységnyi abszolutértékü bázisvektorokat az eddigiektől eltérően jelöljük 1-gyel, ill. j-vel, a vektorokat aláhuzás nélküli betükkel. Igy minden vektorhoz kölcsönösen egyértelmüen hozzárendelhető 1 és j egy lineáris kombinációja:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot j,$$

vagy rövidebben:

$$z = x + yj$$



28. ábra

1.1. Definició

Komplex számoknak nevezzük a sikvektorokat, ha közöttük a következő müveleteket értelmezzük:

összeadást, kivonást és valós számmal szorzást ugy, mint ahogy azt vektoralgebrában definiáltuk (I. 2.), szorzást pedig a vektoralgebrától eltérő következő módon:

A z_1 komplex szám z_2 komplex számmal való szorzatán értjük azt a z_3 komplex számot, amelynek abszolut értéke (a vektor hossza)

$$|z_3| = |z_1| \cdot |z_2|$$

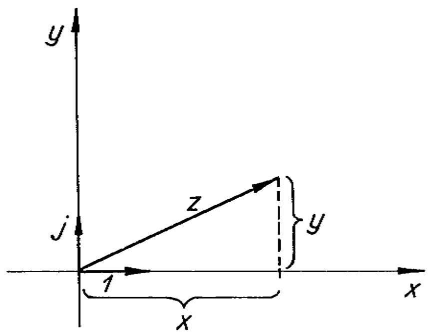
és amelynek az arkusza (az X tengely pozitiv irányával bezárt előjeles szöge)

$$\text{arc } z_3 = \text{arc } z_1 + \text{arc } z_2$$

Elnevezések, jelölések, megjegyzések

Mivel minden valós szám az "1" vektornak konstansszorosaként megkapható, a komplex számok halmaza tartalmazza a valós számokat.

A j-t képzetes (imaginárius) egységnek nevezzük, a cj alaku komplex számokat (c valós szám) tiszta képzetes számoknak nevezzük és ennek megfelelően az X tengelyt valós (reális), az Y tengelyt képzetes (imaginárius) tengelynek nevezzük.



29. ábra

A z komplex szám $x + yj$ alakját algebrai alaknak, x-et a szám valós részének, y-t a szám képzetes részének nevezzük. Az $x = |z| \cos \varphi$ és $y = |z| \sin \varphi$ egyenlőségek felhasználásával nyerjük a komplex szám trigonometrikus alakját:

$$z = |z| (\cos\varphi + j \sin\varphi), \quad \text{ahol } \varphi = \operatorname{arc} z.$$

Megjegyezzük, hogy amig a komplex szám valós és képzetes része és abszolutértéke is egyértelmüen meghatározott, arcz nem egyértelmü, mivel $\varphi + 2k\pi$ $k = 0, \pm 1, \dots$ esetén szintén arkusza z-nek és nyilvánvaló, hogy a $z = 0$ komplex számnak nincs egyértelmüen meghatározott arkusza.

1.2. Tétel

Az összeadás, kivonás és valós számmal szorzás müveletek tulajdonságai

Legyenek z, z_1, z_2, z_3 tetszőleges komplex számok, c, c_1 és c_2 valós számok. A

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$c_1 \cdot (c_2 z) = (c_1 \cdot c_2) z$$

$$(c_1 + c_2) z = c_1 z + c_2 z$$

$$c (z_1 + z_2) = c z_1 + c z_2$$

azonosságok fennállása, a müveletek azonos definiciója miatt következménye a vektoralgebra hasonló müveleti tulajdonságainak. ■

A komplex számok összegének különbségének és valós számszorosának meghatározása algebrai alakban igen egyszerü (l. vektorok összeadása és kivonása koordinátás alakban). Ha

$$z_1 = x_1 + y_1 j$$
$$z_2 = x_2 + y_2 j$$

és c valós szám, akkor

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) j$$

és

$$c z_1 = c x_1 + c y_1 j .$$

1.3. Tételek

A szorzás müvelet tulajdonságai

1. A szorzás kommutativ:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

ugyanis

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_2| \cdot |z_1| = |z_2 \cdot z_1|$$

és

$$\text{arc } (z_1 \cdot z_2) = \text{arc } z_1 + \text{arc } z_2 = \text{arc } z_2 + \text{arc } z_1 =$$
$$= \text{arc } (z_2 \cdot z_1) . \blacksquare$$

2. A szorzás asszociativ:

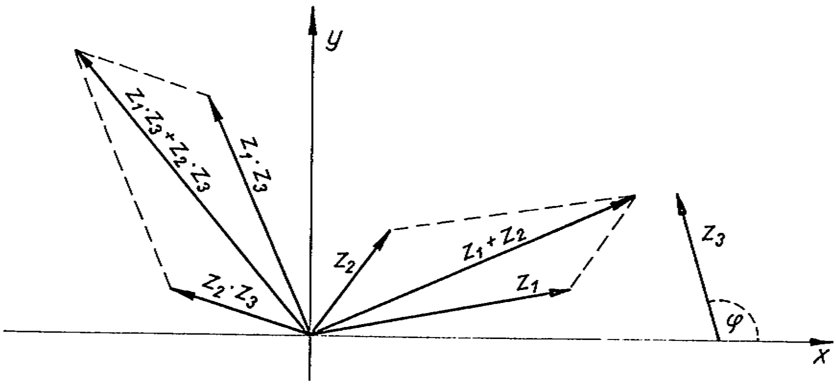
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Az olvasó a definició alapján könnyen igazolhatja. ■

3. A szorzás disztributiv:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

Mivel a valós számmal való szorzás definiciója és igy tulajdonságai ugyanazok mint a vektoralgebrában, ezért elég $|z_3| = 1$ esetére bizonyitanunk 3-at.



30. ábra

Ha $|z_3| = 1$, akkor a z_3 komplex számmal való szorzás a szorzandó vektor $\varphi = \text{arc } z_3$-mal történő elforgatását eredményezi, és igy

$$z = (z_1 + z_2) \cdot z_3 \quad \text{és} \quad z = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 ,$$

mint állitottuk (l. 30. ábrát). ∎

A komplex számok körében fennáll, - a valós számokkal egyezésben és a vektoralgebrától eltérően - hogy

1.4. Tétel

$$z_1 \cdot z_2 = 0$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha legalább az egyik tényező nulla.

Bizonyitás:

a) Ha $|z_1| = 0 \vee |z_2| = 0$, akkor

$|z_1| \cdot |z_2| = 0 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 0 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 0$.

b) ha $z_1 \cdot z_2 = 0$, akkor $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 0$, tehát z_1 és z_2 közül legalább az egyik nulla. ∎

A szorzás inverze, az osztás

Ha $z_2 \neq 0$, akkor értelmezhető

$\dfrac{z_1}{z_2}$ a szokott módon, a

$\dfrac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$ egyenlőséggel.

A szorzás definiciója alapján:

$$\text{arc } \frac{z_1}{z_2} + \text{arc } z_2 = \text{arc } z_1$$

és

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2| = |z_1| .$$

Ezekből

$$\operatorname{arc} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{arc} z_1 - \operatorname{arc} z_2$$

és

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ következik. ∎

A müveletek elvégzését könnyiti a következő fogalom.

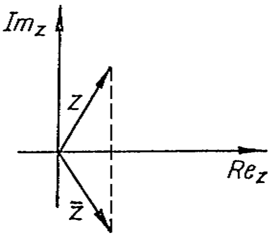
1.5. Definició

A z komplex szám konjugáltján - jele $\bar{z}$ - értjük a

$$|\bar{z}| = |z| ,$$

$$\operatorname{arc} \bar{z} = - \operatorname{arc} z$$

tulajdonságokkal rendelkező komplex számot.



31. ábra

A konjugált algebrai alakja

Legyen $z = x + y j$.
Megmutatjuk, hogy akkor $\bar{z} = x - y j$.
Ugyanis a

$$\operatorname{Re} \bar{z} = |\bar{z}| \cos \operatorname{arc} \bar{z}$$
$$\operatorname{Im} \bar{z} = |\bar{z}| \sin \operatorname{arc} \bar{z}$$

összefüggések felhasználásával, a definició alapján

$$\operatorname{Re} \bar{z} = |z| \cos (- \operatorname{arc} z) = x$$
$$\operatorname{Im} \bar{z} = |z| \sin (- \operatorname{arc} z) = -y$$

adódik, mint állitottuk.

Megjegyzés:

A $\bar{z}$ vektor a z vektor valós tengelyre vonatkozó tükörképe.

A fenti definició következménye, hogy

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

A szorzás és osztás trigonometrikus alakban végezhető el egyszerübben, közvetlenül a definició alapján, de algebrai alakban sem igényel sok számolást. Ez utóbbiról szólunk részletesebben:

Legyen

$$z_1 = x_1 + y_1 j,$$
$$z_2 = x_2 + y_2 j.$$

Figyelembe véve a szorzás disztributivitását és a definició alapján adódó $j \cdot j = -1$ egyenlőséget

$$\left(\arc (j \cdot j) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \quad |j \cdot j| = |j| \cdot |j| = 1\right),$$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j (x_1 y_2 + y_1 x_2)$ adódik.

A $\frac{z_1}{z_2}$ hányadost a következőképpen adhatjuk meg algebrai alakban, a

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

egyenlőség felhasználásával:

$$\frac{(x_1 + y_1 j)(x_2 - y_2 j)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Mivel a kettőnél több tényezős szorzás értelmes, definiálhatjuk az egész kitevőjü hatványozást és annak inverzeként a gyökvonást.

1.6. Definició

Egy z komplex szám n-edik hatványán (n természetes szám) a

$$z^n = z \cdot z \dots z \quad \text{szorzatot értjük.}$$

A szorzás definiciójából következik, hogy ha

$$z = r\,(\cos \varphi + j \sin \varphi), \text{ akkor}$$
$$z^n = r^n\,(\cos n\varphi + j \sin n\varphi)\,.$$

Megjegyzés:

Ha $z \neq 0$, akkor definiálható z^{-n}, a

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

egyenlőséggel, mint a valós számok körében.

A következőkben megmutatjuk, hogy a hatványozás invertálható müvelet.

1.7. Definició

Egy z komplex szám n-edik gyökén (n természetes szám) az olyan $\sqrt[n]{z}$ számokat értjük, amelyekre fennáll, hogy

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z\,.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges z-nek van n-edik gyöke, sőt több is.

1.8. Tétel

A $z = r\,(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ komplex számnak n darab különböző n-edik gyöke van és ezek

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{1}$$

$(k = 0, 1, \dots, n-1)$ alakban előállithatók.

Bizonyitás:

a) Először megmutatjuk, hogy (1) n-edik hatványa bármely egész k esetén z.

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = r\left[\cos\left(\varphi + 2k\pi\right) + j\sin\left(\varphi + 2k\pi\right)\right] = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) = z.$$

b) Ha k helyébe 0-tól (n-1)-ig helyettesitjük az egész számokat, a kapott gyökök mind különbözőek, ugyanis abszolut értékeik ugyan azonosak, de arkuszaik különbözőek és nem 2π vagy ennek többszörösében különböznek.

Az $\sqrt[n]{z}$ értékek arkuszai:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \ldots \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$$

c) Még meg kell mutatni, hogy a felsoroltaktól különböző érték nincs. Az nyilvánvaló - a szorzás definiciója miatt - hogy $\sqrt[n]{z}$ csak $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ alaku lehet, és mivel az abszolutértékek azonosak, elég az arkuszokat vizsgálni.

Legyen $\operatorname{arc} z_1 = \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n}$, ahol $k_1 \geq n$. Elosztva k_1-et n-nel $k_1 = h \cdot n + m$ alakban irható, ahol h, m egész és $0 \leq m < n$. Igy $\operatorname{arc} z_1 = \frac{\varphi}{n} + 2h\pi + \frac{2m\pi}{n}$ és z_1 megegyezik a $\frac{\varphi + 2m\pi}{n}$ arkuszu, a felsoroltak között szereplő komplex számmal. ∎

Megjegyzés:

1. Egy z komplex szám n-edik gyökei egy $\sqrt[n]{|z|}$ sugaru körbe irt szabályos n-szöget határoznak meg.
2. A komplex számok körében a gyökvonás - mint láttuk - korlátlanul elvégezhető.

Igy a valós számkör kibővitése azzal a haszonnal is jár, hogy a komplex számkörben negativ valós számnak is van páros kitevőjü gyöke.

Egységgyökök

1.9. Definició

$\sqrt[n]{1}$ értékeit n-edik egység-gyököknek nevezzük, $n \in N$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Az n-edik egységgyökök között mindig szerepel az 1, igy mivel a gyökök szabályos n-szöget alkotnak, minden nem valós egységgyök konjugáltja is egységgyök.

Példaként határozzuk meg a harmadik egységgyököket.

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2 k\pi}{3} + j \sin \frac{2 k\pi}{3}\ ; \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$z_1 = 1\ ; \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

A példában

$$z_2^{\,2} = z_3 \quad \text{és}$$

$$z_2^{\,3} = z_1$$

Felmerül a kérdés, hogy igaz-e általában, hogy van az egységgyökök között olyan, amelynek hatványaiként a többiek felirhatók.

A válasz: van ilyen egységgyök, a

$$z_1 = \frac{\cos 2\pi}{n} + j\frac{\sin 2\pi}{n} \text{ ilyen, ugyanis}$$

hatványaként bármely

$$z_k = \frac{\cos 2 k\pi}{n} + j\frac{\sin 2 k}{n} \quad \text{felirható:}$$

$$z_k = z_1^{\,k} \quad \text{alakban.}$$

A komplex szám exponenciális alakja

Az egyváltozós valósfüggvények körében megismertük az

$$f(x) = e^x$$

exponenciális függvényt.

Most kiterjesztjük értelmezési tartományát a tiszta imaginárius számokra, majd annak felhasználásával megismerjük a komplex szám egy ujabb, jól használható alakját.

1.10. Definició

Tetszőleges t valós szám esetén értelmezzük e^{jt}-t a következő egyenlőséggel, az un. Euler formulával:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

Tudjuk, hogy az exponenciális függvény valós kitevők esetén a következő alapvető tulajdonsággal rendelkezett:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

Megmutatjuk, hogy ezt a tulajdonságot az 1.10 definició változatlanul hagyja.

$$e^{jt_1 + jt_2} = e^{j(t_1 + t_2)} = \cos (t_1 + t_2) + j \sin (t_1 + t_2) \qquad (1)$$

(1)-ben a jobb oldal nem más, mint az egység abszolutértékü t_1 arkuszu és az egység abszolutértékü t_2 arkuszu komplex számok szorzata, vagyis

$$(\cos t_1 + j \sin t_1) \cdot (\cos t_2 + j \sin t_2) ,$$

ami az Euler formula szerint $e^{jt_1} \cdot e^{jt_2}$. Tehát valóban fennáll az

$$e^{jt_1 + jt_2} = e^{jt_1} \cdot e^{jt_2}$$

egyenlőség. ∎

Az Euler-formula felhasználásával az $r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ komplex szám $re^{j\varphi}$ alakban irható.

1.11. Definició

A z komplex szám

$$|z|\, e^{j \operatorname{arc} z} \quad \text{alakját}$$

exponenciális alaknak nevezzük.

A szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás - vagyis a trigonometrikus alakban jól végezhető müveletek - nyilván egyszerüen végezhetők exponenciális alakban:

Legyen

$$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\varphi_2} \quad \text{és} \quad z = r e^{j\varphi}.$$

Ekkor

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \;;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (\text{ha } z_2 \neq 0) \;;$$

$$z^n = r^n e^{jn\varphi} \quad \text{és}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\; e^{\frac{j(\varphi + 2k\pi)}{n}} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

2. KOMPLEX EGYÜTTHATÓS POLINOMOK

A komplex számtest azon tulajdonsága, hogy benne a gyökvonás korlátlanul elvégezhető, azt is eredményezi, hogy minden komplex együtthatós másodfoku egyenletnek van megoldása és a gyökök száma pontosan kettő (ezek lehetnek egyenlőek is).

Mig a fenti állitás a megoldóképletből közvetlenül kiolvasható, a magasabb foku polinomok gyökeire vonatkozó hasonló állitás már csak sokkal erősebb, komplex függvénytani eszközök felhasználásával bizonyitható. Ezért csak a nagyon fontos, az algebra alaptétele néven ismeretes tétel közlésére szoritkozunk.

2.1. Tétel

(Az algebra alaptétele) Minden, legalább első foku komplex együtthatós polinomnak van legalább egy komplex gyöke.

Az algebra alaptételének egyszerüen igazolható következménye, hogy a

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

(az együtthatók komplex számok, $a_0 \neq 0$) n-ed foku polinom a következő alakban irható:

$$P_n(x) = a_0 (x-x_1)^{n_1} \cdot (x-x_2)^{n_2} \dots (x-x_k)^{n_k} ,$$

ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ és ebből következik, hogy gyökei:

$x_1 \quad n_1$ multiplicitással

$x_2 \ldots n_2$ "

$x_k \quad n_k$ "

vagyis a multiplicitást figyelembe véve $P_n(x)$-nek n gyöke van. Ennek bizonyitása érdekében először belátjuk, hogy

2.2. Tétel

x_1 akkor és csak akkor gyöke a $P_n(x)$ polinomnak, ha

$P_n(x) = (x - x_1)\, P_{n-1}(x)$ alakban irható.

Bizonyitás:

a) Ha $P_n(x)$ fenti alaku, akkor

$P_n(x_1) = 0 \cdot P_{n-1}(x_1) = 0.$

b) Ha $P_n(x_1) = 0$, akkor $P_n(x) = P_n(x) - P_n(x_1)$ és ezt részletesebben irva:

$$P_n(x) = a_o(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1)$$

A jobb oldal minden tagjából kiemelhető az $x - x_1$ tényező, ezt elvégezve adódik az állitás. ∎

A 2.2. Tétel közvetlen következménye a

2.3. Tétel

Ha $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ és $a_o \neq 0$, vagyis $P_n(x)$ pontosan ennedfoku polinom, akkor

$$P_n(x) = a_o(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

un. gyöktényezős alakba irható, ahol $x_1, \ldots, x_n$ a $P_n(x)$ polinom gyökei.

Mivel egy gyöktényező többször is szerepelhet a felbontásban, az egyenlő gyöktényezőket összeszorozva adódik a

$P_n(x) = a_o (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - n_k)^{n_k}$ alak, amelyben $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

A gyöktényezős alak egyértelmüsége a 2.4. Tétel következménye.

2.4. Tétel

A $P_n(x) = a_o x^n + \dots + a_n$ és a

$Q_n(x) = b_o x^n + \dots + b_n$ polinomok

csak ugy lehetnek egyenlők, ha $a_k = b_k$ $(k = 0, \dots, n)$.

Bizonyitás:

Ha $P_n(x) = Q_n(x)$ minden x komplex szám esetén, akkor a $P_n(x) - Q_n(x)$ legfeljebb n fokszámu polinomnak fokszámánál több gyöke van, ami csak akkor lehetséges, ha $P_n(x) - Q_n(x)$ nulladfoku polinom, vagyis $a_k = b_k$ $(k = o, \dots, n)$. ■

A következőkben általánositani fogjuk a másodfoku polinomokra ismert gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket.

2.5. Tétel

(Összefüggés egy polinom gyökei és együtthatói között)

Legyen

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \tag{1}$$

Ez az alak x^n együtthatójával osztva mindig elérhető és gyökei azonosak az eredetiével.

Ha $P_n(x)$ gyökei: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (közöttük lehetnek egyezők is), akkor $P_n(x)$ a következő alakba irható:

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) \tag{2}$$

(1) és (2) összehasonlitásából a következő képletek adódnak:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$\dots$$

$$a_k = (-1)^k (x_1 \dots x_k + x_1 x_3 \dots x_{k+1} + \dots + x_2 \dots x_{k+1})$$

$$\dots$$

$$a_n = (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n \quad \blacksquare$$

Felhasználva az algebra alaptételét, a továbbiakban a valós együtthatós polinomok egy fontos tulajdonságáról lesz szó.

2.6. Tétel

Ha a valós együtthatós $P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ polinomnak gyöke a z komplex szám, akkor $\bar{z}$ is gyök.

Bizonyitás:

Felhasználjuk, hogy az összeadás, a szorzás és a hatványozás sorrendje felcserélhető a konjugáltképzéssel. Igy

$$P_n(\bar{z}) = a_o \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_n = \overline{a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} =$$

$$= \overline{P_n(z)} \quad .$$

Mivel $P_n(z) = 0$, $P_n(\bar{z}) = 0$ is fennáll. Ez volt az állitás.

Megjegyzés:

$\bar{a}_k = a_k (k=0,1,\dots,n)$ esetén, mert az együtthatók valósak.

III. MÁTRIX ALGEBRA

1. A MÁTRIX FOGALMA

A jegyzet I. 7. pontjában a lineáris transzformációkkal kapcsolatban tapasztaltuk, hogy a bázisvektorok transzformáltjai meghatározzák a tér minden vektorának a képét. A képvektorok koordinátáinak meghatározásához hasznos segédeszköznek bizonyult, hogy a bázisvektorok képeinek koordinátáit egy téglalap alaku táblázatba foglaltuk. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságára és a megoldások számára vonatkozó vizsgálatokat, a megoldások meghatározását is egyszerüsiti az együtthatókból alkotott elemséma. Tekintsük például a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Ezt az n ismeretlent tartalmazó, m egyenletből álló egyenletrendszert egyértelmüen jellemzi a következő elrendezés:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 & & \dots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}$$

Az emlitetteken kivül, hasonló elrendezések számos egyéb területen is használatosak. Ezért a továbbiakban az ilyen téglalap alaku elrendezésekkel és a közöttük értelmezhető müveletekkel foglalkozunk.

1.1. Definició

A valós vagy komplex számok

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

elrendezését mátrixnak nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a fenti mátrix $m \times n$-es méretü, ami azt jelenti, hogy m sora és n oszlopa van.

Jelölések, elnevezések:

A mátrixokat általában kétszer aláhuzott nagybetüvel jelöljük: $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, ...

Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mátrix}$$

rövidebb irásmódja:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \; ; \; i = 1, 2, \dots m \; ; \; j = 1, 2, \dots n$$

i a sorindex, j az oszlopindex.

Ha $m = n$, akkor a mátrixot n-edrendü négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük.

Az egy oszlopból álló mátrixot oszlopmátrixnak (vagy oszlopvektornak) nevezzük és

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{b}}, \quad \text{vagy } \underline{b} \text{ módon jelöljük.}$$

Hasonlóan az egy sorból álló mátrixot sormátrixnak (vagy sorvektornak) nevezzük, és

$(b_1 \ldots b_n) = \underline{\underline{b}}'$, vagy $\underline{b}'$ módon jelöljük.

Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ $i=1,2,\ldots n$ és $j=1,2,\ldots,n$ kvadratikus mátrixot diagonálmátrixnak nevezzük, ha minden $i \neq j$ esetén

$$a_{ij} = 0.$$

1.2. Definició

A sorok és oszlopok felcserélésével nyert mátrixot az eredeti mátrix transzponáltjának nevezzük.

$\underline{\underline{A}}$ transzponáltjának jele: $\underline{\underline{A}}'$

Megjegyzés:

Az 1.2. Definició indokolja a sormátrix szokásos jelölését.

1.3. Definició

Ha

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}' \quad \text{akkor}$$

$\underline{\underline{A}}$-t szimmetrikus mátrixnak nevezzük (l. 2.1. Definiciót).

Ha

$$\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}' \quad \text{akkor}$$

$\underline{\underline{A}}$-t antiszimmetrikus mátrixnak nevezzük (l. 2.4. Definiciót).

2. MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL

Mielőtt müveleteket értelmezünk a mátrixok között, meg kell mondanunk, hogy mikor nevezünk két mátrixot egyenlőnek.

2.1. Definició

Az azonos méretü - megegyező sor- és oszlopszámu -

$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ és $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$

$i = 1,2,\ldots m$
$j = 1,2,\ldots n$

mátrixok egyenlők,

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$$

ha

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i = 1, 2, \dots m \quad \text{és}$$
$$j = 1, 2, \dots n$$

Az összeadás müveletét azonos méretü mátrixok között definiáljuk.

2.2. Definició

Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ és $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ $(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$ mátrixok összegén azt az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixszal azonos méretü

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

mátrixot értjük, amelynek elemei

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Például:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A definició alapján nyilvánvaló, hogy a mátrix-összeadás rendelkezik az összeadás eddigiekben megszokott tulajdonságaival:

2.3. Tételek

A mátrix-összeadás kommutativ és asszociativ müvelet:

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$$
$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$$

Bármely $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz hozzáadva egy vele azonos méretü, csupa nulla-elemből álló mátrixot, összegnek az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot kapjuk. Ezért indokolt a

$$\underline{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ mátrixot}$$

nullmátrixnak (vagy zérusmátrixnak) nevezni.

Mátrix szorzása számmal:

2.4. Definició

Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ mátrix c-szeresén a

$c \cdot \underline{\underline{A}} = (c \cdot a_{ij})$ mátrixot értjük.

A számmal-szorzás is rendelkezik a szokott tulajdonságokkal:

2.5. Tételek

A mátrix szorzása számmal asszociativ müvelet:

$$c_1 (c_2 \underline{\underline{A}}) = (c_1 \cdot c_2) \underline{\underline{A}}$$

A mátrix összeadás és számmal-szorzás müveletek között érvényes mindkét disztributiv azonosság:

$$(c_1 + c_2) \underline{\underline{A}} = c_1 \underline{\underline{A}} + c_2 \underline{\underline{A}}$$

és

$$c (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = c \underline{\underline{A}} + c \underline{\underline{B}}$$

A számmal való szorzás müveletének felhasználásával értelmezzük az azonos méretü mátrixok kivonását:

2.6. Definició

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} + (-1) \cdot \underline{\underline{B}}$$

Az 1.7. fejezetben, praktikus meggondolások alapján definiáltuk 3x3-as mátrix szorzatát 3x1-es mátrixszal (oszlopmátrixszal) a következő módon:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 \end{pmatrix}$$

Ennek közvetlen általánositásaként értelmezzük tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ m x n-es mátrixnak oszlopmátrixszal való szorzatát. A fenti módon csak akkor végezhető el a szorzás, ha az oszlopmátrix sorainak a száma megegyezik az $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszlopainak a számával.

2.7. Definició

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\, x_1 + \dots + a_{2n}\, x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + \dots + a_{mn}\, x_n \end{pmatrix}$$

Végül további általánositásként értelmezzük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{\underline{B}}$ mátrixszal való szorzatát oly módon, hogy a szorzat mátrix oszlopait at $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{\underline{B}}$ oszlopaival való szorzatai adják. Ekkor nyilvánvaló, hogy egy m x n méretü mátrixot n x p méretü mátrixszal lehet megszorozni.

2.8. Definició

Az

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \quad (i=1,\dots,m; \quad j=1,\dots,n)$$
$$\underline{\underline{B}} = (b_{jk}) \quad (k=1,\dots,p)$$

mátrixok szorzatán azt az

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

mátrixot értjük, amelynek elemei:

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \dots + a_{in}\, b_{nk}.$$

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A mátrix szorzás tulajdonságai már nem mindenben egyeznek a valós számok szorzásának tulajdonságaival:

2.9. Tételek

1. A szorzás nem kommutativ

Bizonyitás:

Legyen pl.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ekkor

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix},$$

tehát

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a tényezőket felcserélve a szorzás többnyire már el sem végezhető.

2. A szorzás asszociativ müvelet

Az $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ mátrixok legyenek olyan méretüek, hogy $\underline{\underline{A}}$ szorozható legyen $\underline{\underline{B}}$-vel és $\underline{\underline{B}}$ szorozható legyen $\underline{\underline{C}}$-vel.
Ekkor

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$$

Bizonyitás:

Legyen

$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ m x n-es mátrix

$\underline{\underline{B}} = (b_{jk})$ n x r-es mátrix

$\underline{\underline{C}} = (c_{kt})$ r x s-es mátrix

Az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ szorzat egy m x r méretü mátrix, amelynek i-edik sorában a k-adik elem a következő:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots r \quad \text{és} \\ i = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

Ennek felhasználásával az $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{C}}$ mátrix i-edik sorának t-edik elemét a következő összeg adja:

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kt}\,.$$

Ezt átalakitva:

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_{jk}\right)c_{kt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk}\,c_{kt}\right)a_{ij}\,,$$

de az utóbbi összeg éppen az $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{C}})$ mátrix i-edik sorának t-edik eleme. ∎

3. <u>A szorzás disztributiv</u>

Ha az $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}$ és az $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{C}}$ szorzások elvégezhetők és a szorzatok összeadhatók, akkor

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$$

A bizonyitást az olvasóra bizzuk. ∎

A szorzás definiciójából következik, hogy ha egy $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot megszorzunk egy, a méretének megfelelő

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad i=j \\ 0 & \text{ha} \quad i\neq j \end{cases} \quad \text{elemü}$$

$\underline{\underline{E}} = (e_{ij})$ kvadratikus mátrixszal, akkor

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

Ezért indokolt a következő

<u>2.10. Definició</u>

Az $\underline{\underline{E}} = (e_{ij})$ $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,n)$;

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad i=j \\ 0 & \text{ha} \quad i\neq j \end{cases}$$

kvadratikus mátrixot <u>egységmátrix</u>nak nevezzük.

A valós és komplex számok algebrája és a mátrix-algebra müveletei közötti analógiát vizsgálva felmerül a kérdés, értelmezhető-e reciprok képzés a mátrixok között. Milyen feltételek mellett és hogyan oldhatók meg adott $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén az

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{mátrixegyenletek?}$$

Az nyilvánvaló, hogy olyan mátrix, amellyel $\underline{\underline{A}}$-t jobbról és balról is szorozva ugyanazt az $\underline{\underline{E}}$-t kapjuk, csak akkor lehet, ha $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus.

2.11. Definició

Az $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot <u>invertálhatónak</u> nevezzük, ha van olyan $\underline{\underline{X}}$ mátrix, amely az

$$\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{és}$$

$$\underline{\underline{X}}\;\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{egyenletet kielégiti.}$$

Az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot $\underline{\underline{A}}$ <u>inverzének</u> nevezzük.

2.12. Tétel

Ha az $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixnak van inverze, akkor az egyértelmü.

<u>Bizonyitás:</u>

Legyen $\underline{\underline{X}}_1$ és $\underline{\underline{X}}_2$ $\underline{\underline{A}}$ inverze, ekkor

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{E}}\,.$$

Szorozzunk balról $\underline{\underline{X}}_2$-vel

$$\underline{\underline{X}}_2\,(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_1) = \underline{\underline{X}}_2$$

Az asszociativ azonosságot felhasználva:

$$(\underline{\underline{X}}_2\,\underline{\underline{A}})\,\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_1 \quad \text{és igy}$$

$$\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2 \quad \blacksquare$$

<u>Jelölés:</u>

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzét $\underline{\underline{A}}^{-1}$-gyel jelöljük.

Az inverz mátrix létezésének feltételét és meghatározásának módját később tárgyaljuk.

3. A MÁTRIXOK ELEMI TRANSZFORMÁCIÓI

A további tárgyalásunkban fontos szerepet játszanak a következő mátrixátalakitások:

1. Egy mátrix két sorának, ill. oszlopának felcserélése.

2. Egy mátrix valamely sorának, ill. oszlopának szorzása egy számmal.

3. Egy mátrix valamely sora, ill. oszlopa számszorosának a mátrix egy másik sorához, ill. oszlopához való hozzáadása. Az 1., 2., 3. alatt felsorolt átalakitásokat nevezzük a mátrix elemi sor-, ill. oszloptranszformációinak.

A következőkben megmutatjuk, hogy a felsorolt transzformációk mindegyike végrehajtható az eredeti mátrixnak egy-egy speciális kvadratikus mátrixszal történő szorzásával is.

3.1. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad n \times n\text{-es}$$

egységmátrix. Megmutatjuk, hogy ha az $\underline{\underline{E}}$ i. és j. oszlopának felcserélésével nyert $\underline{\underline{P}}$ mátrixszal jobbról megszorozzuk $\underline{\underline{A}}$-t, annak az i. és j. oszlopa felcserélődik.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad & \quad & \underbrace{i} & \quad & \underbrace{j} & \quad & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1i} \dots & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mi} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \begin{matrix} \underbrace{1} \dots & \underbrace{i} \dots & \underbrace{j} \dots & \underbrace{n} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 \dots & 0 \dots & 0 \dots & 0 \\ 0 \dots & 0 \dots & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 1 \dots & 0 \dots & 0 \\ 0 \dots & 0 \dots & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \dots \underbrace{1} \\ \dots \underbrace{i} \\ \\ \dots \underbrace{j} \\ \dots \underbrace{n} \end{matrix} \end{array}$$

a szorzást a definició alapján elvégezve:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}\ldots} & i & j & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11}\ldots & a_{1j}\ldots & a_{1i}\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\ldots & a_{mj}\ldots & a_{mi}\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

adódik, mint állitottuk.

3.2. Készitsünk olyan $\underline{\underline{M}}$ mátrixot, amellyel az $m \times n$-es $\underline{\underline{A}}$-t megszorozva az i. sora c-vel szorzódik.

A keresett $\underline{\underline{M}}$ mátrix az $m \times n$-es $\underline{\underline{E}}$ mátrixból ugy jön létre, hogy annak i. sorát c-vel megszorozzuk. Az $\underline{\underline{M}}$ mátrixszal $\underline{\underline{A}}$-t balról megszorozva létrejön a kivánt transzformáció.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & & i & n \\ \hline 1 & 1 & 0\ldots & 0\ldots & 0 \\ & 0 & 1\ldots & 0\ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ i & 0 & 0\ldots & c\ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 0 & 0\ldots & 0\ldots & 1 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ca_{i1} & \ldots & ca_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{mint állitottuk.} \ \blacksquare$$

3.3. Készitsünk olyan $\underline{\underline{D}}$ mátrixot, amellyel az $m \times n$-es $\underline{\underline{A}}$ mátrixot jobbról szorozva i. oszlopához hozzáadódik a j. oszlop c-szerese.

A keresett $\underline{\underline{D}}$ mátrix az $n \times n$-es $\underline{\underline{E}}$ mátrixból ugy jön létre, hogy annak i. oszlopához hozzáadjuk j. oszlopának c-szeresét. Az egyszerübb jelölés miatt $i = 1$; $j = 2$ esetre végezzük el a szorzást és mutatjuk meg ezzel az állitás helyességét.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + c\,a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + c\,a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots & & \\ a_{m1} + c\,a_{m2} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{mint állitottuk.} \blacksquare$$

4. MÁTRIXOK PARTICIONÁLÁSA, HIPERMÁTRIXOK

A mátrix fogalmát általánositjuk a továbbiakban. Először olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelyeknek elemei is mátrixok. Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mátrixot,}$$

ha az oszlopait - amelyek mindegyike egy-egy $m \times 1$-es un. oszlopmátrix -
$\underline{\underline{a}}_1, \underline{\underline{a}}_2, \dots \underline{\underline{a}}_n$ módon jelöljük, a következő tömörebb alakba irhatjuk:

$$(\underline{\underline{a}}_1, \dots, \underline{\underline{a}}_n)$$

Az igy nyert elrendezés elemei azonban már nem számok, hanem maguk is mátrixok. Ezt a mátrix elemü mátrixot hipermátrixnak nevezzük és azt mondjuk, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot hipermátrixszá particionáltuk.

<u>4.1. Definició</u>

Az

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{11} & \dots & \underline{\underline{A}}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{A}}_{m1} & \dots & \underline{\underline{A}}_{mn} \end{pmatrix}$$

elrendezést, amelynek $\underline{\underline{A}}_{ij}$ elemei (i=1, 2, ..., n; j=1, 2, ..., m) mátrixok és az egy sorban levő mátrixok sorainak, illetve az egy oszlopban állók oszlopainak a száma megegyezik, hipermátrixnak nevezzük.

Az $\underline{\underline{A}}_{ij}$ mátrixok természetesen lehetnek sor- vagy oszlopmátrixok is, sőt speciálisan egyelemü mátrixok, azaz számok is.

Particionáljuk hipermátrixszá az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ mátrixot.}$$

$\underline{\underline{A}}$-ból több hipermátrixot készithetünk, ezek közül néhányat felirunk:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ (0 \quad 5) & (-1 \quad 2) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 0 \quad 3) \\ (2 \quad -4 \quad 1 \quad 1) \\ (0 \quad 5 \quad -1 \quad 2) \end{pmatrix}.$$

A leggyakrabban ez utóbbi két alakot használjuk, vagyis a mátrixot oszlopmátrixainak sormátrixává, illetve a sormátrixainak oszlopmátrixává particionáljuk.

Megjegyzés:

1. Mint már a bevezetőben tettük, az oszlopmátrixot:

   $$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{a}}, \quad \text{vagy} \quad \underline{a}$$

   a sormátrixot

   $$(b_1 \dots b_n) = \underline{\underline{b}}' \quad \text{vagy} \quad \underline{b}'$$

   módon jelöljük, nem véletlenül emlékeztetve a vektorok jelölésére. (Lásd a IV.1.3. példákat.)
2. Az eredeti mátrix és a particionált alakok között különbséget teszünk. Ezt indokolja például, hogy a hipermátrixok elemei között a szorzás már nem kommutativ, ellentétben a mátrixokéval.
3. A hipermátrix fogalmat lehet tovább általánositani, megengedve, hogy az elemek hipermátrixok legyenek.

4.2. Müveletek hipermátrixok között

1. Összeadás

Két hipermátrix összeadható, ha sor- és oszlopszámuk azonos és megfelelő elemeik összeadhatók.

Igy az

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{11} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{\underline{A}}_{m1} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \cdots & \underline{\underline{B}}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{\underline{B}}_{m1} & \cdots & \underline{\underline{B}}_{mn} \end{pmatrix}$$

hipermátrixok összeadhatók, ha az

$$\underline{\underline{A}}_{ij} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{B}}_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \qquad \text{mátrixok}$$

összeadhatók és a két hipermátrix összege az

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{11} + \underline{\underline{B}}_{11} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{1n} + \underline{\underline{B}}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{\underline{A}}_{m1} + \underline{\underline{B}}_{m1} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{mn} + \underline{\underline{B}}_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hipermátrix.}$$

Az összeadás módjából következik, hogy ha a hipermátrixok összeadhatók, akkor a belőlük nyert mátrixok is összeadhatók és összegük a hipermátrixok összegéből nyert mátrix.

Például:

$$(\underline{\underline{a}}_1 \ \cdots \ \underline{\underline{a}}_n) + (\underline{\underline{b}}_1 \ \cdots \ \underline{\underline{b}}_n)$$

elvégezhető, ha az

$$\underline{\underline{a}}_i \quad \text{és} \quad \underline{\underline{b}}_i$$

oszlopmátrixok sorainak száma azonos ($i=1, 2, \dots n$), és akkor az összeg:

$$(\underline{\underline{a}}_1 + \underline{\underline{b}}_1 \ \cdots \ \underline{\underline{a}}_n + \underline{\underline{b}}_n).$$

2. Szorzás

Két hipermátrix összeszorozható, ha a bal oldali tényező oszlopszáma megegyezik a jobb oldali sorszámával és a megfelelő elemek összeszorozhatók.

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{11} & \dots & \underline{\underline{A}}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{A}}_{m1} & \dots & \underline{\underline{A}}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \dots & \underline{\underline{B}}_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{B}}_{n1} & \dots & \underline{\underline{B}}_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{11}\underline{\underline{B}}_{11} + \dots + \underline{\underline{A}}_{1n}\underline{\underline{B}}_{n1} & \dots & \underline{\underline{A}}_{11}\underline{\underline{B}}_{1k} + \dots + \underline{\underline{A}}_{1n}\underline{\underline{B}}_{nk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{A}}_{m1}\underline{\underline{B}}_{11} + \dots + \underline{\underline{A}}_{mn}\underline{\underline{B}}_{n1} & \dots & \underline{\underline{A}}_{m1}\underline{\underline{B}}_{1k} + \dots + \underline{\underline{A}}_{mn}\underline{\underline{B}}_{nk} \end{pmatrix}$$

Például:

ha az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixok összeszorozhatók

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{a}}_1 \dots \underline{\underline{a}}_n) \begin{pmatrix} \underline{\underline{b}}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\underline{b}}'_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{a}}_1 \underline{\underline{b}}'_1 + \dots + \underline{\underline{a}}_n \underline{\underline{b}}'_n$$

5. KITŰZÖTT FELADATOK

1. Konstruáljon tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz olyan mátrixot, amellyel az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot megszorozva, annak i. és j. sora felcserélődik.

2. Készitsen olyan mátrixot, amellyel egy $\underline{\underline{A}}$ mátrixot megszorozva annak i. sorához hozzáadódik a j. sor c-szerese.

3. Mutassa meg, hogy van olyan $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$ négyzetes mátrix, amelyre

$$\underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{0}} \quad (k > 0, \text{ egész}).$$

Megjegyzés:

$$\underline{\underline{A}}^k = \overset{1}{\underline{\underline{A}}} \cdot \overset{2}{\underline{\underline{A}}} \dots \overset{k}{\underline{\underline{A}}}.$$

4. Mutassa meg, hogy

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}'$$

és

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}' \cdot \underline{\underline{A}}'$$

5. Mutassa meg, hogy

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$$

IV. VEKTORTEREK

1. A VEKTORTÉR FOGALMA

E jegyzet I. fejezetében a térvektorokkal foglalkoztunk és közöttük több müveletet értelmeztünk. Vegyük most jobban szemügyre ezek közül az összeadást és a számmal szorzást. Mindkét müveletet korlátlanul és egyértelmüen lehetett elvégezni a vektorok halmazában, másrészt az összeadás és a számmal szorzás rendelkezett a valós számok megfelelő müveleteinél megszokott tulajdonságokkal a kommutativitással, az asszociativitással és a disztributivitással. A matematika számos területén találkozunk olyan objektumokkal, amelyek között fentieknek megfelelő, velük azonos tulajdonságu müveletek szerepelnek. Álljon itt csupán példaként az n-ed rendü mátrixok halmaza a mátrixösszeadás és számmal szorzás müveletekkel, és az egy intervallumon folytonos függvények halmaza, a szokott függvényösszeadás és számmal szorzás müveletekkel. Kézenfekvő gondolat, hogy ezeket a müveletekkel ellátott halmazokat ugy is érdemes vizsgálni, hogy elvonatkoztatunk a halmaz elemeinek konkrét tulajdonságaitól, ezzel elérve azt, hogy eredményeink minden olyan halmazra érvényesek legyenek, amely a fenti tulajdonságu müveletekkel rendelkezik. Az igy kapott matematikai modellt - tehát egy halmazt, amelynek egyedi konkrét tulajdonságait figyelmen kivül hagyjuk és csak az elemei között értelmezett müveleteket és azok tulajdonságait tekintjük - algebrai strukturának nevezzük. Az absztrakt algebra ilyen algebrai strukturák vizsgálatával foglalkozik. A fenti példákban szereplő algebrai strukturát vektortérnek nevezzük. Az algebrának a vektorterekkel, euklideszi terekkel, ezek operátoraival foglalkozó ága a lineáris algebra, amelyet a jegyzet további része tartalmaz. A lineáris algebra igen széleskörüen alkalmazható, többek között a differenciálegyenletek, integrálegyenletek, potenciálelmélet területén.

1.1. Definició

Legyen K a valós vagy komplex számtest. A V halmazt a K számtest feletti vektortérnek nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:

I. V elemei - az ugynevezett vektorok - között értelmezve van egy összeadásnak nevezett müvelet a következő tulajdonságokkal:

1. V bármely $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ eleméhez egyértelmüen tartozik egy

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V$ vektor

2. Az összeadás kommutativ:

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$

3. Az összeadás asszociativ:

$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$

4. V-nek van un. nulleleme:
Van $\underline{0} \in V$, hogy bármely $\underline{v} \in V$-re

$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$

5. V bármely elemének van ellentettje (additiv inverze):
Bármely $\underline{v} \in V$-hez van $-\underline{v}$, amelyre

$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

II. A K elemei - az ugynevezett skalárok - és a V elemei között értelmezett egy müvelet, amelyet <u>skalárral szorzásnak</u> nevezünk, a következő tulajdonságokkal:

1. Bármely $\underline{v} \in V$ és $c \in K$-hoz egyértelmüen tartozik egy

$c \cdot \underline{v} \in V$ vektor

2. A skalárral szorzás asszociativ:

$v \in V, \quad c_1, \quad c_2 \in K$

$(c_1 \cdot c_2) \cdot \underline{v} = c_1 \cdot (c_2 \cdot \underline{v})$

3. Fennáll a disztributivitás:

$c, c_1, c_2 \in K \; ; \quad \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

a) $c(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = c\,\underline{v}_1 + c\,\underline{v}_2$

b) $(c_1 + c_2)\,\underline{v} = c_1\,\underline{v} + c_2\,\underline{v}$

4. Egységgel szorozva a vektort, nem változik:

$1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

Megjegyzés:

A fenti axiómákkal - un. axiómarendszerrel - definiált vektorteret szokás lineáris térnek is, lineáris halmaznak is nevezni.

Az axiómák néhány egyszerü következménye

1. A V vektortérnek egy nulleleme van.

Bizonyitás:

Legyen $\underline{0}_1$ és $\underline{0}_2$ nulleleme V-nek.

$\underline{0}_1 + \underline{0}_2 = \underline{0}_1$, mert $\underline{0}_2$ nullelem,

$\underline{0}_2 + \underline{0}_1 = \underline{0}_2$, mert $\underline{0}_1$ nullelem.

Fentiekből az összeadás egyértelmüségét és a kommutativitást felhasználva következik, hogy

$\underline{0}_1 = \underline{0}_2$. ∎

2. A nullvektor és a nulla skalár rendelkezik a következő két megszokott tulajdonsággal:

a) tetszőleges $c \in K$ esetén
$c \cdot \underline{0} = \underline{0}$

b) tetszőleges $\underline{v} \in V$ esetén
$0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

Bizonyitás:

a) $c\underline{0} + (-c\underline{0}) = \underline{0}$, igy
$\underline{0} = c(\underline{0} + \underline{0}) + (-c\underline{0}) = c\underline{0} + \underbrace{c\underline{0} + (-c\underline{0})}_{\underline{0}}$,

tehát $c\underline{0} = \underline{0}$

b) $0\underline{v} + (-0\underline{v}) = \underline{0}$, igy
$\underline{0} = (0 + 0)\,\underline{v} + (-0\underline{v}) = 0\underline{v} + \underbrace{0\underline{v} + (-0\underline{v})}_{\underline{0}}$,

tehát $0\underline{v} = \underline{0}$

3. Az additiv inverz egyértelmü

Bizonyitás:

Legyen $\underline{v}$ inverze $-\underline{v}_1$ és $-\underline{v}_2$.

Ekkor $-\underline{v}_1 + \underline{v} = \underline{0}$ (1)

$\underline{v} + (-\underline{v}_2) = \underline{0}$ (2)

(1) mindkét oldalához adjuk hozzá $-\underline{v}_2$-t:

$(-\underline{v}_1 + \underline{v}) + (-\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$ (3)

(3)-ból az asszociativitást és (2)-t felhasználva következik, hogy

$-\underline{v}_1 = -\underline{v}_2$. ∎

Megjegyzés:

Az additiv inverz segitségével értelmezhető a kivonás müvelet is.

1.2. Definició

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ A két vektor különbsége:

$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{v}_1 + (-\underline{v}_2)$.

Nézzünk néhány konkrét példát vektorterekre:

1.3. Példák

1. K: a valós számok halmaza

V: a valós számokból álló rendezett számennesek halmaza.

V vektortér K felett, ha a következőképpen definiáljuk a müveleteket:
Az összeadás:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in V$$

A számmal szorzás:

$$c\,\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} c\,x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c\,x_n \end{pmatrix} \in V$$

Az olvasó ellenőrizze, hogy a többi definiáló axiómák is teljesülnek.

2. A valós együtthatós polinomok a valós számtest felett vektorteret alkotnak, ha az összeadás a polinomok összeadása és a skalárral szorzás a tagonkénti szorzás.

3. Az n-edfoku polinomok a fenti müveletekre nem alkotnak vektorteret, mert

$$P_n(x) + Q_n(x)$$

fokszáma lehet kisebb mint n és igy az összeadás kivezet a halmazból.

4. A legfeljebb n-edfoku polinomok a 2. alatti müveletekre vektorteret alkotnak.

5. A konvergens valós számsorozatok vektorteret alkotnak a valós számtest felett, ha az összeadást:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

a számmal szorzást:

$$c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n)$$

módon értelmezzük.

6. Egy $[a,b]$ intervallumon, differenciálható függvények vektorteret alkotnak a függvényösszeadás és számmalszorzás müveletekre.

2. ALTÉR LINEÁRIS FÜGGÉS, BÁZIS, DIMENZIÓ

Tekintsük a térvektorok halmazának tetszőleges két, nem párhuzamos vektora által kifeszitett sikot. Ennek vektorai szintén vektorteret alkotnak, amely az eredeti vektortérnek részhalmaza. Hasonlóan, a legfeljebb ötödfoku polinomok vektorterének a legfeljebb harmadfoku polinomok olyan részhalmazát alkotják, amely szintén vektortér. Az ilyen részhalmazt altérnek nevezzük.

2.1. Definició

Egy V vektortér U részhalmazát a V vektortér egy **alterének** nevezzük, ha vektorteret alkot a V-ben értelmezett müveletekre nézve.

2.2. Tétel

A V vektortér U nem üres részhalmaza akkor és csak akkor altere V-nek, ha tetszőleges $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ és $c_1, c_2 \in K$ esetén $c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 \in U$ teljesül.

Bizonyitás:

a) Ha U V altere, akkor $\forall$ $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ és $c_1, c_2 \in K$ esetén $c_1 \underline{u}_1 \in U$, $c_2 \underline{u}_2 \in U$ és akkor $c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 \in U$, tehát a feltétel szükséges.

b) Legyen $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ U két tetszőleges eleme és tegyük fel, minden lineáris kombinációjuk benne van U-ban.

Akkor

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$$

és

$$c \cdot \underline{u}_1 \in U, \quad \text{hiszen}$$

mindkettő lineáris kombinációja $\underline{u}_1$ $\underline{u}_2$-nek. Tehát U zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra. A müveleti tulajdonságok teljesülése abból következik, hogy $U \subset V$ és V vektortér a fenti összeadásra és skalárral szorzásra. U-nak van nulleleme, mert

$$0 \cdot \underline{u}_1 \in U \quad \text{és}$$

$\forall$ $\underline{u} \in U$-nak van ellentettje, mert $(-1)\, \underline{u} = -\underline{u}$ miatt az ellentett is tekinthető lineáris kombinációnak. A feltétel tehát elégséges is. ∎

A fenti tétel alapján belátható, hogy minden vektortérnek altere önmaga és altere a csak a nullvektort tartalmazó egyelemü vektortér.

A térvektorok körében triviális, hogy két vektor lineáris kombinációinak a halmaza altér (sik, ha a két vektor nem párhuzamos, egyenes, ha a két vektor párhuzamos).

Megmutatjuk, hogy ez minden vektortérben igaz.

2.3. Tétel

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_n \in V$, akkor a K-beli skalárokkal képzett összes lineáris kombinációjuk halmaza V altere, és ez V legszükebb olyan altere, amely a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokat tartalmazza.

Bizonyitás:

a) Két lineáris kombináció összege is lineáris kombináció:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{n} d_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i) \underline{v}_i$$

lineáris kombináció skalárszorosa is lineáris kombináció:
ha $k \in K$, akkor

$$k \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} k c_i \underline{v}_i ,$$

tehát a lineáris kombinációk halmaza eltér.

b) Az altér azért a legszükebb a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszert tartalmazó alterek közül, mert bármely altérnek a benne levő vektorok lineáris kombinációit tartalmaznia kell.

Elnevezés:

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációinak a halmazát e vektorok által generált vektortérnek nevezzük.

2.4. Példák (példák altérre)

1^o Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett egyváltozós függvények vektorterének altere a folytonos függvények vektortere.

2^o A végtelen valós számsorozatok vektorterének alterei:

a) a korlátos sorozatok vektortere,

b) a konvergens sorozatok vektortere.

3^o A 2x2-es kvadratikus mátrixok vektorterében alteret alkotnak az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ alaku mátrixok.

4^o Egy intervallumon folytonos függvények vektorterében alteret alkotnak azok a függvények, amelyeknek az intervallumon vett integrálja nulla.

Alapvető fontosságuak az absztrakt vektortérben a vektoralgebrában már megismert lineáris összefüggés, lineáris függetlenség fogalmak.

2.5. Definició

Legyen V vektortér a K számtest felett. Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ elemek lineárisan összefüggőek, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok K-ban, amelyek nem mind nullák, és

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

Ha a nullvektort a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vektoroknak csak a $c_i = 0$ $(i=1, \ldots, n)$ együtthatókkal képzett lineáris kombinációja állítja elő (csak az ún. "triviális" előállítás létezik), akkor a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük.

2.6. Példák

1^{o} Legyen V az 1.3. 1^{o} példabeli vektortér.

A
$$\underline{v}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

vektorrendszer lineárisan független, ugyanis a

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

2^0 Tekintsük a folytonos függvények vektorterét, a valós számok halmaza felett. Legyen

$$f(x) = \sin x \; ; \; g(x) = \cos x.$$

Lineárisan összefüggő, vagy független rendszert alkotnak-e az f, g vektorok?

A vektortér nulleleme az azonosan nullaértékü függvény, tehát azt vizsgáljuk, hogy a

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x \equiv 0$$

egyenlőség teljesülhet-e ugy is, hogy az együtthatók nem mind nullák.

a) Ha $c_1 = 0$, akkor

$c_2 \cos x \equiv 0$ csak ugy lehet, ha $c_2 \equiv 0$.

b) Ha $c_1 \neq 0$, akkor

$\operatorname{tg} x \equiv -\dfrac{c_2}{c_1}$ kellene, hogy teljesüljön minden olyan x-re, amelyre $\cos x \neq 0$. Ilyen c_1 és c_2 nincs, tehát b) lehetetlen.

Igy $c_1 = c_2 = 0$. A két vektor független.

A következőkben megvizsgáljuk lineárisan független, ill. összefüggő vektorrendszerek néhány alapvető tulajdonságát.

2.7. Tételek

1^0 Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok között van nullvektor, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő.

2^0 Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok között van két egyenlő, akkor a rendszer lineárisan összefüggő.

3^0 Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor a vektortér bármely vektorát hozzávéve, a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}$ vektorok is lineárisan összefüggőek.

4^0 Lineárisan független $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszerből tetszőleges vektort elhagyva, a rendszer független marad.

5^0 A $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha van közöttük olyan vektor, amely a többiek lineáris kombinációjaként előállítható.

6^o Ha a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan független (függő) vektorrendszer bármely vektorának skalárszorosát hozzáadjuk egy másik vektorához, az uj vektorrendszer marad változatlanul lineárisan független (függő).

A felsorolt tételek közül - tekintettel egyszerüségükre - az 1^o, 2^o tételt nem bizonyitjuk, a bizonyitást feladatként tüzzük ki az olvasónak.

Bizonyitások:

3^o Ha van olyan $c_1, \dots, c_k \in K$, nem mind nulla skalár, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{v}_i = \underline{0}, \text{ akkor } c_{k+1} = 0 \text{ választással}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \underline{v}_i = \underline{0} \text{ is fennáll.}$$

Mivel nem minden együttható nulla, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{k+1}$ rendszer lineárisan összefüggő. ∎

4^o Ha ugyanis a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ rendszerből vektort elhagyva összefüggő rendszert kapnánk, akkor 3^o alapján az eredeti rendszernek összefüggőnek kellett volna lennie, de arról tudjuk, hogy független. ∎

5^o a) Ha $\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{v}_i = \underline{0}$ ugy, hogy van nullától különböző együttható, pl. $c_j \neq 0$, akkor a $\underline{v}_j$ vektor kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként:

$$\underline{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\underline{v}_1 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\underline{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\underline{v}_{j+1} - \dots - \frac{c_k}{c_j}\underline{v}_k .$$

b) Ha valamelyik vektora a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ rendszernek kifejezhető a többiekkel, pl.

$$\underline{v}_i = c_1 \underline{v}_1 + \dots + c_{i-1} \underline{v}_{i-1} + c_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + c_k \underline{v}_k ,$$

akkor a nullvektor előállitható

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \ldots + c_{i-1} \underline{v}_{i-1} - \underline{v}_i + c_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + c_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

alakban, amelyben $\underline{v}_i$ együtthatója nem nulla, tehát a rendszer lineárisan összefüggő. ■

6^o Tegyük fel először, hogy a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_j, \ldots \underline{v}_k \tag{1}$$

vektorrendszer lineárisan független.

Megmutatjuk, hogy akkor a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_i + a\,\underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_j, \ldots \underline{v}_k \tag{2}$$

vektorrendszer is független.

Állitsuk elő a $\underline{0}$-t a (2) rendszer segitségével:

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \ldots + c_i(\underline{v}_i + a\,\underline{v}_j) + \ldots + c_j \underline{v}_j + \ldots + c_k \underline{v}_k = \underline{0} \tag{3}$$

átrendezve:

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \ldots + c_i \underline{v}_i + (c_i a + c_j) \underline{v}_j + \ldots + c_k \underline{v}_k = \underline{0} \tag{4}$$

Az (1) rendszer lineáris függetlensége miatt (4) együtthatói mind nullák:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0, \ldots,\ c_i = 0,\quad c_i a + c_j = 0, \ldots,\ c_k = 0\,,$$

de ebből következik, hogy $c_j = 0$ és akkor (3) együtthatói is mind nullák, ami a (2) vektorrendszer lineáris függetlenségét jelenti.

Az állitás másik része ebből már nyilvánvaló. Ha (1) összefüggő rendszer (2) nem lehet független, mivel (2)-ből (1)-et olyan átalakitással nyerjük (a j-edik vektor (-a)-szorosát adva az i-edikhez), amely meghagyja a függetlenséget.

A 2.3. tételben arról volt szó, hogy egy vektortér valamely vektorrendszerének lineáris kombinációi alteret alkotnak. Ez az altér lehet valódi, de lehet, hogy maga az eredeti vektortér. Például a térvektorok vektorterében $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előállitható. Amennyiben egy vektorrendszer generálja a vektorteret, felmerül a kérdés, hogy lehet-e kevesebb vektorral is előállitani a vektortér vektorait. Megmutatjuk, hogy minden véges sok független vektort tartalmazó vektortér esetén megadható egy szám (dimenzió), amely azt mutatja, hogy hány lineárisan független vektor szükséges V generálásához.

2.8. Definició

A $B: \underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszert ($\underline{b}_i \in V$ $i=1,2,\ldots,n$) a V vektortér bázisának nevezzük, ha a vektorrendszer lineárisan független és V minden vektorát lineáris kombinációként előállitja.

2.9. Tétel

Ha B a V vektortér egy bázisa, akkor $\forall\, \underline{v} \in V$ egyértelműen állitható elő a bázis vektorainak lineáris kombinációjaként.

Bizonyitás:

Az állitás a bázisvektorok lineáris függetlenségének következménye.

Legyen $B: \underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ és $\underline{v}$ két előállitása:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{b}_i \qquad (1)$$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} d_i \underline{b}_i \qquad (2)$$

(1)-ből (2)-t kivonva a $\underline{0}$ egy előállitását kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i)\, \underline{b}_i = \underline{0} \qquad (3)$$

A bázisvektorok lineáris függetlenségéből

$c_i - d_i = 0$, vagyis

$c_i = d_i$ következik, $i = (1, 2, \ldots n)$,

tehát az előállitás egyértelmü. ∎

2.10. Tétel

Ha a V vektortér egy bázisához V bármely elemét hozzávesszük, összefüggő vektorrendszert kapunk.

Bizonyitás:

Legyen $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ egy bázis és $\underline{v} \in V$ vektor a vektortér tetszőleges eleme.

$$\underline{v} = \sum^{n} v_i \underline{b}_i \text{ alakban előállitható.}$$

Ebből

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i - \underline{v} = 0,$$

vagyis a lineáris összefüggés következik. ■

2.11. Tétel

Ha a $G : \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan összefüggő vektorrendszer generálja a V vektorteret, akkor a vektorrendszerből kiválasztható egy bázis.

Bizonyitás:

1^o Ha a generátorrendszer minden vektora nullvektor, akkor a V vektortérnek csak egy eleme van, a $\underline{0}$.

2^o Ha van olyan $\underline{v}_i \in G$, hogy $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ és az összes többi generáló vektor $\underline{v}_i$-vel összefügg, akkor minden $\underline{v} \in V$ $\underline{v} = c\,\underline{v}_i$ alaku, tehát találtunk egyelemü bázist.

3^o Ha van olyan $\underline{v}_j$ elem, amely $\underline{v}_i$-vel lineárisan független rendszert alkot, de bármely harmadik vektor a $\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k$ rendszerből lineárisan összefügg a $\underline{v}_i$, $\underline{v}_j$ vektorpárral, akkor V minden eleme $\underline{v}_i$ és $\underline{v}_j$ segitségével lineáris kombinációként előállitható. Ekkor találtunk 2 elemü bázist. Nyilvánvaló, hogy az eljárás legfeljebb k lépésben végetér, mivel $\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k$ lineáris összefüggése miatt legfeljebb $k - 1$ lineárisan független elem van köztük. Igy a fenti konstrukcióval kiválasztottunk egy legfeljebb $k - 1$ elemü bázist a vektorteret generáló k elemü vektorrendszerből. ■

Lehet-e egy vektortérnek különböző elemszámu bázisa?

2.12. Tétel

Ha a V vektortérnek van n elemü B bázisa, akkor minden bázisa n elemü.

Bizonyitás:

a) Először megmutatjuk, hogy a V vektortér bármely $k > n$ elemü vektorrendszere lineárisan összefüggő. Legyen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ a vizsgálandó vektorrendszer és $B : \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ V egy bázisa.

Ha van $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k$ között nullvektor, akkor a rendszer, mint tudjuk, összefüggő. A továbbiakban már feltesszük, hogy

$$\underline{v}_i \neq \underline{0} \qquad i = 1, 2, \dots k$$

Mivel B bázis:

$$\underline{v}_1 = v_{11} \underline{b}_1 + v_{21} \underline{b}_2 + \dots + v_{n1} \underline{b}_n \tag{1}$$

és nem minden együttható nulla $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ miatt.

Feltehetjük, hogy $v_{11} \neq 0$ (ez nem jelent megszoritást, mivel a bázisvektorok átsorrendezésével mindig elérhető).

Ekkor (1)-ből $\underline{b}_1$-et kifejezve kapjuk:

$$\underline{b}_1 = \frac{1}{v_{11}} \underline{v}_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{v_{i1}}{v_{11}} \underline{b}_i \tag{2}$$

Igy V minden vektora előállitható a $B_1 : \underline{v}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként is.

B_1 vektorai lineárisan függetlenek, mert a

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{b}_2 + \dots + c_n \underline{b}_n = \underline{0}$$

lineáris kombinációban minden együttható nulla kell legyen. Ha ugyanis $c_1 \neq 0$ volna, ez azt jelentené - feltevésünkkel ellentétben -, hogy (1)-ben $v_{11} = 0$. A többi együttható nulla volta ezután már a $\underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorok függetlenségének következménye.

Tehát a $B_1 : \underline{v}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n$ vektorrendszer szintén bázisa V-nek. Az eljárást - a bázișcserét - folytassuk, vagyis igyekezzünk a $\underline{b}_i$ vektorokat a $\underline{v}_i$ vektorokkal lecserélni. Ha a $\underline{v}_2$ vektor összefügg $\underline{v}_1$-gyel, akkor a vizsgált $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, tehát az állítás bizonyitott.

Ha $\underline{v}_2$ független $\underline{v}_1$-től, akkor a

$$\underline{v}_2 = v_{12}\,\underline{v}_1 + v_{22}\,\underline{b}_2 + \dots + v_{n2}\,\underline{b}_n \tag{3}$$

előállitásban van olyan $\underline{b}_i$ vektor, amelynek együtthatója nem nulla. Feltehetjük, hogy $v_{22} \neq 0$. Ekkor $\underline{b}_2$ és ezzel együtt V minden eleme előáll a

$$\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_n \quad \text{vektorok}$$

lineáris kombinációjaként. Az eljárást tovább folytatva, ha eljutunk a

$$\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n \quad \text{vektorok}$$

között egy olyanhoz, amelyik a megelőzőekkel összefügg, akkor az állítás igazolt. Ha pedig $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n$ lineárisan függetlenek, akkor a fenti eljárást folytatva, a $\underline{b}_i$ vektorokat rendre lecserélve a

$\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \dots\ \underline{v}_n$ vektorrendszerhez jutunk, amely V minden elemét, igy a $\underline{v}_{n+1}, \dots, \underline{v}_k$ elemeket is előállitja lineáris kombinációként. Ezzel beláttuk, hogy V minden k elemü ($k > n$) vektorrendszere összefüggő.

b) Most tegyük fel, hogy a V vektortérnek bázisai:

$$\underline{b}_1,\ \underline{b}_2,\ \dots,\ \underline{b}_n \tag{1}$$

és

$$\underline{c}_1,\ \underline{c}_2,\ \dots,\ \underline{c}_m \tag{2}$$

Az a) alatt bizonyitottak értelmében $n > m$ lehetetlen (1) bázis volta, $n < m$ lehetetlen (2) bázis volta miatt. Tehát $m = n$, vagyis V minden bázisa azonos számu vektorból áll. ∎

Mivel minden bázis elemszáma azonos, értelmes a következő

2.13. Definició

A V vektortér bázisvektorainak a számát a vektortér dimenziójának nevezzük.

Megjegyzések:

1. Van olyan vektortér, amelynek nincs véges elemü bázisa, például ilyen a folytonos függvények vektortere. Az ilyen vektortereket végtelen dimenziós vektortereknek nevezik.
2. Ha $V = \{\underline{0}\}$ akkor a vektortérnek nincs lineárisan független eleme, dimenziója nulla.

2.14. Példák

1. Tekintsük az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alaku mátrixok halmazát, ahol

a 0, valós szám. Értelmezzünk müveleteket e halmazban a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix},$$

$$c\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & a^c \end{pmatrix},$$

tetszőleges c valós szám esetén. Az olvasó könnyen beláthatja, hogy a fenti mátrixok a definiált müveletekre vektorteret alkotnak.

Megadjuk a vektortérnek egy bázisát és meghatározzuk a dimenziószámát.

Egy bázis:

$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, ugyanis a vektortér bármely eleme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

alakba irható, ahol

$10^c = a$, vagyis
$c = \lg a.$

A vektortérnek egyelemü bázisa van, tehát a dimenziószáma: 1.

2. A valós elemü 2 x 2-es mátrixok halmaza a mátrix-összeadásra és számmal szorzásra vektorteret alkot a valós számtest felett. Határozzuk meg a vektortér egy bázisát és dimenziószámát.

$$\text{Az} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok bázisát alkotják a vektortérnek, mivel

a) A vektortér minden eleme előállitható lineáris kombinációjukként:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

b) A négy mátrix lineárisan független rendszert alkot:

$$c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{csak akkor teljesül,}$$

ha $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. A vektortér négydimenziós.

3. Adjuk meg a folytonos függvények vektorterének egy kétdimenziós alterét. (Müveletek a függvények összeadása és számmal szorzása.) A IV.2.6 2^o példában beláttuk, hogy a

$$\sin x \quad \text{és} \quad \cos x$$

függvények lineárisan függetlenek.

Igy az

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

egyenlőséggel meghatározott f függvények az eredeti vektortér egy kétdimenziós alterét alkotják.

Egy vektortérnek valamely bázisáról sokszor szükséges áttérnünk egy másik bázisra. Ilyenkor természetesen módosulnak a vektorok koordinátái. A következőkben ezekkel a kérdésekkel, a bázistranszformáció (báziscsere) problémáival foglalkozunk.

2.15. Tétel

Ha a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer bázisa a V vektortérnek és $\underline{c} \in V$ tetszőleges nullától különböző vektor, akkor $\underline{c}$ bevihető a bázisba annak a $\underline{b}_k$ vektornak a helyére, amelynek együtthatója $\underline{c}$ előállításában nem nulla.

Bizonyitás:

Legyen $\underline{c} = c_1 \underline{b}_1 + \ldots + c_k \underline{b}_k + \ldots + c_n \underline{b}_n$ (1)

és $c_k \neq 0$.

Először megmutatjuk, hogy minden $\underline{v} \in V$ előáll a

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots \underline{b}_{k-1}, \underline{c}\ \underline{b}_{k+1}, \ldots, \underline{b}_n \tag{2}$$

vektorok lineáris kombinációjaként, majd bebizonyitjuk, hogy (2) lineárisan független vektorrendszer.

Tudjuk, hogy

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i \tag{3}$$

(1)-ből $\underline{b}_k$-t kifejezve és (3)-ba helyettesitve

$$\underline{v} = \left(v_1 - \frac{v_k}{c_k} c_1\right) \underline{b}_1 + \ldots + \frac{v_k}{c_k} \underline{c} + \ldots + \left(v_n - \frac{v_k}{c_k} c_n\right) \underline{b}_n \tag{4}$$

adódik, vagyis $\underline{v}$-t a (2) rendszer segitségével előállitottuk.

(1) és (3) egyértelmüségéből következik, hogy a (4) előállitás is egyértelmü. Ez, ha $\underline{v} = \underline{0}$, éppen a (2) rendszer lineáris függetlenségét jelenti. ■

A bizonyitás során az is kiderült, hogy báziscserénél hogyan módosulnak tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektor koordinátái.

2.16. Példa

Legyen V a valós, rendezett számhármasok vektortere (1.3. Példák 1.) V egy bázisa:

$$B_1 : \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Legyen

$\underline{e}'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Mivel $\underline{e}'_1$ előállitása a B_1 bázisban:

$$\underline{e}'_1 = -2\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 ,$$

$\underline{e}'_1$-vel lecserélhető $\underline{e}_1$, illetve $\underline{e}_2$, de $\underline{e}_3$ nem. Vigyük be $\underline{e}'_1$-t $\underline{e}_1$ helyére a B_1 bázisban.

$$B_2 : \underline{e}'_1 , \quad \underline{e}_2 , \quad \underline{e}_3$$

Határozzuk meg a $\underline{v}$ vektor koordinátáit a B_2 bázisban, amennyiben B_1-beli előállitása:

$$\underline{v} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

$\underline{v}$ B_2 bázisbeli v'_1, v'_2, v'_3 koordinátáit például meghatározhatjuk a következő egyenletből:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v'_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,v'_1 \\ 3\,v'_1 + v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$$

amelyből:

$$v'_1 = -\frac{1}{2}; \quad v'_2 = \frac{7}{2}; \quad v'_3 = -1 \quad \text{adódik.}$$

Megjegyzés:

A bázistranszformáció használható vektorrendszer lineáris függőségének, ill. függetlenségének eldöntésére is, a következő gondolatmenet alapján. A vizsgált vektorrendszer vektoraival lépésenként megpróbáljuk lecserélni a bázisvektorokat. Ha a rendszer minden vektora bevonható a bázisba, akkor a vektorrendszer lineárisan független, egyébként lineárisan összefüggő.

2.17. A bázistranszformáció végrehajtása mátrix felhasználásával, elemi sormüveletekkel

A 2.15. Tételben egy adott bázist ugy módositottunk, hogy annak egy vektorát cseréltük le, és a vektortér egy tetszőleges $\underline{v}$ vektorának megadtuk az uj bázisbeli koordinátáit (4) alatt. A 2.16. példában egy konkrét bázistranszformációt hajtottunk végre, de nem használtuk az emlitett (4) formulát, más módszerrel határoztuk meg egy vektor uj koordinátáit. Most megmutatjuk, hogy egy ügyes elrendezéssel hogyan tehetjük mechanikussá az uj koordináták meghatározását.

Legyen a V vektortér egy bázisa

$B_1 : \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots \underline{e}_n$ és egy vektora $\underline{v}$,

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{e}_i , \quad v_1 \neq 0 .$$

Mivel $v_1 \neq 0$, $\underline{v}$ bevonható a bázisba $\underline{e}_1$ helyére. Az igy nyert uj bázis

$B_2 : \underline{v}, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$

Feladat: határozzuk meg a $\underline{v}$ vektor, az $\underline{e}_1$ vektor és egy

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{e}_i$$ vektor B_2 bázisbeli koordinátáit.

$$\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + \sum_{i=2}^{n} 0 \cdot \underline{e}_i ,$$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{e}_i\text{-ből} \quad \underline{e}_1 = \frac{1}{v_1} \underline{v} - \frac{1}{v_1} \sum_{i=2}^{n} v_i \underline{e}_i$$

és ennek felhasználásával - mint azt a 2.15. Tételben már láttuk -

$$\underline{a} = \frac{a_1}{v_1} \underline{v} + \sum_{i=2}^{n} \left(a_i - \frac{a_1}{v_1} v_i\right) \underline{e}_i$$

Most irjuk fel $\underline{v}$, $\underline{e}_1$, $\underline{a}$ B_1-beli koordinátáit oszlopmátrixba rendezve egymás mellé. Kapjuk a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} v_1 & 1 & a_1 \\ v_2 & 0 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n & 0 & a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Osszuk végig a mátrix első sorát v_1-gyel, majd az így nyert első sor megfelelő skalárszorosait a többi sorokból kivonva érjük el, hogy az első oszlopba a $\underline{v}$ vektor uj - B_2 bázisbeli - koordinátáiból álló $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ oszlop kerüljön.

(1)-ből a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{v_1} & \dfrac{a_1}{v_1} \\ 0 & -\dfrac{v_2}{v_1} & a_2 - \dfrac{a_1}{v_1} v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\dfrac{v_n}{v_1} & a_n - \dfrac{a_1}{v_1} v_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy miközben (1)-et oly módon alakitottuk, hogy az első oszlopba $\underline{v}$ uj koordinátái kerüljenek, a második oszlopban kialakultak $\underline{e}_1$ uj koordinátái és a harmadik oszlopban $\underline{a}$ B_2-beli uj koordinátái jöttek létre. Igy ez az elrendezés valóban alkalmas bázistranszformáció mechanikus végrehajtására. Nyilvánvalóan nem változtat az eljárás lényegén, ha több bázis vektort - akár az egész bázist - cserélünk le.

2.18. Példa

Állapitsuk meg, hogy a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorai lineárisan függetlenek-e, ha V egy bázisa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ és

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + \underline{e}_4$$
$$\underline{v}_2 = -\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$
$$\underline{v}_3 = \underline{e}_1 + 2\,\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 3\,\underline{e}_4$$
$$\underline{v}_4 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 2\,\underline{e}_3 + 3\,\underline{e}_4$$

MEGOLDÁS:

1. lépés:

A 2.17. alatt ismertetett eljárással vonjuk be a bázisba $\underline{e}_1$ helyére a $\underline{v}_1$ vektort. Ez ugy érhető el, hogy az

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{mátrixon}$$

olyan sormüveleteket végzünk, amelynek eredményeként az első oszlopba a $\underline{v}_1$ vektor $\underline{v}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisbeli uj koordinátái $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kerülnek.

Ezért az első sor háromszorosát kivonjuk a második sorból, majd az első sort kivonjuk a negyedik sorból és a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ennek a mátrixnak az oszlopaiban a vektorok $\underline{v}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ bázisbeli koordinátái állnak.

2. lépés:

Mivel a $\underline{v}_2$ előállitásában $\underline{e}_2$ együtthatója nem nulla, bevonjuk a bázisba $\underline{v}_2$-t $\underline{e}_2$ helyére. A második sort hozzáadva a harmadikhoz, majd a második sort (-1)-gyel szorozva kapjuk $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$ koordinátáit most már a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ bázisban:

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. lépés:

$\underline{v}_3$ bevonása a bázisba $\underline{e}_3$ helyére. A $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{e}_4$ bázisban a koordináták:

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát a rendszer lineárisan összefüggő.

A $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, de $\underline{v}_4$ már kifejezhető lineáris kombinációjukként $\underline{v}_4 = 3\,\underline{v}_2 + \underline{v}_3$ alakban. Megmutatjuk, hogy a bázistranszformáció megadható egy mátrixszal is és ennek segítségével tetszőleges vektor uj bázisbeli koordinátái könnyen meghatározhatók.

2.19. Tétel

Legyen a V vektortér két bázisa B és C.

B : $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$; C : $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$

A B bázis vektorainak előállitása a C bázisban:

$$\underline{b}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\, \underline{c}_j \tag{1}$$

A C bázis vektorainak előállitása a B bázisban:

$$\underline{c}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\, \underline{b}_j \tag{2}$$

Legyen $\underline{v} \in V$ és előállításai a két bázisban:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i \tag{3}$$

és

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} v'_j \underline{c}_j \tag{4}$$

Állitás:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_c} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_B} \tag{5}$$

és

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{C}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{v}}_c} \tag{6}$$

Bizonyitás:

A két bázis szerepének felcserélésével (5)-ből kapjuk (6)-ot, tehát elég az (5) állitást igazolni. Ehhez helyettesitsük be $\underline{v}$ (3) alatti előállitásában $\underline{b}_i$-k helyére (1)-et és megkapjuk $\underline{v}$ előállitását a C bázisban:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} \underline{c}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} v'_j \underline{c}_j \tag{7}$$

Ebből

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} v_i\, b_{ji} \qquad (j=1,2,\dots n) \tag{8}$$

Ha az (5) alatti mátrix szorzást elvégezzük, a szorzat oszlopmátrix j-edik elemére ugyancsak a (8) alatti

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\, b_{ji} \quad \text{összeget kapjuk,}$$

és ezzel az állitást igazoltuk. ∎

Megjegyzés:

Ha a B bázisról akarunk áttérni a C bázisra, akkor a $\underline{\underline{B}}$ mátrixra volna szükségünk, de a $\underline{\underline{C}}$ mátrixot ismerjük. Ezért fontos a két mátrix kapcsolatát leiró

2.20. Tétel

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$$

Bizonyitás:

A 2.19. Tételből tudjuk, hogy minden $\underline{v} \in V$ vektor B és C bázisbeli koordinátáira érvényes, hogy

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}} \cdot \begin{pmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Az első egyenlőség jobb oldalát a másodikba helyettesitve:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{adódik.}$$

Mivel az utóbbi egyenlőség minden V-beli vektorra, igy az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{koordinátáju}$$

$$\underline{b}_1, \quad \underline{b}_2, \quad \dots \quad \underline{b}_n \quad \text{vektorokra}$$

is érvényes, ezeket rendre behelyettesitve a

$$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$$

egyenlőséget és hasonlóan - a második egyenlőség jobb oldalát helyettesitve az elsőbe -

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{egyenlőséget}$$

kapjuk, ami állitásunk igaz voltát jelenti. ∎

3. IZOMORFIZMUS

Ebben a pontban az algebra egy olyan fontos fogalmát emlitjük meg, amely nemcsak a vektorterek elméletében, hanem más algebrai strukturák elméletében is jelentőséggel bir.

Tekintsük például a legfeljebb n-ed foku $P_n(x)$ valós együtthatós polinomok $n + 1$ dimenziós vektorterét a polinom összeadás és valós számmal szorzás müveletekkel és a valós számokból alkotott $n + 1$ elemü oszlopvektorok vektorterét. A két vektortér elemeit feleltessük meg egymásnak a következőképpen:

$$a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ez a megfeleltetés a következő tulajdonsággal rendelkezik:

ha

$$a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

és

$$b_o + b_1 x + \ldots + b_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

akkor a két polinom összegének megfelelője a tagok megfelelőinek összege:

$$(a_o + b_o) + (a_1 + b_1) x + \ldots + (a_n + b_n) x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_o + b_o \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

és egy polinom skalárszorosának megfelelője a polinom megfelelőjének skalárszorosa:

$$c\, a_o + \ldots + c\, a_n x^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c\, a_o \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Amennyiben a két vektortér elemei között fenti jellegü un. müvelettartó megfeleltetés létesithető, akkor a két vektortér, ha csak a strukturáját nézzük, vagyis eltekintünk attól, hogy mik az elemei, meg sem különböztethető egymástól.

3.1. Definició

A kölcsönösen egyértelmü müvelettartó leképezést izomorfizmusnak nevezzük.

A V és W vektortereket izomorfaknak nevezzük, ha elemeik között izomorfizmus létesithető.

Jelölés: $V \cong W$

A 4. fejezet előző pontjainak alapján nyilvánvalóan adódik a

3.2. Tétel

Bármely n-dimenziós V vektortér izomorf a skalárhalmazából alkotott n elemü oszlopvektorok vektorterével.

Bizonyitás:

Legyen $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ V egy bázisa. Mint tudjuk, tetszőleges $\underline{v} \in V$ elem egyértelmüen előáll $\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i$ alakban.

Létesitsük a következő megfeleltetést:

$$\underline{v} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ez kölcsönösen egyértelmü és müvelettartó. Igy az n-dimenziós oszlopvektorterek vizsgálata alapján sok mindent megtudunk az összes n-dimenziós vektorterekről is.

4. DIREKT SZORZAT, DIREKT ÖSSZEG

Az olvasó már találkozott halmazok direkt szorzatának fogalmával. A következőkben megmutatjuk, hogy direkt szorzattal és egy másik eljárással, az un. direkt összeg képzéssel hogyan lehet vektorterekből uj vektorteret képezni.

4.1. Definició

Legyen U és V két vektortér egy K számtest felett. E vektorterek $U \otimes V$ direktszorzatának az elemei az $(\underline{u}, \underline{v})$ $\underline{u} \in U$; $\underline{v} \in V$ rendezett vektorpárok, amelyek között az összeadást

$$(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + (\underline{u}_2, \underline{v}_2) = (\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_1)$$

módon,
a $k \in K$ számmal szorzást

$$k(\underline{u}, \underline{v}) = (k\,\underline{u}, k\,\underline{v})$$

módon értelmezzük.

Az 1.1. Definicióban szereplő vektortér - axiómákat vizsgálva az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy $U \otimes V$ szintén vektortér K felett. Hasonló módon értelmezhető a direkt szorzat kettőnél több tényezőre is.

Megjegyezzük, hogy a direkt szorzatot Descartes-szorzatnak is szokás nevezni.

4.2. Definició

Legyen U_1 és U_2 egy V vektortér két olyan altere, amelyre $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$. Az alterek $U_1 \oplus U_2$ direkt összegén az

$$\{\underline{u}_1 + \underline{u}_2 ;\ \underline{u}_1 \in U_1,\ \underline{u}_2 \in U_2\}$$

halmazt értjük.

4.3. Tétel

$U_1 \oplus U_2$ a V vektortérnek altere

és $\forall\, \underline{u} \in U_1 \oplus U_2$ egyértelmüen irható fel $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$
$u_1 \in U_1$, $\underline{u}_2 \in U_2$ alakban.

Bizonyitás:

Az állitás első része nyilvánvalóan igaz, igy csak azt mutatjuk meg, hogy az előállitás egyértelmü.

Tegyük fel, hogy $\underline{u} \in U_1 \oplus U_2$ kétféleképpen is előállitható

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \qquad \underline{u}_1 \in U_1 ;\ \underline{u}_2 \in U_2 \tag{1}$$

és

$$\underline{u} = \underline{u}'_1 + \underline{u}'_2 \qquad \underline{u}'_1 \in U_1 ;\ \underline{u}'_2 \in U_2 \tag{2}$$

alakban. (1) és (2)-ből

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{u}'_1 + \underline{u}'_2 \quad \text{következik.}$$

Ekkor

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 = \underline{u}'_2 - \underline{u}_2, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 \in U_1 \quad \text{és} \quad \underline{u}_2 - \underline{u}'_2 \in U_2 .$$

Mivel

$$U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}, \quad \text{ezért}$$

$$\underline{u}_1 - \underline{u}'_1 = \underline{0} \quad \text{és}$$

$$\underline{u}_2 - \underline{u}'_2 = \underline{0} \quad \text{lehet csak, ami az egyértelmüséget jelenti.} \ \blacksquare$$

Megjegyzés:

A direktösszeg fogalma is kiterjeszthető kettőnél több altér esetére is.

Példák

1. Legyen V a valós számok, összeadásra és valós számmal szorzásra alkotott vektortere

$V \otimes V$ a valós kételemü sormátrixok vektortere.

2. Legyen V a sikvektorok vektortere

$\underline{a} \in V, \quad \underline{b} \in V, \quad \underline{a} \nparallel \underline{b}$

U_1 legyen az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos vektorok, U_2 a $\underline{b}$ vektorral párhuzamos vektorok altere. Ekkor

$$U_1 \oplus U_2 = V .$$

3. Legyen V az n elemü oszlopmátrixok vektortere és $\underline{\underline{A}}$ egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelynek első oszlopa csupa nulla, a többi oszlop viszont lineárisan független rendszert alkot.

Tekintsük az $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{0}$ egyenlet megoldásvektorait. Ezek V-nek egy U_1 egydimenziós alterét alkotják. Legyen $U_2 \subset V$-nek az

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ alaku vektorok által generált $(n-1)$ dimenziós altér.

Megmutatjuk, hogy

$$U_1 \oplus U_2 = V$$

Legyen ugyanis $\underline{v} \in V$ tetszőleges

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \in U_2, \quad \text{ekkor}$$

$$\underline{\underline{A}}\,(v - \underline{y}) = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \text{tehát}$$

$$\underline{v} - \underline{y} = \underline{x} \in U_1, \quad \text{vagyis}$$

$$\underline{v} = \underline{x} + \underline{y}, \quad \text{mint állitottuk.}$$

Megjegyzés:

Vektorterek felbontása altereik direkt összegére segédeszköze lehet vektorterek vizsgálatának is.

5. KITŰZÖTT FELADATOK

1. a) Mutassa meg, hogy a 2 x 2-es mátrixok halmaza vektortér a mátrix összeadás és számmal szorzás müveletekre.

b) Határozza meg a vektortér dimenziószámát.

c) Konstruálja meg a vektortér egy háromdimenziós alterét.

2. Bizonyitsa be, hogy ha a V vektortér $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ elemei a $\underline{b}$ vektort egyértelmüen állitják elő, akkor az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ vektorok lineárisan függetlenek.

3. Mutassa meg, hogy ha egy V vektortér dimenziószáma n, akkor bármely $k<n$ természetes számhoz található V-nek olyan altere, amelynek k a dimenziószáma.

4. Legyen a V vektortér két altere V_1 és V_2. Mutassa meg, hogy ha

$$V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\},$$

akkor $\dim V_1 + \dim V_2 \leqslant \dim V$.

5. V_1 és V_2 a V vektortér két altere.

a) Mutassa meg, hogy

$V_1 \cap V_2$ is altere V-nek.

b) Bizonyitsa be, hogy

$$\dim (V_1 \cap V_2) \leqslant \min (\dim V_1, \dim V_2!.$$

6. Legyen V az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ alaku,

valós elemü mátrixok vektortere.
(Müveletek: mátrix összeadás és mátrix szorzása számmal.)

Legyen W az $a + b_j$ alaku komplex számok összeadása és valós számmal szorzásra alkotott vektortere.

Bizonyitsa be, hogy

$$V \cong W.$$

V. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Ebben a fejezetben a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeivel, a megoldások számával kapcsolatos elvi problémákkal és a megoldás módjával foglalkozunk.

1. ALAPFOGALMAK ÉS A MEGOLDHATÓSÁG KÉRDÉSEI

1.1. Definició

Az

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletrendszert, amelynek együtthatói valós vagy komplex számok, inhomogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük, ha nem minden $b_i = 0$ ($i=1,2,\ldots m$) és homogén lineáris egyenletrendszernek, ha minden $b_i = 0$ ($i=1,2,\ldots m$). A fenti egyenletrendszer, az azonos ismeretlenek együtthatóit és az ismeretleneket egy-egy oszlopvektorba összefogva, az

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \underline{a}_i \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

jelöléssel a következő vektoregyenlet alakba irható:

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \ldots + \underline{a}_n x_n = \underline{b} \qquad (2)$$

Használni fogjuk az egyenletrendszernek egy harmadik irásmódját is:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b},$$

ahol az $\underline{\underline{A}}$ mátrix az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

együttható mátrix.

Az egyenletrendszer megoldhatóságának kérdését, a lineáris egyenletrendszert (2) alakban irva, átfogalmazhatjuk a következőképpen: az m dimenziós oszlopvektortér $\underline{b}$ vektora előállitható-e a vektortér $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorainak lineáris kombinációjaként? Erre a kérdésre az előbbi fejezetben tárgyalt ismereteink alapján könnyen tudunk válaszolni.

1.2. Tétel

Az

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az

$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszer és az

$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}$ vektorrendszer lineárisan független vektorainak a száma azonos.

Bizonyitás:

a) Ha az egyenletrendszernek van megoldása, akkor

$$\underline{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}_i ,$$

a $\underline{b}$ vektor benne van az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok által generált altérben.

Ez azt is jelenti, hogy az

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és az $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n, \underline{b}$

vektorrendszer ugyanazt az alteret generálja. Legyen ennek dimenziója k, akkor az

$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \text{ és az}$$
$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$$

vektorrendszerben is k számu lineárisan független vektor van. Ezzel a feltétel szükségességét kimutattuk.

b) A feltétel elégséges is. Legyen mindkét vektorrendszerben a lineárisan független vektorok maximális száma k. Ha az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok között $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineárisan függetlenek, akkor, mivel az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$ rendszerben sincs több független vektor, $\underline{b}$ előállitható

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_k \underline{a}_k$$

alakban, de akkor

$$x_1 \cdot \underline{a}_1 + \dots + x_k \cdot \underline{a}_k + 0 \cdot \underline{a}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$$

is fennáll, ami azt jelenti, hogy az

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor megoldása az egyenletrendszernek. ∎

A tételből is következik az a nyilvánvaló tény, hogy ha az egyenletrendszer homogén, akkor mindig van megoldása.

A mátrix-rang fogalmának megismerése után az előbbi tétel egy másik jól használható megfogalmazását is megadjuk.

1.3. Definició

Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix oszloprangján az $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ $(i=1,2,\dots,n)$

oszlopvektorok között levő lineárisan független vektorok számát értjük.

1.4. Definició

Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix sorrangján az

$$(a_{j1}, \dots a_{jn}), \quad (j=1,2,\dots m)$$

sorvektorok között levő lineárisan független vektorok számát értjük.

1.5. Példák

1. Határozzuk meg az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix}$$

oszloprangját. A 2.16. példában követett módon, báziscsere módszerrel számoljunk, azaz vonjuk be az

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bázisvektorok helyére $\underset{=}{A}$ oszlopvektorai közül azokat, amelyeket lehet.

Először $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ -öt bevonva $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ helyett, adódik az $\underset{=}{A}_1$ mátrix.

$$\underset{=}{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ezután cseréljük le

$\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$-vel a $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ oszlopvektort, kapjuk $\underset{=}{A}_2$-t.

$$\underset{=}{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Folytathatnánk az eljárást, de már látszik, hogy az oszloprang 3, ugyanis az első három oszlopvektor lineárisan független, a negyedik a harmadikkal összefüggő, az ötödik pedig a másodikkal függ össze.

2. Az előbbi feladatot oldjuk meg más módszerrel is. A IV.2.7/6 tétel szerint egy vektorrendszer lineárisan független vektorainak számán nem változtat, ha bármelyik vektor konstansszorosát hozzáadjuk egy másikhoz. Ilyen - un. oszloptranszformációkkal igyekezzünk az $\underset{=}{A}$ mátrix oszlopait

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

alakra transzformálni, akkor könnyen megállapithatjuk az oszloprangot.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \underline{v}_4 & \underline{v}_5 \end{array} \\ \underset{=}{A} = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A $\underline{v}_1$ vektor kétszeresét kivonva $\underline{v}_2$-ből és $\underline{v}_3$-ból, majd $\underline{v}_1$-et kivonva $\underline{v}_4$-ből és $\underline{v}_5$-ből, kapjuk az $\underline{\underline{A}}_3$ mátrixot:

$$\underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A negyedik oszlopvektor•megfelelő konstansszorosait hozzáadva az oszlopokhoz, adódik $\underline{\underline{A}}_4$.

$$\underline{\underline{A}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ebből már kiolvasható, hogy az oszloprang 3. Az eljárást tovább folytatva, a 2. oszlopot 6-tal osztva és megfelelő konstansszorosait a többi vektorhoz hozzáadva az $\underline{\underline{A}}$ mátrixszal azonos számu lineárisan független oszlopvektort tartalmazó $\underline{\underline{A}}_5$ mátrixhoz jutunk:

$$\underline{\underline{A}}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tüzzük ki most azt a feladatot, hogy megállapitjuk az előbbi feladatokban szereplő $\underline{\underline{A}}$ mátrix sorrangját.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tegyük ezt először a 2. példa módszerével, alkalmazva azt a mátrix sorvektoraira. Igy első lépésként az $\underline{\underline{A}}$-val azonos sorrangu $\underline{\underline{A}}_6$ mátrixot kapjuk az első sor kétszeresét kivonva a második és harmadik sorból.

$$\underline{\underline{A}}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ezután a harmadik sorvektort hozzáadva az elsőhöz, és kétszerest kivonva a másodikból adódik $\underline{\underline{A}}_7$.

$$\underline{\underline{A}}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

amiből jól látszik, hogy a sorrang 3.

4. Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sorrangját, az 1. példa módszerét alkalmazva a mátrix sorvektoraira.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megkiséreljük tehát a sorvektorokat bevonni az ötdimenziós sorvektortér

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0),\ (0\ 1\ 0\ 0\ 0),\ (0\ 0\ 1\ 0\ 0),\ (0\ 0\ 0\ 1\ 0),\ (0\ 0\ 0\ 0\ 1)$$

bázisának első három vektora helyébe. Először az első sorvektort visszük be (1 0 0 0 0) helyett a bázisba. A vektorok uj koordinátái a következők lesznek:

$$\underline{\underline{A}}_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a 2. sort (0 0 0 1 0) helyett bevonva a bázisba adódik

$$\underline{\underline{A}}_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

majd a 3. sort (0 1 0 0 0) helyett bevonva a bázisba az

$$\underline{\underline{A}}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot nyerjük, amiből kitünik, hogy a sorrang 3.

Az 1. és 3. példa, illetve a 2. és 4. példa összehasonlításából az tünik ki, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszlopvektorainak a bázisba történő bevonása és a mátrix sorvektorainak elemi transzformációi, illetve az oszlopvektorok elemi transzformációi és sorvektorok bázistranszformációja azonos változást idéznek elő a mátrixon és változatla l hagyják mind az oszloprangot, mind a sorrangot. A példák sejtetik · következő tétel igazságát:

1.6. Tétel

A mátrix oszlop- és sorrangja megegyezik.

Bizonyitás:

A bizonyitás azon a gondolaton alapszik, hogy ha egy mátrixon elemi sor-, ill. oszloptranszformációt végzünk (lásd 3.3.), azzal nem változtatunk sem az oszlop-, sem a sorrangon. Ha ugyanis valamely sorvektor konstansszorosait hozzáadjuk a többi sorokhoz, vagy a sort végigosztjuk egy számmal, az a sorrangon a IV.2.7./6. tétel alapján nem változtat. Az oszloprangot viszont azért nem változtatja, mivel az oszlopvektorok terében csak bázistranszformációt végzünk.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Legyen k az $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszloprangja. $k \leqslant n$, mert n darab oszlopvektor van és $k \leqslant m$, mert az oszlopvektorok az m dimenziós oszlopvektortérnek alkotják alterét. Tehát

$$k \leqslant \min (m, n).$$

Rendezzük ugy az oszlopokat, hogy az első k darab legyen lineárisan független. Nem jelenti az általánosság megszoritását, ha feltesszük - csupán az egyszerübb irásmód kedvéért -, hogy az első k független oszlopvektor az m dimenziós oszlopvektortér

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisának éppen az első k darab vektorával cserélhető le.

Elvégezve az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első k oszlopvektorának bevonását a bázisba, az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$ vektorok helyére, a következő alaku $\underline{\underline{A}}_1$ mátrixot kapjuk

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & & k & & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ k \\ \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1\,k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{2\,k+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{k\,k+1} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & b_{m\,k+1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ezután $\underline{\underline{A}}_1$ első k darab oszlopának megfelelő konstansszorosait a $k+1,\dots,m$ oszlophoz hozzáadva a még egyszerübb alaku $\underline{\underline{A}}_2$ mátrixot kapjuk.

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & & k & & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ k \\ \\ \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1\,k+1} & \dots & b_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m\,k+1} & \dots & b_{m\,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{\underline{A}}_2$ mátrix jobb alsó sarkában levő elemek is nullák. Tegyük fel ugyanis, hogy $i>k, j>k$ és $b_{ij} \neq 0$. Ez lehetetlen, mert akkor az i. oszlopvektor lineárisan független lenne az első k oszlopvektortól és az oszloprang $k+1$ volna, ellentétben az eredeti feltétellel. Tehát

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & & k & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ k \\ \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\ 0 & 1\dots & 0 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & 1 & 0\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{és}$$

igy $\underline{\underline{A}}_2$-nek pontosan k darab lineárisan független sorvektora van. Mivel $\underline{\underline{A}}$ sorrangja $\underline{\underline{A}}_2$-ével azonos, állitásunkat igazoltuk.

Fentiek alapján jogos a következő:

1.7. Definició

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix megegyező oszlop- és sorrangját a mátrix rangjának nevezzük. A mátrix rangja tehát a mátrix oszlopvektorai ill. sorvektorai által generált vektortér dimenziószáma. E fogalom segitségével az 1.2. tétel egy átfogalmazása az

1.8. Tétel

Az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\underline{\underline{A}}$ együttható mátrix rangja megegyezzék az un. kibővitett mátrix rangjával. (Kibővitett mátrixnak azt a mátrixot nevezzük, amelyet $\underline{\underline{A}}$-ból a $\underline{b}$ vektor hozzávételével nyerünk.)

1.9. Példa

Állapitsuk meg, hogy megoldható-e a következő egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ 3x_1 \quad\quad - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad\quad &= 3 \end{aligned}$$

A kibővitett mátrix - utolsó oszlopként irva a $\underline{b}$ vektort - a következő:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Elemi sor- és oszlopmüveleteket végzünk:

1. Az első oszlop megfelelő konstansszorosait kivonva a többi oszlopból:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 3 & -3 & -7 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ adódik.}$$

2. A második oszloppal operálva a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk.

A mátrix rangja és a kibővitett mátrix rangja is három, tehát van megoldás.

2. A LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMÁRÓL ÉS A MEGOLDÁS MÓDJÁRÓL

A megoldhatóság kérdésén kivül még két alapvető probléma merül fel az egyenletrendszerekkel kapcsolatban. Az egyik kérdés, hogy egyértelmü-e a vizsgált egyenletrendszer megoldása, ha nem egyértelmü, akkor hány megoldása van. A másik probléma, hogy hogyan lehet a legkevesebb fáradsággal, illetve számitógépre is alkalmazható módszerrel megkeresni a megoldásokat.

2.1. Tétel

Az

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad (\underline{b} \neq \underline{0})$$

inhomogén egyenletrendszer bármely $\underline{x}_i$ megoldása előállitható az inhomogén egyenletrendszer egy tetszőleges $\underline{x}_p$ un. partikuláris megoldásának és az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer egy $\underline{x}_h$ megoldásának összegeként.

Bizonyitás:

Azt kell megmutatni, hogy $\underline{x}_i - \underline{x}_p$ megoldása az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ egyenletnek. Ezt behelyettesitéssel igazoljuk:

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{x}_i - \underline{x}_p) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_i - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_p\,,$$

a szorzás disztributivitását felhasználva.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_i = \underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_p = \underline{b}, \quad \text{mert } \underline{x}_i \text{ és } \underline{x}_p$$

megoldásai az inhomogén egyenletrendszernek. Igy

$$\underline{\underline{A}}\,\underbrace{(\underline{x}_i - \underline{x}_p)}_{\underline{x}_h} = \underline{0}$$

és akkor

$$\underline{x}_i = \underline{x}_p + \underline{x}_h, \quad \text{mint állitottuk.} \blacksquare$$

Fentiek következménye, hogy ha az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ inhomogén egyenletrendszer megoldható, akkor megoldásainak a száma megegyezik az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásainak számával. Ezért a továbbiakban az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak számával - először a megoldás egyértelmüségével foglalkozunk.

2.2. Tétel

Ha az együttható mátrix $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszernek egy megoldása van: az $\underline{x} = \underline{0}$ vektor, és forditva, ha az egyenletrendszernek egy megoldása van, akkor az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyitás:

Az állitás a lineáris függetlenség fogalmából következik. $\blacksquare$
A 2.2. Tétel egy más megfogalmazása a

2.3. Tétel

Egy homogén lineáris egyenletrendszer egyértelmü megoldásának szükséges és elégséges feltétele, hogy az együttható mátrix rangja megegyezzék az ismeretlenek számával.

Következmény:

Az inhomogén lineáris egyenletrendszernek - ha egyáltalán megoldható - akkor és csak akkor van egy megoldása, ha az együttható mátrix rangja azonos az ismeretlenek számával.

Mivel az egyenletrendszer mátrixának rangja nagyobb nem lehet az oszlopok vagyis az ismeretlenek számánál, azért azt kell még megnézni, hogy hány megoldása van, ha a rang kisebb az ismeretlenek számánál. Ehhez megmutatjuk, hogy a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorai vektorteret alkotnak és ennek dimenziója az együttható vektorok közötti, lineárisan függetlenek számától függ.

2.4. Tétel

Az

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásvektorai az n dimenziós oszlopvektortérnek egy

$$n - \text{rang } \underline{\underline{A}}$$

dimenzióju alterét alkotják.

Bizonyitás:

1. Ha $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ megoldásai az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek, akkor tetszőleges c_1, c_2 skalárok esetén

$$\underline{\underline{A}}\,(c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2) = c_1\,\underline{\underline{A}}\underline{x}_1 + c_2\,\underline{\underline{A}}\underline{x}_2 = \underline{0}\,,$$

tehát $c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2$ is megoldás.

2. Az altér dimenziószámának meghatározását ugy végezzük, hogy először konstruálunk n-rang $\underline{\underline{A}}$ számu független megoldásvektort, majd megmutatjuk, hogy több független vektor nincs a megoldásvektorok alterében.

Legyen rang $\underline{\underline{A}} = k$. Nem jelenti az általánosság megszoritását, ha feltesszük, hogy $\underline{\underline{A}}$ első k oszlopvektora $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineárisan függetlenek. Ekkor $\underline{a}_{k+1}, \dots, \underline{a}_n$ mindegyike és akkor (-1-)-szereseik is előállithatók $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineáris kombinációiként:

$$-\underline{a}_i = x_{i1}\underline{a}_1 + x_{i2}\underline{a}_2 + \dots + x_{ik}\underline{a}_k, \quad (i=k+1, \dots n) \tag{1}$$

Ezt átrendezve:

$$x_{i1}\underline{a}_1 + x_{i2}\underline{a}_2 + \dots + x_{ik}\underline{a}_k + \underline{a}_i = \underline{0}, \quad (i=k+1, \dots n) \tag{2}$$

n-k egyenlőséget kapunk, amelyekből kiolvasható az egyenletrendszer alábbi n-k számu lineárisan független megoldása.

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1\,1} \\ x_{k+1\,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k+1\,k} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \underline{x}_{k+2} = \begin{pmatrix} x_{k+2\,1} \\ x_{k+2\,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k+2\,k} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots \underline{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n\,1} \\ x_{n\,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n\,k} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Konstruáltunk tehát n-k lineárisan független megoldást. Megmutatjuk, hogy több független vektor nincs a megoldások terében.

Legyen

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$

egy tetszőleges megoldás. Ez azt jelenti, hogy

$$c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + \ldots + c_k\underline{a}_k + \ldots + c_n\underline{a}_n = \underline{0}. \tag{4}$$

(1)-et (4)-be helyettesitve kapjuk:

$$c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + \ldots + c_k\underline{a}_k - \sum_{i=k+1}^{n} (c_i x_{i1}\underline{a}_1 + \ldots + c_i x_{ik}\underline{a}_k) = \underline{0}$$

és ezt átrendezve:

$$\underline{a}_1 (c_1 - \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_{i1}) + \underline{a}_2 (c_2 - \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_{i2}) + \ldots +$$

$$+ \underline{a}_k \left(c_k - \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_{ik}\right) = \underline{0}.$$

Felhasználva az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris függetlenségét, az utolsó vektoregyenletből

$$c_1 = \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_{i1}, \ldots, c_k = \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_{ik}$$

összefüggések adódnak, ami azt jelenti, hogy

$$\underline{c} = c_{k+1}\underline{x}_{k+1} + c_{k+2}\underline{x}_{k+2}, \ldots c_n\underline{x}_n ,$$

vagyis az előbbi n-k darab független vektor bázisát alkotja a megoldástérnek. A megoldástér tehát valóban n-k dimenziós altere az n dimenziós oszlopvektortérnek, amint azt állitottuk.

Következmény:

Ha az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$, $(\underline{b} \neq \underline{0})$ inhomogén egyenletrendszer $\underline{\underline{A}}$ együttható mátrixának a rangja (r) kisebb mint az ismeretlenek száma (n), akkor az egyenletrendszernek, amennyiben egyáltalán van megoldása, ugy végtelen sok van és az $\underline{x}$ megoldásvektorok $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_h$ alakuak (2.1. tétel), ahol az $\underline{x}_h$ vektorok az n dimenziós oszlopvektortérnek n-r dimenziós alterét feszitik ki.

Az egyenletrendszer megoldásának módjával foglalkozunk a továbbiakban. A követendő módszer mechanizmusa megegyezik a középiskolában tanult "egyenlő együtthatók" módszerével.

2.5. A lineáris egyenletrendszer megoldása bázisceréjével

Keressük az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$, $(\underline{b} \neq \underline{0})$, részletesebben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

mátrix-egyenlet megoldását. Ha a bővitett együttható-mátrix $(\underline{\underline{A}}\underline{b})$ oszlopvektoraival lecseréljük az oszlopvektortér

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} e_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{mi} \end{pmatrix}, \quad e_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq i \\ 1 & \text{ha } j = i \end{cases}$$

un. egységvektorokból álló bázisát, akkor - ismét az egyszerübb irásmód kedvéért - feltételezve, hogy az első k darab oszlopvektor lineárisan független és rendre lecserélhető az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ vektorokkal, a kibővitett mátrix

$$(\underline{\underline{A}}_1 \underline{b}_1) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & & k & & & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1\,k+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{k\,k+1} & \ldots & a'_{kn} & b'_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ k \\ \\ m \end{array}$$

alaku lesz. Az (1) mátrixegyenlet pedig az

$$\underline{\underline{A}}_1 \underline{x} = \underline{b}_1 \tag{2}$$

alakot ölti.

Az uj egyenletrendszer megoldásainak kiolvasása igen egyszerü:

a) Az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása: $\underline{x}_{ip} = \underline{b}_1$, a megfelelő homogén egyenletrendszer $n-k$ darab független megoldása:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} -a'_{1\,k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a'_{k\,k+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots; \quad \underline{x}_n = \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a'_{kn} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

amelyekből az inhomogén egyenletrendszer megoldásai az ismert módon kaphatók:

$$\underline{x} = \underline{x}_{ip} + c_1 \underline{x}_{k+1} + c_2 \underline{x}_{k+2} + \ldots + c_{n-k} \underline{x}_n ,$$

ahol $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$ tetszőleges számok. Az (1) és (2) egyenletrendszerek megoldásai azonban megegyeznek, mivel a bázistranszformáció során az egyenletrendszeren csak un. ekvivalens átalakitások történtek - nem nulla számmal szorzás és valamely egyenlet konstansszorosának más egyenlethez történő hozzáadása - és igy az eredeti egyenletrendszert is megoldottuk.

Megjegyzés:

Az egyenletrendszer megoldásának ez a módszere több szempontból is előnyös. Egyrészt a megoldhatóság vizsgálata, a megoldások számának meghatározása és a megoldás keresése egyszerre, azonos módon történik, másrészt számitógéppel történő megoldás esetén is alkalmazható.

2.6. Példák

1. Oldjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 \quad -2x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 \quad +3x_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Az rögtön látszik, hogy van nem triviális megoldása az egyenletrendszernek, mivel a négydimenziós oszlopvektortérben négynél több lineárisan független vektor nincs. A független megoldások számának meghatározásához és ezek megkereséséhez bázistranszformációt végzünk az oszlopvektortérben. Hogy követhető legyen a báziscsere menete, a mátrixban bekarikázzuk a bázisba bevonandó vektornak annyiadik koordinátáját, ahányadik egységvektort cseréljük le vele.

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \underline{\underline{A}}_3 = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Innen kiolvasható, hogy az együttható mátrix rangja 3, tehát a megoldásvektorok egy 2 dimenziós vektorteret generálnak.

Két független megoldásvektor:

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

és az összes megoldások:

$$\underline{x} = c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2$$

alakuak.

2. Oldjuk meg a következő inhomogén egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + 5x_4 &= 5 \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

A bővitett mátrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 6 & 2 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Az első, harmadik, negyedik és ötödik egyenletek ekvivalensek, ezért egy kivétellel elhagyhatók. Igy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

adódik, vagy egyszerübb alakban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A bővitett mátrix rangja az együttható mátrix rangjával megegyezően kettő. Igy a homogén egyenletrendszer megoldásai kétdimenziós vektorteret alkotnak. Ennek egy bázisa:

$$\underline{x}_{1h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{2h} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása:

$$\underline{x}_{ip} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az inhomogén egyenletrendszer megoldásai tehát:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tetszőleges c_1, c_2 esetén.

3. INVERZ MÁTRIX

A III. fejezetben definiáltuk az inverz mátrix fogalmát. Most kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén az inverz létezésének feltételét és meghatározását vizsgáljuk.

3.1. Tétel

Ha

$\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix,

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{E}}$, és $\underline{\underline{A}}_b^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$,

akkor

$$\underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{A}}_b^{-1}.$$

Bizonyitás:

Alakitsuk át az

$$(\underline{\underline{A}}_b^{-1} \cdot \underline{\underline{A}})\, \underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{A}}_j^{-1}$$

baloldalát, az asszociativitást felhasználva:

$$\underline{\underline{A}}_b^{-1} (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}_j^{-1}) = \underline{\underline{A}}_b^{-1}$$

Ebből következik, hogy

$$\underline{\underline{A}}_j^{-1} = \underline{\underline{A}}_b^{-1},$$

vagyis a jobb- és balinverz megegyezik és ez az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ inverzmátrix.

Egy mátrix invertálhatóságának szükséges és elégséges feltételét fogalmazza meg a

3.2. Tétel

Az $\underline{\underline{A}}$ n x n-es kvadratikus mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorai mind lineárisan függetlenek és akkor az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ inverzmátrix egyértelmüen létezik.

Bizonyitás:

Az állitás első része az 1.2. tételből következik, ugyanis az

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$$

részletesebben irva az

$$\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$$

mátrix-egyenlet megoldhatóságának feltételét keressük, ami ekvivalens az

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}_i = \underline{e}_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

n darab inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával.

Az 1.2. tétel alapján a (2) egyenletrendszerek akkor és csak akkor oldhatók meg, ha $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ benne vannak az $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszlopvektorai által generált vektortérben. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha az $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorai által generált vektortér n-dimenziós, vagyis $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorai - persze akkor sorvektorai is - lineárisan független rendszert alkotnak. A megoldás egyértelmüségéről szóló 2.3. tétel következményeként ekkor a (2) alatti egyenletrendszerek és igy az (1) alatti $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$ egyenlet is egyértelmüen oldható meg, vagyis a jobboldali inverz egyértelmü. Ugyanez a feltétele az $\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ egyenlet egyértelmü megoldhatóságának is és igy 3.1. alapján az invertálhatóságnak.

3.3. Példa

Határozzuk meg - amennyiben létezik az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

Az inverz létezésének megállapitása és az inverz mátrix megkeresése egyszerre történhet ugy, hogy egyszerre oldjuk meg az

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}_i = \underline{e}_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

egyenletrendszereket.

A szokott módon $\underline{\underline{A}}$ mellé irjuk az egyenletrendszer jobb oldalán álló vektort - most mind az n darab jobb oldali vektort - ekkor a következő bővitett mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

és $\underline{\underline{A}}$ oszlopait bevonva a bázisba, adódik:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Tehát $\underline{\underline{A}}^{-1}$ létezik és

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4. KITŰZÖTT FELADATOK

1. Bizonyitsa be, hogy

$$\text{rang}\ (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \leqslant \text{rang}\ \underline{\underline{A}} + \text{rang}\ \underline{\underline{B}}$$

2. Bizonyitsa be, hogy

$$\text{rang}\ (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \leqslant \min\ (\text{rang}\ \underline{\underline{A}},\ \text{rang}\ \underline{\underline{B}})$$

3. Konstruáljon olyan kvadratikus $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{E}}$ mátrixot, amelynek inverze megegyezik a transzponáltjával:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}.$$

4. Bizonyitsa be, hogy ha egy lineáris egyenletrendszernek van két különböző pozitiv megoldása, akkor van nem pozitiv megoldása is. (Az $\underline{x}$ megoldást pozitivnak nevezzük, ha minden koordinátája pozitiv.)

VI. A DETERMINÁNS

1. A DETERMINÁNS FOGALMA ÉS ÉRTÉKÉNEK KISZÁMÍTÁSA

A matematika különböző területein - az algebrában, az analizisben, sőt még a geometriában is - és müszaki problémák megoldásánál is hasznos segédeszköz a determináns. E jegyzet első fejezetében már használtunk determinánst többek között paralelogramma alapu hasáb térfogatának kiszámitásánál, anélkül, hogy általánosan meghatároztuk volna a fogalmát. Induljunk most ki az emlitett vektoralgebrai problémából.

Legyen

$$\underline{a} = a_1\,\underline{i} + a_2\,\underline{j} + a_3\,\underline{k}$$
$$\underline{b} = b_1\,\underline{i} + b_2\,\underline{j} + b_3\,\underline{k}$$
$$\underline{c} = c_1\,\underline{i} = c_2\,\underline{j} + c_3\,\underline{k}$$

Tudjuk, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan függetlenek - nem egysikuak - akkor az általuk kifeszitett hasáb előjeles térfogatát megadja az $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ vegyesszorzat. Ha a vektorok koordinátáit mátrixba rendezzük:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

fentiek ugy is fogalmazhatók, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz hozzárendeltünk egy számot, az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszitett paralelepipedon előjeles térfogatát. (Az I. 5.3./5 tételben azt is megmutattuk, hogy hogyan lehet ezt a számot a koordinátákból kiszámitani.) Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineárisan összefüggnek - egysikuak -, akkor $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$ és mondhatjuk, hogy lineárisan összefüggő $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ esetén $\underline{\underline{A}}$-hoz nullát rendeltünk.

Igy értelmeztünk egy függvényt, amely a harmadrendü kvadratikus mátrixok halmazán értelmezett és minden ilyen mátrixhoz a fent leirt módon rendel számot. Nevezzük ezt a függvényt <u>harmadrendü determinánsnak.</u>

1.1. A harmadrendü determináns néhány tulajdonsága

1. Az egységoldalu kocka térfogata 1. Ebből következik, hogy az

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz a determináns 1-et rendel. Rövidebben: $\det \underline{\underline{E}} = 1$.

2. Ha egy hasáb élét c-szeresre változtatjuk, akkor c-szeresre változik a térfogat is. Ugyanis a $c \cdot \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ által kifeszitett hasáb térfogata:

$$V_1 = c\, \underline{a}_1\, \underline{a}_2\, \underline{a}_3 = c \cdot V,$$

amennyiben $V = \underline{a}_1\, \underline{a}_2\, \underline{a}_3$.

Ebből következik, hogy ha

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = D, \quad \text{akkor}$$

$$\det \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = c \cdot D$$

3. Az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok által kifeszitett hasáb térfogata az $\underline{a}, \underline{c}, \underline{d}$ és $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok által kifeszitett hasábok térfogatainak összege, ugyanis:

$$(\underline{a} + \underline{b})\, \underline{c} \times \underline{d} = \underline{a}\, \underline{c}\, \underline{d} + \underline{b}\, \underline{c}\, \underline{d}$$

Ebből következik, hogy

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

4. Végül, ha a mátrixnak van két azonos oszlopa, akkor determinánsa nulla, ugyanis a lineárisan összefüggő vektorok által kifeszitett "hasáb" térfogata $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 0$.

Azért ragadtuk ki a harmadrendü determinánsnak ezt a négy tulajdonságát, mert ezek segitségével fogjuk definiálni tetszőleges n-edrendü kvadratikus mátrix determinánsát.

1.2. Definició

n-edrendü determinánsnak azt a függvényt nevezzük, amely az n-edrendü kvadratikus mátrixokhoz rendel számot a következő módon:

1^o $\det \underline{\underline{E}} = 1$

2^o $\det (\underline{a}_1 \ldots c\,\underline{a}_i \ldots \underline{a}_n) = c \det (\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i \ldots \underline{a}_n)$

3^o $\det (\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i + \underline{b} \ldots \underline{a}_n) =$

$= \det (\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i \ldots \underline{a}_n) + \det (\underline{a}_1 \ldots \underline{b} \ldots \underline{a}_n)$

4^o $\det (\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i\, \underline{a}_{i+1} \ldots \underline{a}_n) = 0$, ha $\underline{a}_i = \underline{a}_{i+1}$.

Megjegyzések:

1. Természetesen ez a definició akkor megfelelő, ha megmutatjuk, hogy minden n-re van olyan függvény, amely eleget tesz az axiómáknak és az axiómarendszer egyértelmüen határozza meg ezt a függvényt. Erre a kérdésre visszatérünk.
2. A 2^o és 3^o axióma azt fejezi ki, hogy a determináns az oszlopvektoroknak homogén lineáris függvénye.

Elnevezés és jelölés:

Azt a számot, amelyet a determináns a kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz rendel, az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsának nevezzük és

$\det \underline{\underline{A}}$, $|\underline{\underline{A}}|$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ módon jelöljük.

Az axiómarendszer néhány következménye:

1.3. Tétel

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix egyik oszlopa csupa nulla elemből áll, akkor

$$\det \underline{\underline{A}} = 0.$$

Bizonyitás:

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix csupa nullából álló oszlopát tetszőleges $c \neq 0$ számmal megszorozva a mátrix és igy determinánsa is változatlan marad.

Másrészt a 2^{o} axióma alapján $\det \underline{\underline{A}}$ a $c \neq 0$ számmal szorzódik.

Igy

$$c \cdot \det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}, \quad \text{amiből}$$

$c \neq 0$ miatt $\det \underline{\underline{A}} = 0$ következik. ∎

1.4. Tétel

Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix két oszlopát felcseréljük, a determináns (-1)-gyel szorzódik.

Bizonyitás:

Mivel a mátrix i. és j. oszlopának felcserélése (legyen $i<j$) $2(j-i)-1$ szomszédos cserével megvalósitható, ezért elég az állitást szomszédos oszlopokra belátni. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i. és $i+1$. oszlopának felcserélésével nyert mátrixot $\underline{\underline{A}}_1$-gyel jelölve megmutatjuk, hogy

$$\det \underline{\underline{A}}_1 = -\det \underline{\underline{A}}.$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot módositsuk ugy, hogy az i. és az $(i+1)$ oszlopába is $\underline{a}_i + \underline{a}_{i+1}$-et irunk. A 4^{o} axióma alapján

$$\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i + \underline{a}_{i+1}\ \underline{a}_i + \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = 0 \tag{1}$$

A 3^{o} axiómát felhasználva (1)-ből következik, hogy

$$\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i\ \underline{a}_i + \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1}\ \underline{a}_i + \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = 0 \tag{2}$$

és ismét a 3^{o} axiómát alkalmazva:

$$\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i\ \underline{a}_i \dots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_i\ \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) +$$

$$+ \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1}\ \underline{a}_i \dots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{i+1}\ \underline{a}_{i+1} \dots \underline{a}_n) = 0 \tag{3}$$

A 4^o axiómából következik, hogy (3)-ban az első és az utolsó tag nulla, és igy

$$\det(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i\ \underline{a}_{i+1} \ldots \underline{a}_n) = -\det(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_{i+1}\ \underline{a}_i \ldots \underline{a}_n),$$

mint állitottuk. ∎

1.5. Tétel

Ha egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix valamelyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopának konstansszorosát, det $\underline{\underline{A}}$ nem változik.

Bizonyitás:

$$\det(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i + c \cdot \underline{a}_j \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n =$$

$$= \det(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_i \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1 \ldots c \cdot \underline{a}_j \ldots \underline{a}_j \ldots \underline{a}_n)$$

a 3^o axióma alapján. Az összeg második tagja viszont a 2^o és 4^o axióma értelmében nulla. Ezzel állitásunkat igazoltuk. ∎

Az 1.3., 1.4., 1.5. tételek a determináns fontos tulajdonságait ismertették. Ha van $n \neq 3$ esetén is n-edrendü determináns, akkor az a fenti három tulajdonsággal rendelkezik, igy felhasználhatjuk ezeket a tulajdonságokat is az exisztencia és unicitás bizonyitásához.

1.6. Tétel

Az axióma-rendszer minden kvadratikus mátrixhoz egyértelmüen rendel determinánst.

Bizonyitás:

Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

bázisban $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorai egyértelmüen előállithatók

$$\underline{a}_1 = a_{11}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{n1}\,\underline{e}_n$$

$$\dots$$

$$\underline{a}_n = a_{1n}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{nn}\,\underline{e}_n$$

alakban. A 3^o axióma felhasználásával $\det \underline{\underline{A}}$ n^n mátrix determinánsának összegeként állitható elő. Ezek közül azonban a 4^o axióma következtében minden olyan tag nulla, amelyben legalább két azonos oszlopvektor szerepel.

Igy $\det \underline{\underline{A}}$ egyértelmüen a következő összegként irható:

$$\det \underline{\underline{A}} = \det (a_{11}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{n1}\,\underline{e}_n, \dots a_{1n}\,\underline{e}_1 + \dots + a_{nn}\,\underline{e}_n) =$$

$$= \det (a_{11}\,\underline{e}_1,\ a_{22}\,\underline{e}_2,\ \dots,\ a_{nn}\,\underline{e}_n) +$$

$$+ \det (a_{21}\,\underline{e}_2,\ a_{12}\,\underline{e}_1, \dots,\ a_{nn}\,\underline{e}_n) + \dots +$$

$$+ \det (a_{n1}\,\underline{e}_n,\ \dots,\ a_{1n}\,\underline{e}_1). \qquad (1)$$

A jobb oldalon annyi mátrix determinánsának az összege szerepel, ahány különböző sorrendje van az $1, 2, \dots, n$ számoknak. A 2^o axióma felhasználásával a következő adódik (1)-ből:

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn} \det (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) +$$

$$+ a_{21} \dots a_{nn} \det (\underline{e}_2,\ e_1 \dots, \underline{e}_n) + \dots +$$

$$+ a_{n1} \dots a_{1n} \det (\underline{e}_n, \dots, \underline{e}_1) \qquad (2)$$

Ha megmutatjuk, hogy minden egységoszlopvektorból álló mátrixhoz tartozik egyértelmüen meghatározott determináns, akkor állitásunkat igazoltuk. Ez az 1^o axiómából következik, felhasználva az 1.4. tételt.

Az 1^o axióma szerint:

$$\det (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$$

A többi egységoszlopvektorokból álló mátrix oszlopcserével keletkezik az $\underline{\underline{E}}$ mátrixból és igy - aszerint, hogy páros vagy páratlan számu oszlopcserével keletkezik-e - determinánsa 1, vagy - 1.

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa az előbbiek alapján:

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum (-1)^{J(p)}\, a_{p_1 1} \cdot a_{p_2 2} \dots a_{p_n n} \qquad (3)$$

ahol $p_1, \ldots, p_n$ az $1, 2, \ldots n$ számok egy sorrendje, az összegezést az összes különböző sorrendekre kell elvégezni. A $J(p)$ kitevő azon sorindex-cserék száma, amellyel a sorindexek természetes sorrendbe rendezhetők.

Ezzel megmutattuk, hogy minden kvadratikus mátrixnak van egyértelmüen meghatározott determinánsa, és módszert is nyertünk - gyakorlati számitásokra nem a legalkalmasabbat - a kiszámitására. ∎

1.7. Definició

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minormátrixának azokat a mátrixokat nevezzük, amelyek az $\underline{\underline{A}}$ mátrix bizonyos sorainak és oszlopainak törlésével keletkeznek.

Jelölés:

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i. sorának és j. oszlopának törlésével keletkező minormátrixot $\underline{\underline{A}}_{ij}$-vel jelöljük és az a_{ij} elemhez tartozó minormátrixnak nevezzük.

A következő tétel azt mutatja meg, hogy hogyan lehet az $n \times n$-es $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsának kiszámitását n darab $(n-1)$-ed rendü minormátrix determinánsának meghatározására visszavezetni.

1.8. Tétel

Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$, nxn-es mátrix

$$\det \underline{\underline{A}} = (-1)^{k+1} a_{1k} \det \underline{\underline{A}}_{1k} + \ldots + (-1)^{k+n} a_{nk} \det \underline{\underline{A}}_{nk}, \qquad (1)$$

ahol $1 \leq k \leq n$.

A tétel szerint az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa előállitható ugy, hogy tetszőleges oszlopának minden elemét rendre megszorozzuk a hozzá tartozó minormátrix megfelelő előjellel ellátott determinánsával, és a kapott szorzatokat összeadjuk. Ezt az előállitást a determináns oszlop szerinti kifejtésének nevezzük.

Bizonyitás:

Az 1.6. tétel értelmében az axiómarendszer minden kvadratikus mátrixhoz egyértelmüen rendel determinánst, ezért állitásunk igazolásához elég megmutatnunk, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik} \qquad 1 \leq k \leq n \qquad (1)$$

összeg (az $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz tartozó un. k-adik oszlop szerinti kifejtés) kielégíti az axiómarendszert.

1. Legyen $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixhoz tartozó (1) alatti k-adik oszlop szerinti kifejtés a következő alaku:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} \det \underline{\underline{E}}_{ik} ; \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

Mivel $\det \underline{\underline{E}}_{kk} = 1$, az összeg értéke 1, ami megegyezik det $\underline{\underline{E}}$-vel és igy (1) eleget tesz az 1^{o} axiómának.

2. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix j-edik oszlopának elemeit egy c számmal. A kapott mátrixot jelöljük $\underline{\underline{A}}^{(j,c)}$-vel.

a) Ha $j = k$, akkor az $\underline{\underline{A}}^{(j,c)}$-hez tartozó k-adik oszlop szerinti kifejtés:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} c\, a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik} = c \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik}$$

A jobb oldal az $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz tartozó (1) kifejtés c-szerese, tehát a $j = k$ esetben teljesül a 2^{o} axióma.

b) Ha $j \neq k$, akkor az $\underline{\underline{A}}^{(j,c)}$-hez tartozó összeg:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik}^{(j,c)},$$

ahol $\det \underline{\underline{A}}_{ik}^{(j,c)} = c \det \underline{\underline{A}}_{ik}$, mivel $\underline{\underline{A}}_{ik}^{(j,c)}$ j. oszlopa $\underline{\underline{A}}_{ik}$ j. oszlopának c-szerese.

Igy

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det \underline{\underline{A}}_{ik}^{(j,c)} = c\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det \underline{\underline{A}}_{ik},$$

tehát teljesül a 2^o axióma a $j \neq k$ esetben is.

3. Adjunk hozzá az $\underline{\underline{A}}$ mátrix j-edik oszlopához egy

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ oszlopvektort és az igy kapott

mátrixot jelöljük $\underline{\underline{A}}^{(j,\underline{b})}$-vel.

a) Ha $j = k$, akkor $\underline{\underline{A}}^{(j,\underline{b})}$-hez a következő (1) alaku kifejezés tartozik:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}(a_{ik}+b_i)\det \underline{\underline{A}}_{ik} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det \underline{\underline{A}}_{ik} + \sum^{n}(-1)^{i+k}b_i\det \underline{\underline{A}}_{ik},$$

tehát a $j = k$ esetben fennáll a 3^o axióma.

b) Ha $j \neq k$, akkor az $\underline{\underline{A}}^{(j,\underline{b})}$-hez tartozó kifejtés a következő:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det \underline{\underline{A}}_{ik}^{(j,\underline{b})} \tag{2}$$

Det $\underline{\underline{A}}_{ik}^{(j,\underline{b})}$ két determináns összegére bontható. Az egyik det $\underline{\underline{A}}_{ik}$, a másik ahhoz a mátrixhoz tartozik, amelyik

$$\underline{\underline{A}}_{ik} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i-1j} \\ a_{i+1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{oszlopának a} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{i-1} \\ b_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

oszloppal történő helyettesitésével keletkezik (jelöljük ezt $\underline{\underline{A}}^{b}_{ik}$-vel). Ennek felhasználásával (2)-ből adódik:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}^{(j,b)}_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}^{b}_{ik},$$

ami azt jelenti, hogy a mátrixhoz rendelt összeg a $j \neq k$ esetben is eleget tesz a 3^{o} axiómának.

4. Legyen az $\underline{\underline{A}}$ mátrix j-edik és (j+1)-edik oszlopa egyenlő.

a) Ha $k \neq j$ és $k \neq j+1$, akkor az $\underline{\underline{A}}$-hoz tartozó k-adik oszlop szerinti

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik}$$ kifejtés minden tagja nulla, mert az $\underline{\underline{A}}_{ik}$ mátrixok mindegyikének van két azonos oszlopa, és igy

$$\det \underline{\underline{A}}_{ik} = 0 \qquad i=1,\dots,n$$

miatt az $\underline{\underline{A}}$-hoz rendelt (1) alaku összeg is nulla.

b) Ha $\underline{\underline{A}}$ két megegyező oszlopa a k-adik és a (k+1)-edik, akkor a mátrix rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyitjuk be, hogy a k-adik oszlop szerinti kifejtés nulla.

Legyen először $\underline{\underline{A}}$ másodrendü mátrix. Ekkor

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}, \text{ a kifejtés:}$$

$a_{11}\, a_{21} - a_{11}\, a_{21} = 0.$

Tegyük fel ezután, hogy állitásunk minden legfeljebb (n-1)-edrendü mátrixra igaz és mutassuk meg, hogy akkor n-edrendü $\underline{\underline{A}}$ mátrixra is igaz.

Az $\underline{\underline{A}}$-hoz tartozó kifejtés:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik} \tag{3}$$

Az indukciós feltevés és a tétel már bizonyitott 1.2.3. pontja értelmében az (n-1)-edrendü $\underline{\underline{A}}$ mátrixok determinánsainak kifejtését már használhatjuk. Det $\underline{\underline{A}}_{ik}$-t $i=1,2,\dots,n$-re az $\underline{a}_{k+1}$ oszlop szerint kifejtve megmutatjuk, hogy (3) igy nyert alakjában minden tagnak a (-1)-szerese is szerepel, tehát értéke nulla.

Irjuk fel két minormátrix determinánsának kifejtését:

$$\det \underline{\underline{A}}_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+k} a_{jk+1} \det (\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1} +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{j+k-1} a_{jk+1} \det (\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

és

$$\det \underline{\underline{A}}_{jk} = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+k} a_{ik+1} \det (\underline{\underline{A}}_{jk})_{ik+1} +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+k-1} a_{ik+1} \det (\underline{\underline{A}}_{jk})_{ik+1}, \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

[$(\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1}$ azt a mátrixot jelöli, amely $\underline{\underline{A}}$-ból annak i-edik és j-edik sorát és k-adik és (k+1)-edik oszlopát elhagyva keletkezett.]

A kifejtéseket felhasználva irjuk fel (3) két tagját:

$$(-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{\underline{A}}_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2k} a_{ik} a_{jk+1} \det (\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1} +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{i+j+2k-1} a_{ik} a_{jk+1} \det (\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1} \tag{4}$$

$$(-1)^{j+k} a_{jk} \det \underline{\underline{A}}_{jk} = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+j+2k} a_{jk} a_{ik+1} \det (\underline{\underline{A}}_{jk})_{ik+1} +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j+2k-1} a_{jk} a_{ik+1} \det (\underline{\underline{A}}_{jk})_{ik+1} \tag{5}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\left.\begin{array}{l} a_{jk+1} = a_{jk} \\ a_{ik+1} = a_{ik} \end{array}\right\}, \text{ mert a k. és (k+1) oszlop megegyezik}$$

$$\det (\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1} = \det (\underline{\underline{A}}_{jk})_{ik+1}, \text{ mert}$$

azonos minormátrixok determinánsai,

végül, ha $i<j$ akkor a (4)-ben szereplő

$$(-1)^{i+j+2k-1} a_{ik}\, a_{jk+1} \det (\underline{\underline{A}}_{ik})_{jk+1}$$

tag (5) első szummájában ellenkező előjellel szerepel, hasonlóan $i>j$ esetén. Minden taggal együtt szerepel annak (-1)-szerese, tehát a (3) kifejtés értéke nulla.

Ezzel beláttuk, hogy a k. oszlop szerinti kifejtés ($1 \leqslant k \leqslant n$) eleget tesz a determinánst egyértelmüen definiáló axiómarendszernek és ezzel az állitást bizonyitottuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy ha felcseréljük egy mátrix sorait oszlopaival, akkor mi történik a determinánsával?

<u>1.9. Tétel</u>

$$\det \underline{\underline{A}}' = \det \underline{\underline{A}}$$

<u>Bizonyitás:</u>

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az 1.6. tételben szereplő kiszámitási formula szerint $\det \underline{\underline{A}}$ értékét megkapjuk, ha elkészitjük az összes olyan n tényezős szorzatokat, amelyekben a mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elem szerepel, és ezeket a "megfelelő" előjellel ellátva összeadjuk.

$\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A}}'$ determinánsában ugyanazok az n tényezős szorzatok szerepelnek, csak azt kell megmutatni, hogy azonos előjellel is lépnek fel.

$\det \underline{\underline{A}}$ előállitásának egy tetszőleges tagja:

$$(-1)^{J(p)} \cdot a_{p_1 1} \cdot a_{p_2 2} \dots a_{p_n n} \qquad (1)$$

alaku, ahol mint tudjuk, a $J(p)$ kitevő azon sorindexcserék száma, amellyel a sorindexek természetes sorrendbe rendezhetők. Mivel $\underline{\underline{A}}'$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix transzponáltja, az $a_{p_i j}$ elem tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén az $\underline{\underline{A}}'$ mátrix j. sorában és p_i. oszlopában található. Igy a fenti szorzat tényezőinek sorrendje eltérhet (1)-től, most ugyanis a $p_1, \dots p_n$ indexek természetes sorrendjének megfelelően követik egymást a tényezők. Ez azonban a szorzat előjelén nem változtat. Ugyanis az $a_{p_1 1} \dots a_{p_n n}$ szorzatnak a $p_1 \dots p_n$ indexek természetes sorrendjének megfelelő átrendezése ugy változtatja meg az $1, 2, \dots, n$ indexek természetes sorrendjét, hogy pontosan annyi cserével lehet ujból természetes sorrendbe rendezni, mint ahány cserével ezt a természetes sorrendet elrontottuk. Tehát a mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa azonos. ∎

Az 1.9. tételnek fontos következménye, hogy minden oszlopokkal kapcsolatos tulajdonság sorokra is érvényes.

Igy fennállnak 2., 3., 4. axiómának megfelelő tételek:

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \vdots \\ c\underline{a}'_i \\ \vdots \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix} = c.\det \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \vdots \\ \underline{a}'_i \\ \vdots \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix};$$

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \vdots \\ \underline{a}'_i + \underline{b}' \\ \vdots \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \vdots \\ \underline{a}'_i \\ \vdots \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \vdots \\ \underline{b}' \\ \vdots \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}'_1 \\ \vdots \\ \underline{a}'_i \\ \underline{a}'_i \\ \vdots \\ \underline{a}'_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ugyancsak érvényesek az 1.3., 1.4., 1.5. tételek megfelelői, amelyeket az olvasó is könnyen megfogalmazhat, az "oszlop" szó sorral való helyettesitésével.

1.10. Példa

Számitsuk ki az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsát.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A determinánst legegyszerübben az 1.5. tétel alapján számithatjuk ki, felhasználva a 2. axiómát, az 1.4. tételt és az 1. axiómát. Ennek a módszernek az a lényege, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot elemi oszloptranszformációkkal egységmátrixszá, vagy nullvektort tartalmazó mátrixszá alakitjuk és a felsorolt axiómák, valamint tételek alapján nyomon kisérjük, hogy ezek a transzformációk hogyan változtatják meg a mátrix determinánsát.

Kisérjük végig e módszert a kitüzött feladaton. $\underline{\underline{A}}$ első oszlopát 2-vel osztva

$$\det \underline{\underline{A}} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Az átalakitott mátrix első oszlopát a második oszlopból és kétszeresét a harmadik oszlopból kivonva:

$$\det \underline{\underline{A}} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

A harmadik oszlop háromszorosát hozzáadva a második oszlophoz, majd azt elosztva (-10)-zel:

$$\det \underline{\underline{A}} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

A második oszlop "megfelelő" konstansszorosait az első és harmadik oszlopból kivonva, majd a harmadik oszlopot (-1)-gyel megszorozva, és végül az utolsó két oszlopot felcserélve kapjuk

$$\det \underline{\underline{A}} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -20$$

Megjegyzés:

A determináns kiszámitása történhet sortranszformációkkal is és oszlop- és sortranszformációk együttes alkalmazásával is.

A III. fejezet 3. pontjában emlitést tettünk arról, hogy az elemi sor-, ill. oszloptranszformációkat létrehozhatjuk az egységmátrix megfelelő transzformáltjával történő szorzással. Igy például

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1i}\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ a_{n1}\dots a_{ni}\dots a_{nn} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad i \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & . & \dots & 0 \\ . & & & . & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & c & & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11}\dots ca_{1i}\dots a_{1n} \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ a_{n1}\dots ca_{ni}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

A bal oldalon álló tényezők determinánsainak a szorzata $|\underline{\underline{A}}| \cdot c$ és ez pontosan a jobb oldali mátrix determinánsa. A példa azt sejteti, hogy egy szorzat mátrix determinánsa a tényezők determinánsainak a szorzata. Ezt a sejtést igazolja az

1.11. Tétel

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}}$$

Bizonyitás:

Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{és}$$

jelöljük $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorait rendre: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$-nel. Fenti jelölésekkel:

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(b_{11}\,\underline{a}_1 + b_{21}\,\underline{a}_2 + \dots + b_{n1}\,\underline{a}_n, \dots, b_{1n}\,\underline{a}_1 + b_{2n}\,\underline{a}_2 + \dots + b_{nn}\,\underline{a}_n).$$

Hasonlóan az 1.6. tétel bizonyitásához használjuk fel a 3. és 4. axiómát. A következő összeget kapjuk:

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(b_{11}\underline{a}_1, b_{22}\underline{a}_2, \dots, b_{nn}\underline{a}_n) + \det(b_{21}\,\underline{a}_2, \dots, b_{nn}\underline{a}_n) + \dots + \det(b_{n1}\,\underline{a}_n, \dots, b_{1n}\underline{a}_1).$$

Felhasználva a 2^o axiómát

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = b_{11}b_{12}\dots b_{nn} \det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) + b_{21}\dots b_{nn} \det(\underline{a}_2 \dots \underline{a}_n) + \dots + b_{n1} \dots b_{1n} \det(\underline{a}_n, \dots \underline{a}_1) \qquad (*)$$

adódik.

Vegyük észre, hogy (*) minden tagjában det $\underline{A}$ vagy -det $\underline{A}$ szerepel tényezőként és det A-t kiemelve, a második tényező det $\underline{B}$ előállitása összeg alakban:

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \sum (-1)^{J(p)}\, b_{p_1 1} \dots b_{p_n n}.$$

Ezzel állitásunkat igazoltuk. ■

A szorzástétel következménye az

1.12 Tétel

Ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható mátrix, akkor

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}.$$

Bizonyitás:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$-ből az 1.11. tételt felhasználva adódik:

a det $\underline{\underline{A}}$ · de $\underline{\underline{A}}^{-1}$ = 1 állitás. ■

Megjegyzés:

A tételből az is kiderül, hogy invertálható mátrix determinánsa nem lehet nulla. Azt már régről tudjuk, hogy az invertálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy a kvadratikus $\underline{\underline{A}}$ mátrix oszlop- ill. sorvektorai lineárisan függetlenek legyenek. Az 1.12. tétel szerint, ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható, akkor det $\underline{\underline{A}} \neq 0$, tehát ha $\underline{\underline{A}}$ oszlopai ill. sorai lineárisan függetlenek, akkor det $\underline{\underline{A}} \neq 0$. Felmerül a kérdés hogy megfordítható-e a következtetés és általában, milyen kapcsolata van egymással a mátrix determinánsának és rangjának. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk a következő pontban.

2. A DETERMINÁNS KAPCSOLATA A MÁTRIX RANGJÁVAL

Figyelembe véve vektoralgebrai ismereteinket azt várjuk, hogy egy mátrix determinánsa akkor és csak akkor nulla, ha oszlop- ill. sorvektorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak. Ugyanis a háromdimenziós vektortérben a paralelepipedon térfogata (az $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ vegyesszorzat) akkor és csak akkor nulla, ha a három kifeszítő vektor egysíku. Sejtésünk egyik része már az előző pont végén beigazolódott, másik részét most fogjuk bizonyitani. A kettőt együtt mondja ki a

2.1. Tétel

Az $n \times n$-es $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsa akkor és csak akkor nulla, ha

$$\text{rang } \underline{\underline{A}} < n.$$

Bizonyitás:

a) A fogalomból következik, hogy rang $\underline{\underline{A}} \leq n$. Ha rang $\underline{\underline{A}} = n$, akkor az n darab oszlopvektor ill. sorvektor lineárisan független. Mint az 1.12. tétel alapján már beláttuk, akkor

det $\underline{\underline{A}} \neq 0$.

b) Még be kell bizonyitanunk, hogy ha

rang $\underline{\underline{A}} < n$, akkor

det $\underline{\underline{A}} = 0$.

Ha rang $\underline{\underline{A}} < n$, akkor $\underline{\underline{A}}$ oszlopvektorai: $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ lineárisan összefüggők. Ezért vagy van közöttük $\underline{0}$ ekkor det $\underline{\underline{A}} = 0$ (l. 1.3. tétel), vagy van olyan $\underline{a}_i \neq \underline{0}$, amely kifejezhető a többi vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a}_i = c_1 \underline{a}_1 + \ldots + c_{i-1} \underline{a}_{i-1} + c_{i+1} \underline{a}_{i+1} + \ldots + c_n \underline{a}_n ,$$

ekkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{a}_i$ oszlopából $c_1 \underline{a}_1$-et, majd $c_2 \underline{a}_2$-t, ... végül $c_n \underline{a}_n$-et levonva az $\underline{a}_i$ vektor helyére $\underline{0}$ kerül. Az 1.5. tétel szerint a fenti oszloptranszformációk következtében a determináns nem változik, igy det $\underline{\underline{A}} = 0$. ∎

Az előbbi tételből igen egyszerüen következik, hogy nem kvadratikus mátrix rangja és nullától különböző determinánsu minormátrixainak rendje között kapcsolat van. Ezt fogalmazza meg a

2.2. Tétel

A k sorból és n oszlopból álló $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja egyenlő $\underline{\underline{A}}$ legnagyobb méretü nullától különböző determinánsu kvadratikus minormátrixának sor-, ill. oszlopszámával.

Bizonyitás:

a) Először megmutatjuk, hogy ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak van olyan r x r-es $\underline{\underline{B}}$ minormátrixa, amelynek determinánsa nem nulla, de minden r + 1-ed rendü minormátrix determinánsa nulla, akkor

$$\text{rang } \underline{\underline{A}} = r .$$

Feltehetjük, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix bal felső sarkában levő r-ed rendü minormátrix determinánsa nem nulla, hiszen ez sor- és oszlopcseréval - ami a rangon nem változtat - mindig elérhető.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \ldots a_{1r}}^{\underline{\underline{B}}} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{k1} \ldots a_{kr} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} ,$$

$$\det \underline{\underline{B}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

a feltétel szerint. Ekkor a 2.1. tétel alapján oszlop- és sorvektorai lineárisan függetlenek. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris függetlenségéből viszont következik az $\underline{\underline{A}}$ mátrix $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ vektorainak lineáris függetlensége. Hasonlóan igazak fentiek $\underline{\underline{A}}$ sorvektoraira is. Több lineárisan független vektora $\underline{\underline{A}}$-nak nem lehet, mert akkor lenne legalább egy $r+1$-ed rendü nullától különböző determinánsu minormátrixa, a feltétellel ellentétben.

b) Másrészt, ha rang $\underline{\underline{A}} = r$, akkor van r lineárisan független oszlop- ill. sorvektor.

Az általuk alkotott r-edrendü mátrix determinánsa a 2.1. tétel szerint nem nulla. Magasabb rendü nem nulla determinánsu minormátrixa $\underline{\underline{A}}$-nak nem lehet, mert akkor volna a feltétellel ellentétben r-nél több független vektora. ∎

3. PÉLDÁK ÉS KITŰZÖTT FELADATOK

1. Mutassa meg, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható mátrix, akkor inverze előállitható a következőképpen:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\underline{A}}|} \begin{pmatrix} |\underline{\underline{A}}_{11}| & -|\underline{\underline{A}}_{21}| & \dots & (-1)^{n+1} |\underline{\underline{A}}_{n1}| \\ -|\underline{\underline{A}}_{12}| & |\underline{\underline{A}}_{22}| & \dots & (-1)^{n+2} |\underline{\underline{A}}_{n2}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} |\underline{\underline{A}}_{1n}| & & \dots & |\underline{\underline{A}}_{nn}| \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}_{ij}$ az 1.7. definicióban használt jelölésnek megfelelően az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i. sorának és j. oszlopának törlésével keletkező minormátrix.

Végezzük el az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$ szorzást. A szorzat első eleme az $\underline{\underline{A}}$ mátrix determinánsának az első sor szerinti kifejtése:

$$a_{11} |\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12} |\underline{\underline{A}}_{12}| + - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} |\underline{\underline{A}}_{1n}| = |\underline{\underline{A}}| .$$

A szorzat mátrix első sorának második eleme:

$$-a_{11}\,|\underline{\underline{A}}_{21}| + a_{12}\,|\underline{\underline{A}}_{22}| -+\dots (-1)^{n+2}\, a_{1n}\,|\underline{\underline{A}}_{2n}|,$$

amelynek értéke nulla, mivel az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nulla determinánsu mátrix második sor szerinti kifejtése.

Hasonlóan belátható, hogy a szorzatmátrix főátlójában lesznek csupán nem nulla elemek és ezek mind $|\underline{\underline{A}}|$-val egyenlők. Igy

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\underline{A}}|} \begin{pmatrix} |\underline{\underline{A}}| & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & |\underline{\underline{A}}| \end{pmatrix} = \underline{\underline{E}}\,.$$

2. Bizonyitsa be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ mátrix főátlója fölött (vagy alatt) álló elemek mind nullák - $\underline{\underline{A}}$ háromszögmátrix -, akkor a determináns értéke megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az 1.8. tétel alapján az első oszlop szerinti kifejtéssel adódik az állitás.

3. Mutassa meg, hogy ha egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix a_{ij} elemei

$$a_{ij} = \min\,(i, j)$$

alakuak ($i=1, 2, \dots n$; $j=1, 2, \dots, n$), akkor $\det \underline{\underline{A}} = 1$.

4. A

$$\underline{\underline{V}}_n = \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

alaku mátrix determinánsát Vandermonde-féle determinánsnak nevezik.

Mutassa meg, hogy

$$|\underline{\underline{V}}_n| = (a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)\cdot(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n).$$

5. Bizonyitsa be, hogy ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_1 & \underline{\underline{0}} \\ & \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}_2 \end{pmatrix},$$

ahol $\underline{\underline{A}}_1$ és $\underline{\underline{A}}_2$ kvadratikus mátrixok, akkor

$$\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}_1 \cdot \det \underline{\underline{A}}_2$$

6.

$$P_n(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & & & \overset{n}{\smile} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} \end{array}$$

Határozza meg a $P_n(x)$ polinom együtthatóit.

VII. EUKLIDESZI TEREK

A vektortér fogalmát a térvektorok bizonyos müveletei és ezek tulajdonságai alapján alakitottuk ki. A térvektorok halmazában azonban fontos szerepet játszik a skaláris szorzás, ugyanis a vektorok merőlegessége, vetülete, távolsága, abszolutértéke mind a skaláris szorzattal fejezhetők ki. Igy, ha egy vektortérben be tudunk vezetni skaláris szorzásnak megfelelő müveletet, akkor fenti fogalmak is értelmezhetőek lesznek és mód nyilik határérték fogalom bevezetésére, analizis kiépitésére.

1. SKALÁRIS SZORZAT

1.1. Definició

A V vektortérben skaláris szorzat (belső szorzat) értelmezett, ha V minden $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ elempárjához egyértelmüen hozzárendelt egy skalár - jele: $(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)$; neve: $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ skaláris szorzata - és a hozzárendelés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = \overline{(\underline{v}_2 | \underline{v}_1)}$
2. $(c\,\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = c(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)$ $(c \in K$ l. IV. 1.1.)
3. $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = (\underline{v}_1 | \underline{v}_3) + (\underline{v}_2 | \underline{v}_3)$
4. $(\underline{v} | \underline{v}) \geqslant 0$ és $(\underline{v} | \underline{v}) = 0 \Longleftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Megjegyezzük, hogy ha V valós számtest feletti vektortér, akkor 1. a szorzás kommutativitását fejezi ki. A többi axiómák is a térvektorok között értelmezett skaláris szorzás jólismert legfontosabb tulajdonságait fejezik ki.

Az axiómák egyszerü következménye az

1.2. Tétel

$$(\underline{v}_1 | c\,v_2) = \bar{c}\,(\underline{v}_1 | v_2)$$

Bizonyitás:

$$(\underline{v}_1 | c\,\underline{v}_2) = \overline{(c\,\underline{v}_2 | \underline{v}_1)} \qquad \text{(1. axióma)}$$

$$\overline{(c\,\underline{v}_2 | \underline{v}_1)} = \overline{c\,(\underline{v}_2 | \underline{v}_1)} \qquad \text{(2. axióma)}$$

és akkor

$$(\underline{v}_1 | c\,\underline{v}_2) = \bar{c}\,(\underline{v}_1 | \underline{v}_2),$$ mint állitottuk. ∎

1.3. Példák

1. Az n valós elemü oszlopmátrixok vektorterében skaláris szorzás a következő hozzárendelés:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(\underline{a} | \underline{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

Az olvasó gondolja végig, hogy mind a négy definiáló axióma teljesül.

2. Legyen V a komplex elemü számennesek vektortere.

Ha $$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix},$$

akkor skaláris szorzatot ad a következő hozzárendelés:

$$(\underline{v} | \underline{z}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \bar{z}_i$$

3. Legyen V a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós folytonos függvények vektortere. (Müveletek: a függvényösszeadás és valós számmal szorzás) $f, g \in V$,

$$(f \,|\, g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti integrál is skaláris szorzást határoz meg:

Az 1. axióma teljesül, mert

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx$$

A 2. axióma teljesül, mert

$$\int_0^1 c.f(x)\, g(x)\, dx = c \cdot \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

A 3. axióma teljesül, mert

$$\int_0^1 [f(x) + g(x)]\, h(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, h(x)\, dx + \int_0^1 g(x)\, h(x)\, dx$$

és végül a 4. axióma is teljesül, mert ha $f(x) \equiv 0$

akkor $\int_0^1 f^2(x)\, dx = 0$ és ha $\int_0^1 f^2(x)\, dx = 0$,

akkor folytonos f függvény esetén $f(x) \equiv 0$ lehet csak.

1.4. Definició

Ha egy vektortérben skaláris szorzás értelmezett, akkor a vektorteret euklideszi térnek nevezzük.

Az n dimenziós euklideszi teret E_n-nel jelöljük.

2. NORMA

A továbbiakban az abszolutérték fogalmat fogjuk általánositani, bevezetjük a norma fogalmát.

2.1. Definició

A V vektortérben norma értelmezett, ha minden $\underline{v} \in V$ elemhez egyértelmüen hozzárendelt egy valós szám - jele: $\|\underline{v}\|$; neve: $\underline{v}$ normája - és a hozzárendelés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\|\underline{v}\| \geqslant 0$ és $\|\underline{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$, ha $\underline{v} \in V$

2. $\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2\| \leqslant \|\underline{v}_1\| + \|\underline{v}_2\|$, ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

3. $\|c \cdot \underline{v}\| = |c| \cdot \|\underline{v}\|$, ha $\underline{v} \in V$ és $c \in K$

2.2. Példák

1. Az n elemü oszlopmátrixok vektorterében egy szokásos norma a következő:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \|\underline{v}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$$

2. A fenti vektortérben egy másik használatos norma:

$$\|\underline{v}\| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy mindkét esetben teljesülnek a norma fogalmát definiáló axiómák.

3. Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények vektorterében egy gyakran használt norma:

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Az axiómák teljesülésének vizsgálatát feladatként tüzzük ki az olvasónak.

2.3. Definició

Ha egy vektortérben norma értelmezett, akkor a vektorteret normált térnek nevezzük.

3. EUKLIDESZI TÉR ÉS NORMÁLT TÉR KAPCSOLATA, CAUCHY-BUNYAKOVSZKIJ EGYENLŐTLENSÉG

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy minden euklideszi tér normált tér, ha $\|\underline{v}\| = \sqrt{(\underline{v} \,|\, \underline{v})}$ módon értelmezünk normát. Ennek belátásához is szükségünk van az egyébként is fontos egyenlőtlenségre:

3.1. Tétel: Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E$, akkor

$$|(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)|^2 \leqslant (\underline{v}_1 | \underline{v}_1) \cdot (\underline{v}_2 | \underline{v}_2)$$

Bizonyitás:

Ha $\underline{v}_1 = \underline{0}$, vagy $\underline{v}_2 = \underline{0}$, akkor mindkét oldal nulla, tehát teljesül az egyenlőtlenség. A továbbiakban $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$. Tetszőleges c komplex szám és $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E$ vektorokra igaz - lásd a skaláris szorzat definicióját (148.o.), hogy

$$(\underline{v}_1 - c\,\underline{v}_2 | \underline{v}_1 - c\,\underline{v}_2) \geqslant 0 \qquad (1)$$

Végezzük el a beszorzást és a skalárok kiemelését, akkor (1)-ből kapjuk:

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) - (c\,\underline{v}_2 | \underline{v}_1) - (\underline{v}_1 | c\,\underline{v}_2) + (c\,\underline{v}_2 | c\,\underline{v}_2) \geqslant 0 \qquad (2)$$

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_1) - c\,(\underline{v}_2 | \underline{v}_1) - \bar{c}\,\overline{(\underline{v}_2 | \underline{v}_1)} + |c|^2 (\underline{v}_2 | \underline{v}_2) \geqslant 0 \qquad (3)$$

Mivel a (3) egyenlőtlenség minden c komplex szám esetén teljesül, legyen

$$\frac{(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)}{(\underline{v}_2 | \underline{v}_2)} \qquad \text{(feltettük, hogy } \underline{v}_2 \neq \underline{0})$$

(3)-ból $(\underline{v}_2 | \underline{v}_2)$-vel szorzás és összevonás után adódik az állitás. ■

3.2. Tétel

Az E euklideszi térben $\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$ normát határoz meg. - Ezt nevezzük euklideszi normának -.

Bizonyitás:

Meg kell mutassuk, hogy $(\underline{v}|\underline{v})$ megfelel a 2.1. Definicióban szereplő norma fogalomnak.

Az nyilvánvaló, hogy $\forall\, \underline{v} \in E$-hez egyértelmüen tartozik valós $\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$ (lásd skaláris szorzat 4. axióma).

A hozzárendelés rendelkezik az 1; 2; 3 tulajdonsággal is

1. $\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})} \geqslant 0$ és $\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})} = 0 \Longleftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

2. $\sqrt{((\underline{v}_1+\underline{v}_2) \mid (\underline{v}_1+\underline{v}_2))} = \sqrt{(\underline{v}_1|\underline{v}_1) + (\underline{v}_1|\underline{v}_2) + (\underline{v}_2|\underline{v}_1) + (\underline{v}_2|\underline{v}_2)}$

$$=\sqrt{(\underline{v}_1|\underline{v}_1) + 2\operatorname{Re}(\underline{v}_1|\underline{v}_2) + (\underline{v}_2|\underline{v}_2)} \leqq \sqrt{(\underline{v}_1|\underline{v}_1) + 2|(\underline{v}_1|\underline{v}_2)| + (\underline{v}_2|\underline{v}_2)}$$

most alkalmazzuk az előbb bizonyitott 3.1. egyenlőtlenséget $|(\underline{v}_1|\underline{v}_2)|$--re, ezzel tovább növeljük az eredeti kifejezést és kapjuk:

$$\sqrt{((\underline{v}_1+\underline{v}_2)|(\underline{v}_1+\underline{v}_2))} \leqslant \sqrt{(\underline{v}_1|\underline{v}_1) + 2\sqrt{(\underline{v}_1|\underline{v}_1)}\sqrt{(\underline{v}_2|\underline{v}_2)} + (\underline{v}_2|\underline{v}_2)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(v_1|v_1)} + \sqrt{(v_2|v_2)}\right)^2},$$

vagyis előlegezve a $\|\underline{v}\|$ jelölést $\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$-re

$\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2\| \leqq \|\underline{v}_1\| + \|\underline{v}_2\|$ is fennáll.

3. $\sqrt{(c\,\underline{v}|c\,\underline{v})} = \sqrt{c.\bar{c}}\,\sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$, tehát

$\|c\,\underline{v}\| = |c|\,\|\underline{v}\|$ is teljesül, mint állitottuk.

3.3. Példák

1. Az n valós elemü oszlopmátrixok vektorterében az euklidészi norma $\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$

A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség ebben a vektortérben a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

egyenlőtlenség fennállását jelenti.

2. A $[0,1]$ intervallumon folytonos valós függvények vektorterében a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség a következő integrálegyenlőtlenséget jelenti:

$$\left(\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqq \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 g^2(x)\, dx\right)$$

4. ORTOGONÁLIS VEKTOROK, ORTONORMÁLT BÁZIS, PROJEKCIÓ TÉTEL

A skaláris szorzat fogalma lehetővé teszi a hajlásszög, merőlegesség, vetület szemléletes fogalmainak általánositását, bevezetésüket euklideszi terekben.

4.1. Definició

Legyen $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_1 \in E_n$, $\underline{v}_2 \in E_n$. $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ φ hajlásszögén a

$$\varphi = \arc\cos \frac{(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)}{\|\underline{v}_1\| \, \|\underline{v}_2\|} \,; \qquad \varphi \in [0, \pi]$$

szöget értjük. (Itt a norma euklideszi normát jelent.) A definició a 3.1. egyenlőtlenség miatt értelmes, hiszen

$$\left| \frac{(\underline{v}_1 | \underline{v}_2)}{\|\underline{v}_1\| \quad \|\underline{v}_2\|} \right| \leqq 1 .$$

A szög fenti fogalmának logikus következménye a merőlegesség - ortogonalitás - következő definiciója.

4.2. Definició

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E$ vektorokat ortogonálisnak nevezzük, ha

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = 0 .$$

A térvektorokat többnyire ugyanabban a bázisban bontottuk fel komponensekre, az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok rendszerében. Ekkor a vektorok koordinátáit skaláris szorzással igen egyszerüen lehetett meghatározni. A továbbiakban megnézzük, hogy n-dimenziós euklideszi terekben van-e olyan bázis, amelynek vektorai páronként ortogonális egységnormáju vektorok és ha van, akkor rendelkezik-e az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ báziséhoz hasonló jó tulajdonságokkal.

4.3. Definició

Az E euklideszi tér $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorrendszerét ortogonális rendszernek nevezzük, ha $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant j \leqslant k$ és $i \neq j$ esetén

$$(\underline{v}_i | \underline{v}_j) = 0.$$

Ha még $(\underline{v}_i | \underline{v}_i) = 1$ $(i=1, \ldots, k)$ is teljesül, vagyis $\|\underline{v}_i\| = 1$, a vektorrendszert ortonormáltnak nevezzük.

4.4. Tétel

Ha a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in E$ vektorrendszer ortogonális és $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ $1 \leqslant i \leqslant k$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyitás:

Legyen

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \underline{v}_i = \underline{0} \qquad (1)$$

Szorozzuk meg (1) mindkét oldalát rendre a $\underline{v}_i$ $i=1, 2, \ldots, k$ vektorokkal, akkor az ortogonalitás miatt a

$$c_i (\underline{v}_i | \underline{v}_i) = 0 \qquad i=1, 2, \ldots, k \qquad (2)$$

egyenleteket kapjuk, amelyekből

$$c_i = 0 \qquad i=1, \ldots, k$$

következik, ami a vektorok lineáris függetlenségét jelenti.

Igy egy n dimenziós euklideszi tér bármely n elemü ortogonális vektorrendszere választható bázisnak. A vektorokat rendre elosztva normájukkal ortonormált bázist nyerünk és

4.5. Tétel

Ha B: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az E_n euklideszi tér egy ortonormált bázisa, és $\underline{x} \in E_n$, akkor $\underline{x}$ B bázisbeli $x_1, \ldots, x_n$ koordinátái

$$x_i = (\underline{x}|\underline{e}_i) \ ; \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

skaláris szorzattal számolhatók.

Bizonyitás:

$\forall \underline{x} \in E_n$ egyértelmüen állitható elő a B bázis vektoraival

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i \quad \text{alakban.}$$

Mindkét oldalt $\underline{e}_i$-vel $(i=1,\ldots,n)$ skalárisan szorozva

$$(\underline{x}|\underline{e}_i) = x_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

adódik, mint állitottuk. ∎

Felmerül a kérdés, hogy van-e minden euklideszi térnek ortogonális bázisa. A következőkben ismertetünk egy eljárást, amellyel lineárisan független vektorrendszerből ortogonális rendszer készithető. Ebből következik, hogy bármely bázisból ortogonális bázis konstruálható.

4.6. Tétel

Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás

Legyen $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ lineárisan független vektorrendszer. Ebből egy $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ ortogonális rendszert konstruálunk. Az ortogonális rendszer első vektora

$$\underline{c}_1 = \underline{b}_1 \quad \text{legyen.}$$

A második vektort

$$\underline{c}_2 = \underline{b}_2 + a_{12}\underline{c}_1 \tag{1}$$

alakban keressük, ugy választva az a_{12} együtthatót, hogy

$(\underline{c}_2|\underline{c}_1) = o$ teljesüljön.

(1) mindkét oldalát $\underline{c}_1$-gyel szorozva

$$(\underline{c}_2|\underline{c}_1) = (\underline{b}_2|\underline{c}_1) + a_{12}\,(\underline{c}_1|\underline{c}_1) \text{ adódik.}$$

Mivel $\underline{c}_1 \neq \underline{o}$, $(\underline{c}_1|\underline{c}_1) \neq o$, tehát oszthatunk vele és kapjuk, hogy

$$a_{12} = -\frac{(\underline{b}_2|\underline{c}_1)}{(\underline{c}_1|\underline{c}_1)}$$

és a IV. 2.7./6° tétel alapján a $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_n$ vektorrendszer is lineárisan független. Ezt az eljárást folytatjuk tovább. Tételezzük fel, hogy már megalkottuk a $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{k-1}$ páronként ortogonális vektorokat. A konstrukció miatt (l. IV.2.7./6°) a $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{k-1}, \underline{b}_k, \dots, \underline{b}_n$ rendszer is lineárisan független.

A k. vektort

$$\underline{c}_k = \underline{b}_k + a_{1k}\,\underline{c}_1 + a_{2k}\,\underline{c}_2 + \dots + a_{k-1k}\,\underline{c}_{k-1} \tag{2}$$

alakban keressük, ugy választva az a_{ik} együtthatókat, hogy $\underline{c}_k$ ortogonális legyen az összes őt megelőző $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{k-1}$ vektorral. (2)-t a $\underline{c}_i$ $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ vektorral szorozva

$$(\underline{c}_k|\underline{c}_i) = (\underline{b}_k|\underline{c}_i) + a_{ik}\,(\underline{c}_i|\underline{c}_i) \text{ adódik.}$$

A lineáris függetlenség miatt $(\underline{c}_i|\underline{c}_i) \neq o$, ezzel osztva

$$a_{ik} = -\frac{(\underline{b}_k|\underline{c}_i)}{(\underline{c}_i|\underline{c}_i)} \qquad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Az eljárás addig folytatható, amig az utolsó $\underline{b}_n$ vektorhoz jutunk, és igy megkonstruáltuk az ortogonális rendszert. ∎

4.7. Példák

1. Tekintsük a $[0, \pi]$ intervallumon a következő trigonometrikus polinomokat

$$T_n(t) = a_o + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k t + b_k \sin k t),$$
$$(a_k, b_k \text{ valós})$$

Ezek alteret alkotnak a folytonos függvények vektorterében. Ez a vektortér euklideszi térré tehető, ha skaláris szorzatot értelmezünk.

Legyen

$$(T_{n1} | T_{n2}) = \int_0^{2\pi} T_{n1}(t) \cdot T_{n2}(t)\ dt$$

Ebben az euklideszi térben ortogonális bázis a B: 1, cos t, sin t, ..., ..., cos nt, sin nt függvényrendszer, mivel bármelyik két különböző függvény szorzatintegrálja nulla.

2. Tekintsük a legfeljebb elsőfoku valós együtthatós polinomok E_2 kétdimenziós euklideszi terét a

$$(P_1 | P_2) = \int_0^1 P_1(x)\ P_2(x)\ dx \quad \text{skaláris szorzattal.}$$

Egy bázisa a térnek: 1, x. Készitsünk ebből ortogonális bázist.

Az uj bázis egyik vektora maradjon az azonosan 1 polinom. A másikat

$$x + a \cdot 1 \quad \text{alakban keressük}$$

ugy, hogy

$$\int_0^1 (x + a)\ dx = 0 \quad \text{legyen.}$$

Ebből $a = -\frac{1}{2}$ adódik és igy az ortogonális bázis:

$$1, \quad x - \frac{1}{2}.$$

Készitsünk ebből ortonormált bázist.

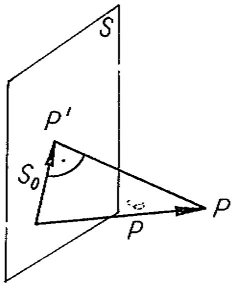
$$\| 1 \| = \sqrt{\int_0^1 dx} = 1$$

$$\| x - \frac{1}{2} \| = \sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Tehát egy ortonormált bázis:

$$1 \; ; \quad 2\sqrt{3}\, x - \sqrt{3} \, .$$

Tekintsük most a következő egyszerü geometriai feladatot. Adott egy S sik és egy P, a sikra nem illeszkedő pont. Keressük az S siknak azt a P' pontját, amely P-hez legközelebb van. A megoldás közismert, P-ből merőlegest állitva az S sikra, a döféspont a keresett P' (lásd a 32. ábrát).



32. ábra

Vektorok segitségével ugy fogalmazhatunk, hogy a P' P távolság akkor és csak akkor minimális, ha a $\underline{p} - \underline{s}_0$ vektor merőleges az S sikra. Ez a geometriai tétel általánositható minden olyan vektortérre, amelyben skaláris szorzás értelmezett. A szélesebbkörü alkalmazhatóság miatt a tételt tetszőleges - nem szükségképpen véges dimenziós - euklideszi terekre bizonyitjuk.

4.8. Projekció tétel

Legyen E euklideszi tér, $S \subset E$ altér, $\underline{p} \in E$, $\underline{p} \notin S$. $\|\underline{p} - \underline{s}_0\|$ ($\underline{s}_0 \in S$) akkor és csak akkor minimális, ha $\forall\, \underline{s} \in S$ vektorra $(\underline{p} - \underline{s}_0 \mid \underline{s}) = 0$.

Bizonyitás:

Nevezzük $\underline{s}_0$-t minimalizáló vektornak, ha $\|\underline{p} - \underline{s}_0\|$ minimális.

a) Először megmutatjuk, hogy ha $\underline{s}_0$ minimalizáló vektor, akkor $(\underline{p} - \underline{s}_0 \mid \underline{s}) = 0 \quad \forall\, \underline{s} \in S$ vektor esetén teljesül. Ha ugyanis volna olyan $\underline{s} \in S$, amellyel $(\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s}) \neq 0$, akkor tetszőleges $c \neq 0$ skalárral $(\underline{p} - \underline{s}_o | c\underline{s}) \neq 0$ is fennáll és ezért feltehetjük, hogy $\|\underline{s}\| = 1$. Készitsük el ezzel az $\underline{s}$ vektorral az $\underline{s}_1$ vektort a következő módon:

$$\underline{s}_1 = \underline{s}_o + (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})\, \underline{s}$$

és számitsuk ki az $\underline{s}_1$ és $\underline{p}$ vektorok eltérésének négyzetét, felhasználva a skaláris szorzás tulajdonságait:

$$\begin{aligned}\|\underline{p} - \underline{s}_1\|^2 &= (\underline{p} - \underline{s}_o - (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s}) \cdot \underline{s} | \underline{p} - \underline{s}_o - (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})\, \underline{s}) = \\ &= \|\underline{p} - \underline{s}_o\|^2 - (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})\, (\underline{s} | \underline{p} - \underline{s}_o) - \\ &- (\underline{p} - \underline{s}_o | (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})\, \underline{s}) + ((\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})\, \underline{s} | (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})\, \underline{s}) = \\ &= \|\underline{p} - \underline{s}_o\|^2 - 2\, (\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})^2 + |(\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})|^2 \cdot (\underline{s} | \underline{s})\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\|\underline{s}\| = 1$, fentiekből azt kapjuk, hogy

$$\|\underline{p} - \underline{s}_1\|^2 = \|\underline{p} - \underline{s}_o\|^2 - |(\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s})|^2, \quad \text{vagyis}$$

$$\|\underline{p} - \underline{s}_1\|^2 < \|\underline{p} - \underline{s}_o\|^2$$ volna, és ez ellentmond annak, hogy

$\underline{s}_o$ minimalizáló vektor, tehát a $(\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s}) = 0$ relációnak $\forall\, \underline{s} \in S$ esetén teljesülnie kell.

b) Ha viszont $(\underline{p} - \underline{s}_o | \underline{s}) = 0$ teljesül $\forall\, \underline{s} \in S$ vektorra, akkor

$$\|\underline{p} - \underline{s}\|^2 = \|\underline{p} - \underline{s}_o + \underline{s}_o - \underline{s}\|^2 = \|\underline{p} - \underline{s}_o\|^2 + \|\underline{s}_o - \underline{s}\|^2,$$

tehát $\|\underline{p} - \underline{s}\|^2 > \|\underline{p} - \underline{s}_o\|^2$, hacsak $\underline{s} \neq \underline{s}_o$, ami azt jelenti, hogy $\underline{s}_o$ minimalizáló vektor. ∎

4.9. Példák

1. Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények E euklideszi terét az

$$(f | g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

skalárszorzattal. Adott az euklideszi térben egy $g_1, g_2, \dots, g_n$ ortogonális függvényrendszer és keressük a c_i $i=1,2,\dots,n$ együtthatókat ugy, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i g_i \quad \text{legjobban közelitse az}$$

$f \in E$ függvényt, vagyis

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \| \quad \text{minimális legyen.}$$

Megoldás: A projekció tétel értelmében a $g_1, \dots, g_n$ által generált altérben az a függvény közeliti legjobban f-et, amelyre

$$\left(f - \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \,\middle|\, g_j \right) = 0 \;; \quad j=1,2,\dots,n$$

Ebből adódik:

$$(f|g_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i (g_i|g_j) \quad j=1,\dots,n$$

és az ortogonalitás miatt

$$c_j = \frac{\int_a^b f \cdot g_j \, dx}{\int_a^b g_j^2 \, dx}$$

2. Ha az előbbi példában szereplő ortogonális függvényrendszernek az 1, cos x, sin x, ..., cos kx, sin kx függvényrendszert választjuk a $[0, 2\pi]$ intervallumon, akkor azt kapjuk, hogy az f függvényt legjobban közelitő trigonometrikus polinom

$$a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

együtthatói az

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

un. Fourier együtthatók.

5. KITŰZÖTT FELADATOK

1^o Legyen $\underline{\underline{A}}$ m x n-es mátrix.
Igazolja, hogy

$$\| \underline{\underline{A}} \| = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} | a_{ij} | \right\}$$ eleget tesz a norma axiómáknak.

2^o Igazolja, hogy az E_n euklideszi térben érvényes a Pythagoras tétel:

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in E_n \quad ,$$

$$(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = 0 \Longleftrightarrow \| \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \|^2 = \| \underline{v}_1 \|^2 + \| \underline{v}_2 \|^2$$

3^o Legyen S E_n altere. Értelmezzük S E_n-beli ortogonális komplementumát - jele $S^\perp$ - a következő módon:

$$S^\perp : \left\{ \underline{s}^\perp \;\middle|\; (\underline{s}^\perp | \underline{s}) = 0, \quad \text{ha} \quad \underline{s} \in S \right\}$$

Bizonyitsa be, hogy $S^\perp$ is altere E_n-nek.

4^o Mutassa meg, hogy minden euklideszi tér előállitható egy tetszőleges S altere és annak $S^\perp$ ortogonális komplementumának direkt összegeként.

VIII. LINEÁRIS OPERÁTOROK

Gyakoriak és fontosak az olyan leképezések, amelyek két vektor lineáris kombinációinak a vektorok képeinek lineáris kombinációit feleltetik meg. Az ilyen un. homogén lineáris leképezésekkel, más néven lineáris operátorokkal foglalkozunk a továbbiakban. A III. fejezetben találkoztunk néhány egyszerü lineáris operátorral - a sik és a tér vektorainak homogén lineáris transzformációival - ezeknek is általánositása a lineáris operátor fogalma.

1. A LINEÁRIS OPERÁTOR FOGALMA ÉS NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

1.1. Definició

Legyenek U és V azonos számtest feletti vektorterek. Azt a T leképezést, amely $\forall \underline{u} \in U$ vektorhoz hozzárendel egy $T\underline{u} \in V$ vektort ugy, hogy tetszőleges c skalár és $\underline{u}$, $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2 \in U$ vektorokra

$$T(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = T\underline{u}_1 + T\underline{u}_2$$

és

$$Tc \cdot \underline{u} = c \cdot T\underline{u}$$

lineáris operátornak (homogén lineáris leképezésnek - tenzornak - homogén lineáris transzformációnak, vagy homogén lineáris vektor-vektor függvénynek nevezzük.)

Megjegyzések:

1. A fenti kapcsolatot $T : U \to V$, vagy $U \xrightarrow{T} V$ módon jelöljük, ha arra is utalni kivánunk a jelöléssel, hogy az operátor honnan hova képez.
2. Ha

   $U = V$, akkor azt mondjuk, hogy

T az U vektortér lineáris operátora, vagy homogén lineáris transzformációja.

Elnevezés: Az $\underline{u} \in U$ vektorokat tárgyvektoroknak, a $Tu \in V$ vektorokat képvektoroknak nevezzük.

1.2. Példák

1. Tekintsünk egy S sikot és minden térvektorhoz rendeljük hozzá az S sikbeli merőleges vetületét. Ez a leképezés homogén és lineáris, tehát lineáris operátor.

2. A valós elemü 3 x 4-es mátrixokhoz rendeljünk képet a következő módon:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ez a leképezés is homogén és lineáris.

3. Legyen U a legfeljebb n-edfoku valósegyütthatós polinomok vektortere és

$$T\,p_n = p_n(0), \quad \text{ha} \quad p_n \in U$$

Ez a leképezés is lineáris operátor, a képvektorok a valós számok.

4. Az előbbi U polinomjaihoz rendeljük hozzá deriváltfüggvényüket.

$$Dp_n = p_n', \quad \text{ha} \quad p_n \in U$$

Mivel

$$(p_n + q_n)' = p_n' + q_n', \quad \text{ha} \quad p_n, q_n \in U$$

és $(c.p_n)' = c.p_n'$ D is lineáris operátor és képvektorként minden legfeljebb (n-1)-ed foku polinomot megkapunk.

5. Legyen U az $[a,b]$ intervallumon integrálható f valós függvények vektortere és

$$Af = \int_a^b f(x)dx$$

Az integrál tulajdonságai miatt A is lineáris operátor és a képvektorok a valós számok.

Végül tekintsünk két igen egyszerü operátort.

6. Legyen U egy tetszőleges vektortér és $\underline{u} \in U$ vektorhoz rendeljük képvektorként önmagát. Ezzel U egy lineáris operátorát értelmeztük. Jelöljük a továbbiakban ezt az operátort E-vel és nevezzük egységoperátornak vagy identikusoperátornak.

7. Legyen U egy tetszőleges vektortér és $\forall \underline{u} \in U$ vektorhoz rendeljük hozzá a nullvektort. Az igy értelmezett lineáris operátort 0-val jelöljük és nulloperátornak nevezzük.

Ha megfigyeljük az előbbi példákat, azt tapasztaljuk, hogy a képvektorok is vektorteret alkotnak. Ez mindig igy van, erről szól az

1.3. Tétel

A T lineáris operátor képvektorainak halmaza is lineáris tér, amelyet az operátor képterének nevezünk.

Bizonyitás:

Legyen $U \xrightarrow{T} V$ és $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ képvektorok, c_1, c_2 pedig tetszőleges skalárok. Azt kell megmutatnunk, hogy $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$ is képvektor.

Mivel $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ képvektor, van olyan $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$, hogy

$T\underline{u}_1 = \underline{v}_1$ és $T\underline{u}_2 = \underline{v}_2$, de akkor

$$T(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2) = c_1\, T\underline{u}_1 + c_2\, T\underline{u}_2 = c_1\, \underline{v}_1 + c_2\, \underline{v}_2\,,$$

vagyis a $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$ vektorok is képvektorok. ∎

Jelölés: A képtér jele: $\operatorname{Im} T$

1.4. Tétel

A T lineáris operátor nullvektorra képzett tárgyvektorai a tárgytérnek alterét alkotják, amelyet az operátor magterének (vagy magjának) nevezünk és a továbbiakban $\operatorname{Ker} T$ szimbólummal jelölünk.

Bizonyitás:

Az emlitett halmaz nem üres, mivel a nullavektort biztosan tartalmazza:

tetszőleges c skalár esetén ugyanis

$$T\underline{o} = Tc.\underline{o} = c.\, T\,\underline{o} \Longrightarrow T\underline{o} = \underline{o}\,.$$

Ha $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ és $T\underline{u}_1 = \underline{o}$, $T\underline{u}_2 = \underline{o}$,

akkor tetszőleges c_1, c_2 skalárokkal

$$T(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2) = c_1 T\underline{u}_1 + c_2 T\underline{u}_2 = \underline{o},$$

tehát Ker T altér, mint állitottuk. ∎

Minden leképezés vizsgálatánál fontos kérdés, hogy kölcsönösen egyértelmüen képezi-e le az értelmezési tartományt az értékkészletre vagy sem. (Gondoljunk pl. az egyváltozós valós függvények invertálhatóságára.) Megmutatjuk, hogy lineáris operátorok esetében ez azon mulik, hogy van-e a magban a nullvektoron kivül más vektor is.

1.5. Tétel

A T lineáris operátor akkor és csak akkor létesit kölcsönösen egyértelmü leképezést az U tárgytér és a képtér között, ha Ker T = $\{\underline{0}\}$.

Bizonyitás:

a) Az nyilvánvaló, hogy ha két különböző vektor képe nem lehet azonos, akkor Ker T = $\{\underline{0}\}$. Ugyanis $T\underline{o} = \underline{o}$ minden lineáris operátor esetében teljesül és igy más vektor képe nem lehet $\underline{o}$.

b) Legyen most Ker T = $\{\underline{0}\}$.

Ha $T\underline{v}_1 = T\underline{v}_2$, akkor

$$T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0} \quad \text{és a} \quad \text{Ker } T = \{\underline{0}\}$$

feltételből következik, hogy $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$. ∎

A továbbiakban megmutatjuk, hogy kölcsönösen egyértelmü leképezés esetén lineárisan független vektorrendszer képe is lineárisan független vektorokból áll.

1.6. Tétel

Ha a T lineáris operátor magtere, Ker T = $\{\underline{0}\}$, akkor a tárgytér lineárisan független $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszerének

$T\,\underline{v}_1, \dots, T\,\underline{v}_k$ képvektorai is lineárisan függetlenek.

Bizonyitás:

Állitsuk elő a $T\,\underline{v}_1, \dots, T\,\underline{v}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként a képtér nullvektorát:

$$c_1\, T\underline{v}_1 + c_2\, T\underline{v}_2 + \ldots + c_k\, T\underline{v}_k = \underline{o} \qquad (1)$$

(1)-et T lineáris operátor voltát kihasználva átalakitjuk:

$$T(c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_k\underline{v}_k) = \underline{o} \qquad (2)$$

Mivel a magban csak a $\underline{o}$ van

$$c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_k\underline{v}_k = \underline{o},$$

amiből $c_i = o$ $(i=1,2,\ldots,k)$, a $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k$ rendszer feltétel szerinti lineáris függetlenségének következménye. Ez azonban (1) alapján a $T\underline{v}_1,\ldots,T\underline{v}_k$ rendszer függetlenségét is jelenti. ∎

Megjegyzések:

1. Az olvasóra bizzuk annak igazolását, hogy bármely lineáris operátor esetében igaz, hogy lineárisan független képvektorrendszer csak lineárisan független tárgyvektorrendszerből keletkezhet.
2. Fentiek következménye, hogy ha egy lineáris operátor magtere csak a nullvektort tartalmazza, akkor tárgyterének és képterének megegyezik a dimenziója.

1.7. Definició

Ha a $T: U \longrightarrow V$ leképezés kölcsönösen egyértelmü, akkor T-t reguláris lineáris operátornak nevezzük.

Véges dimenziós vektorterek közötti leképezés esetén a képtér, tárgytér és magtér dimenzióinak kapcsolatáról szól az

1.8. Dimenzió-tétel

Legyen $T: U \longrightarrow V$ és dim U véges, akkor

$$\dim U = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T.$$

Bizonyitás:

Legyen $\dim \operatorname{Im} T = r$, $\dim \operatorname{Ker} T = m$,

Im T egy bázisa: $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_r$, $\underline{v}_i = T\underline{u}_i$ $(i=1,\ldots,r)$

Ker T egy bázisa: $\underline{m}_1,\ldots,\underline{m}_m$.

Megmutatjuk, hogy az

$\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_r,\ \underline{m}_1,\ldots,\underline{m}_m$ vektorrendszer

a tárgytér egy bázisát alkotja, ami az állitást bizonyitja.

Állitsuk elő a tárgytér nullvektorát az $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_r,\ \underline{m}_1,\ldots,\underline{m}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$c_1\underline{u}_1+\ldots+c_r\underline{u}_r + d_1\underline{m}_1+\ldots+d_m\underline{m}_m = \underline{o} \tag{1}$$

és alkalmazzuk (1)-re a T operátort, figyelembe véve, hogy $\underline{m}_i \in \ker T$ (i=1,...,m) miatt $T\underline{m}_i = \underline{o}$ (i=1,...,r), ekkor kapjuk, hogy

$$Tc_1\underline{u}_1 +\ldots+ Tc_r\underline{u}_r = \underline{o} \tag{2}$$

amiből következik, hogy

$$c_1T\underline{u}_1 +\ldots+ c_rT\underline{u}_r = \underline{o} \tag{3}$$

és mivel a $\underline{v}_i = Tu_i$ (i=1,...,r) a képtér egy bázisa,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = o \tag{4}$$

(4) alapján (1)-ből következik, hogy

$$d_1\underline{m}_1 +\ldots+ d_m\underline{m}_r = \underline{o} \text{ és}$$

mivel az $\underline{m}_1,\ldots,\underline{m}_r$ vektorok a magtér bázisát alkotják,

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_m = o \tag{5}$$

és igy az (1) előállitás minden együtthatója nulla, tehát az

$u_1,\ \ldots\ \underline{u}_r.\ \underline{m}_1,\ \ldots\ \underline{m}_m$ vektorrendszer lineárisan független.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\underline{u} \in U$ előállitható e lineárisan független vektorrendszer segitségével, lineáris kombinációként.

Tekintsük a $T\underline{u} \in \mathrm{Im}\, T$ vektort és állitsuk elő ImT bázisvektoraival:

$$T\underline{u} = a_1\underline{v}_1 +\ldots+ a_r\underline{v}_r$$

Felhasználva a $\underline{v}_i = T\underline{u}_i$ i=1,...r kapcsolatot kapjuk, hogy

$$T\underline{u} = T(a_1\underline{u}_1 + \ldots + a_r\underline{u}_r) ,$$

átrendezve

$$T(\underline{u} - a_1\underline{u}_1 - \ldots - a_r\underline{u}_r) = \underline{o} ,$$

igy $\underline{u} - a_1\underline{u}_1 - \ldots - a_r\underline{u}_r \in \ker T$, ekkor Ker T bázisával lineáris kombinációként irható, amiből

$$\underline{u} - a_1\underline{u}_1 - \ldots - a_r\underline{u}_r = b_1\underline{m}_1 + \ldots + b_m\underline{m}_m ,$$

illetve

$$\underline{u} = a_1\underline{u}_1 + \ldots + a_r\underline{u}_r + b_1\underline{m}_1 + \ldots + b_m\underline{m}_m$$

következik. Ezzel a dimenziótételt bizonyitottuk. ∎

Vegyük észre, hogy az előbbi megjegyzés, miszerint ha az operátor magtere csak a nullvektort tartalmazza, akkor tárgyterének és képterének azonos a dimenziója, a dimenziótételből is következik.

A dimenziótétel bizonyitása során a lineáris operátor tárgyterének egy direktösszegre bontását végeztük el. Ezt most külön megfogalmazzuk.

1.9. Tétel

Legyen a $T: U \to V$ lineáris operátor tárgytere véges dimenziós. Tekintsük Im T egy $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ bázisát és azt az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r$ $\underline{u}_i \in U$ vektorrendszert, amelyre $T\underline{u}_i = \underline{v}_i$ $i = 1, \ldots, r$.
Jelöljük U_1-gyel az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r$ vektorok által generált alteret U-ban. (Az U_1 alteret szokták Im T ősterének is nevezni.)

$$U = \ker T \oplus U_1$$

Bizonyitás:

A dimenziótétel bizonyitása során beláttuk, hogy $\forall \underline{u} \in U$ egyértelmüen előáll

$$\underline{u} = a_1\underline{u}_1 + \ldots + a_r\underline{u}_r + b_1\underline{m}_1 + \ldots + b_m\underline{m}_m$$

alakban, ami az állitást igazolja. ∎

Megjegyzés:

T_{U_1} és $\operatorname{Im} T$ között már kölcsönösen egyértelmü leképezés.

Megjegyzés:

A jegyzet V. fejezetében foglalkoztunk a homogén lineáris egyenletrendszerekkel. Megmutatjuk, hogy a megoldások számára vonatkozó 2.4. Tétel állitása a dimenziótételből is következik.

Legyen az egyenletrendszer

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}\,; \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Tekintsük az

$A\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ módon adott

A leképezést. A az n dimenziós oszlopmátrixok V_n vektorterének homogén lineáris operátora. Az egyenletrendszer megoldásvektorainak halmaza éppen $\operatorname{Ker} A$. Igy a dimenziótétel értelmében

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A\,,$$

és mivel $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$, a megoldástér dimenziója:

$$n - \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}\,. \quad ■$$

2. MŰVELETEK LINEÁRIS OPERÁTOROKKAL

Ismertek az olvasó előtt a függvények között értelmezett müveletek. Találkoztak számmal szorzással, függvények összeadásával, összetett függvényképezéssel, függvény inverzének fogalmával. Hasonlóképpen értelmezünk a homogén lineáris vektor-vektor függvények, vagyis lineáris operátorok között müveleteket.

2.1. Tétel

Ha a T lineáris operátor az U vektorteret a V vektortérbe képezi le, akkor a

$$(c\,T)\underline{u} = c(T\underline{u}) \qquad (\underline{u} \in U,\ c \text{ skalár})$$

módon definiált $c\,T$ leképezés szintén lineáris operátor, amely U-t V-be képezi le. <u>A $c\,T$ operátort a T operátor c-szeresének nevezzük.</u>

<u>Bizonyítás:</u>

$c\,T$ minden $\underline{u} \in U$ vektorhoz rendel képet, a $c\,T\underline{u} \in V$ vektort. Azt kell még megmutatni, hogy a hozzárendelés müvelettartó. Ez is fennáll, ugyanis

$$(c\,T)\,(c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2) = c\,T(c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2) = c(c_1T\underline{u}_1+c_2T\underline{u}_2) =$$

$$= cc_1T\underline{u}_1 + cc_2T\underline{u}_2 = c_1(cT)\underline{u}_1 + c_2(cT)\underline{u}_2 \quad \blacksquare$$

Értelmezhető két azonos vektorteret azonos vektortérbe képező lineáris operátor összege.

<u>2.2. Tétel</u>

Ha $T_1: U \to V$ és $T_2: U \to V$ lineáris operátorok, akkor a

$$(T_1 + T_2)\underline{u} = T_1\underline{u} + T_2\underline{u} \qquad \underline{u} \in U$$

módon értelmezett T_1+T_2 leképezés szintén lineáris operátor, amely U-t V-be képezi le.

<u>A $T_1 + T_2$ operátort a két operátor összegének nevezzük.</u>

<u>Bizonyítás:</u>

$T_1 + T_2$ minden $\underline{u} \in U$ vektorhoz rendel képet, a $T_1\underline{u} + T_2\underline{u} \in V$ vektort. Megmutatjuk, hogy a hozzárendelés müvelettartó.

Legyen $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2 \in U$ tetszőleges vektorok és c_1, c_2 tetszőleges skalárok, akkor

$$(T_1 + T_2)\,(c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2) = T_1(c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2) + T_2(c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2) =$$

$$= c_1T_1\underline{u}_1+c_2T_1\underline{u}_2 + c_1T_2\underline{u}_1+c_2T_2\underline{u}_2 = c_1(T_1\underline{u}_1+T_2\underline{u}_1) +$$

$$+ c_2(T_1\underline{u}_2+T_2\underline{u}_2) = c_1(T_1+T_2)\underline{u}_1+c_2(T_1+T_2)\underline{u}_2\,,$$

ami $T_1 + T_2$ lineáris operátor voltát jelenti. $\blacksquare$

Az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy a $T : U \longrightarrow V$ lineáris operátorok a 2.1. és 2.2. Tételekben definiált müveletekkel vektorteret alkotnak U és V közös számteste felett. A vektortér nullvektora az 1.2./7. példában szereplő nulloperátor.

Az összetett függvények képzésének megfelelően értelmezzük lineáris operátorok szorzatát.

2.3. Tétel

Ha $T_1 : U \longrightarrow V$ és $T_2 : V \longrightarrow W$ lineáris operátorok, akkor a

$$(T_2T_1)\underline{u} = T_2(T_1\underline{u}) \quad \underline{u} \in U$$

módon értelmezett leképezés szintén lineáris operátor, amely U-t W-be képezi le. A $T_2 \cdot T_1$ operátort T_1 T_2-vel vett szorzatoperátornak nevezzük.

Bizonyitás:

Mivel T_1 minden U-beli vektorhoz V egy vektorát rendeli, majd T_2 a $T_1\underline{u} \in V$-hez W-beli vektort rendel, igy $T_2 . T_1$ U-t W-be képezi. Belátjuk, hogy a hozzárendelés müvelettartó.

Legyen $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ és c_1, c_2 skalár.

Ekkor

$$(T_2T_1)(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2) = T_2(T_1(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2)) = T_2(c_1T_1\underline{u}_1 + c_2T_1\underline{u}_2) =$$

$$= c_1T_2(T_1\underline{u}_1) + c_2T_2(T_1\underline{u}_2) = c_1(T_2T_1)\underline{u}_1 + c_2(T_2T_1)\underline{u}_2,$$

ami a müvelettartást jelenti. ∎

2.4. Tétel

A lineáris operátorok szorzása a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. A szorzás asszociativ:

$$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$$

feltéve, hogy a szorzások elvégezhetők.

2. A szorzás disztributiv:

$$(T_1+T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3 \qquad \text{és}$$

$$T_4(T_1+T_2) = T_4T_1 + T_4T_2$$

feltéve, hogy a szorzások elvégezhetők.

3.

$$c(T_1T_2) = (cT_1)T_2 = T_1(cT_2)$$

Bizonyitás:

Az állitások egyszerüen igazolhatók, az egyenlőségek két oldalán levő operátorokat tetszőleges $\underline{u}$, tárgytérbeli vektorra alkalmazva. ▪

Megjegyzés:

A lineáris operátorok szorzása nyilván nem kommutativ müvelet. Például $T_1: U \to V$ és $T_2: V \to W$ $V \neq W$ esetén csak a $T_2 T_1$ szorzás végezhető el, $T_1 T_2$ nem is értelmezett.

Fontos kérdés, hogy egy lineáris operátort mikor lehet invertálni. Ezzel foglalkozunk a továbbiakban.

2.5. Definició

A T lineáris operátor inverzén azt a T^{-1}-gyel jelölt operátort értjük, amely kielégiti a

$T \cdot T^{-1} = E$ és a

$T^{-1} \cdot T = E$ egyenletet.

A szorzás definiciója alapján nyilvánvaló, hogy ha

$T : U \to V$, akkor

$T^{-1} : V \to U$

és mindkét egyenlet csak akkor teljesülhet, ha T kölcsönösen egyértelmüen képezi le a tárgyteret a képtérre, vagyis T reguláris.

2.6. Tétel

A $T : U \to V$ reguláris lineáris operátor

$T^{-1} : V \to U$ inverze is lineáris operátor.

Bizonyitás:

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ és c_1, c_2 tetszőleges skalárok,

$$T^{-1} \underline{v}_1 = \underline{u}_1 , \tag{1}$$

$$T^{-1} \underline{v}_2 = \underline{u}_2 . \tag{2}$$

Ekkor

$$\underline{v}_1 = T\underline{u}_1 , \quad \underline{v}_2 = T\underline{u}_2 \quad \text{és}$$

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 = c_1 T\underline{u}_1 + c_2 T\underline{u}_2 .$$

Felhasználva, hogy T lineáris operátor, a jobb oldalt átalakitva

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 = T(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2) , \qquad \text{vagyis}$$

$$T^{-1}(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2) = c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2 \qquad \text{és}$$

(1), (2) figyelembevételével

$$T^{-1}(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2) = c_1 T^{-1}\underline{v}_1 + c_2 T^{-1}\underline{v}_2 ,$$

mint állitottuk. ∎

Megmutatjuk egy példán, hogy van olyan eset, amikor egy T operátort egy másikkal egyik oldalról szorozva egységoperátort kapunk, de a másik oldalról szorozva nem.

Tekintsük a valós elemü számsorozatok V vektorterét. Legyen $\underline{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ és értelmezzük az A és B lineáris operátorokat a következőképpen:

$$A\underline{a} = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$
$$B\underline{a} = \{a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

$$(B.A)\ \underline{a} = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\} \quad = \underline{a} ,$$

tehát $B.A = E$, viszont

$$(A.B)\ \underline{a} = \{0, a_2, \ldots a_n, \ldots\} \neq \underline{a} ,$$

tehát $A.B \neq E$. Az ilyen tulajdonságu B operátort A balinverzének szokás nevezni. Hasonlóan azt is mondjuk, hogy A a B operátor jobbinverze. A következő tételből kiderül, hogy az A operátornak nincs jobbinverze.

2.7. Tétel

Ha egy lineáris operátornak van jobbinverze és balinverze, akkor ezek megegyeznek.

Bizonyitás:

Legyen $A: U \longrightarrow V$ lineáris operátor
$B: V \longrightarrow U$ A balinverze, és
$J: V \longrightarrow U$ A jobbinverze

Jelöljük E_1-gyel a $V \longrightarrow V$ identikus operátort és E_2-vel az $U \longrightarrow U$ identikus operátort.
Ekkor

$B = B.E_1 = B.(A.J)$ az operátorszorzás asszociativitását felhasználva:

$$B.(A.J) = (B.A).J = E_2\, J = J\,,$$

tehát $B = J$. ∎

A továbbiakban röviden foglalkozunk az inverz operátor létezésének problémájával abban a speciális esetben, amikor T az U vektorteret önmagába képezi le, vagyis T U lineáris transzformációja.

2.8. Tétel

A véges dimenziós U vektortér T homogén lineáris transzformációja akkor és csak akkor invertálható, ha képtere az egész U vektortér.

Bizonyitás:

Az állitás az 1.5. és 1.8. Tételek következménye. Az 1.5. Tétel szerint T regularitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$ teljesüljön. Ekkor az 1.8. Tétel értelmében $\dim \operatorname{Im} T = \dim U$. A mi esetünkben $\operatorname{Im} T \subseteq U$, tehát

$$\operatorname{Im} T = U \quad ∎$$

3. A LINEÁRIS OPERÁTOR MÁTRIXA

A vektorterek tanulmányozása során tapasztaltuk, hogy ha egy véges dimenzióju vektortér egy bázisát rögzitjük, akkor a tér minden vektora egyértelmüen jellemezhető egy-egy oszlopmátrixszal. A következő fejezetrészben megmutatjuk, hogy egy véges dimenziós tárgyteret leképező lineáris operátor egyértelmüen jellemzhető egy mátrixszal, ha a tárgytérben és a képtérben rögzitettünk egy-egy bázist.

<u>3.1. Tétel</u>

Ha $T: U \longrightarrow V$ lineáris operátor, U egy bázisa $B_e : \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ és V egy bázisa $B_f : \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_r$, akkor a rögzitett bázispárban a T operátorhoz egyértelmüen tartozik egy mátrix:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & t_{rn} \end{pmatrix},$$

amelynek oszlopaiban a $T\underline{e}_i$ $i=1,\dots,n$ képvektorok B_f bázisbeli oszlopmátrixai állnak és tetszőleges $\underline{u} \in U$ $T\underline{u} \in V$ képvektorának B_f bázisbeli oszlopmátrixát megkapjuk, ha $\underline{\underline{T}}$-t megszorozzuk $\underline{u}$ B_e bázisbeli oszlopmátrixával:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \underline{e}_i \quad \text{és} \quad T\underline{u} = \sum_{j=1}^{r} v_j \underline{f}_j .$$

Rövidebben: $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{v}}$.

<u>Bizonyitás:</u>

A fenti jelölések szerint a

B_e bázisban $\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \underline{e}_i$ és a

B_f bázisban $\quad T\, \underline{e}_i = \sum_{j=1}^{r} t_{ji}\, \underline{f}_j$

T homogén linearitását kihasználva:

$$T\,\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, T\,\underline{e}_i$$

behelyettesitve $T\underline{e}_i$ koordinátás alakját:

$$T\,\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{r} t_{ji}\, \underline{f}_j \qquad \text{és a}$$

szummázások sorrendjét felcserélve:

$$T\,\underline{u} = \sum_{j=1}^{r} \underline{f}_j \sum_{i=1}^{n} u_i\, t_{ji}, \text{ vagyis}$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} u_i\, t_{ji} \quad \text{ami a } \underline{\underline{T}} \text{ mátrix}$$

j-edik sorának és az $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ oszlopmátrixnak a szorzata. ∎

<u>Megjegyzés:</u>

Ha a T lineáris operátor U-ból U-ba képez, akkor a képvektorokat is bonthatjuk a tárgytér bázisában. Ekkor az operátor mátrixa kvadratikus lesz. Ha T U-ból U-ra képez, vagyis a transzformáció reguláris, akkor az 1.6. Tételből következik, hogy $\underline{\underline{T}}$ minden oszlopa lineárisan független,

$$\text{rang } \underline{\underline{T}} = \dim U = \dim \operatorname{Im} T\ .$$

Ha a T lineáris transzformáció nem kölcsönösen egyértelmüen képezi le az U tárgyteret a képtérre, tehát U-ba képez, akkor

$$\text{rang } \underline{\underline{T}} = \dim \operatorname{Im} T = \dim U - \dim \operatorname{Ker} T,$$

felhasználva a dimenziótételt.

Nézzünk néhány példát lineáris operátor mátrixára.

3.2. Példák

1. Legyen E az U vektortér identikus operátora és U egy bázisa: $\underline{b}_1, \dots \underline{b}_n$.

Mivel $E\,\underline{b}_i = \underline{b}_i$ $i=1,\dots n$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Tekintsük a térvektorok E_3 terének azt az A operátorát, amely minden $\underline{v} \in E_3$ vektorhoz az $\underline{a} \times \underline{v}$ vektort rendeli, ahol $\underline{a}$ egy adott vektora E_3-nak.

Az olvasóra bizzuk annak belátását, hogy A homogén lineáris transzformáció.

Rögzitsük E_3-ban az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ortonormált bázist, és használjuk ezt a képvektorok előállitásához is. Legyen $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$.

Ekkor $\underline{\underline{A}}$ oszlopait rendre

$$\underline{a} \times \underline{i}, \quad \underline{a} \times \underline{j}, \quad \underline{a} \times \underline{k}$$

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ bázisbeli koordináta oszlopmátrixai alkotják.

$$A\underline{i} = \underline{a} \times \underline{i} = a_3\,\underline{j} - a_2\,\underline{k}$$
$$A\underline{j} = \underline{a} \times \underline{j} = -a_3\,\underline{i} + a_1\,\underline{k}$$
$$A\underline{k} = \underline{a} \times \underline{k} = a_2\,\underline{i} - a_1\,\underline{j},$$

tehát

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Természetesen a bázisok megválasztásától függően az A operátort más mátrixszal is jellemezhetjük. Figyelembe véve, hogy $\mathrm{Im}A$ kétdimenziós - hiszen a képvektorok merőlegesek $\underline{a}$-ra - a tárgytér bázisát nem változtatva, a képtér bázisául az $A\underline{i}$ és $A\underline{j}$ vektorokat választva (tegyük fel, hogy $a_3 \neq 0$, akkor ezek lineárisan függetlenek), irjuk fel A mátrixát.

Mivel

$$A\underline{i} = 1 \cdot A\underline{i} + 0 \cdot A\underline{j}\ , \qquad A\underline{j} = 0 \cdot A\underline{i} + 1 \cdot A\underline{j}$$

és

$$A\underline{k} = -\frac{a_1}{a_3} A\underline{i} - \frac{a_2}{a_3} A\underline{j}$$

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} \end{pmatrix}$$

A jegyzet III. fejezetében foglalkoztunk a mátrixok között értelmezett müveletekkel. Látni fogjuk, hogy ésszerüek voltak a mátrixmüveletek definiciói, mert igy van szoros kapcsolat az operátormüveletek és az operátorokat valamely bázisban megadó mátrixok müveletei között. E kapcsolatot pontosan a következő tétel fogalmazza meg.

3.3. Tétel

Ha T, T_1, T_2, T_3 lineáris operátorok és a $T_1 + T_2$, $T_2 \cdot T_3$, T^{-1} müveletek elvégezhetők, akkor az összes szóban forgó vektorterekben egy-egy bázist rögzitve

a) $\underline{\underline{c \cdot T}} = c \cdot \underline{\underline{T}}$ (c skalár)

b) $\underline{\underline{T_1 + T_2}} = \underline{\underline{T_1}} + \underline{\underline{T_2}}$

c) $\underline{\underline{T_2 \cdot T_3}} = \underline{\underline{T_2}} \cdot \underline{\underline{T_3}}$

d) $\underline{\underline{T^{-1}}} = (\underline{\underline{T}})^{-1}$

Bizonyitás:

a) A müvelet definiciója szerint $(c\,T)\underline{u} = c(T\underline{u})$ minden $\underline{u} \in U$ esetén ekkor

$$\underline{\underline{c\,T}} \cdot \underline{u} = c \cdot \underline{\underline{Tu}} = c(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{u})$$

tehát

$$\underline{\underline{c \cdot T}} = c \cdot \underline{\underline{T}}$$

b) $(T_1 + T_2)\,\underline{u} = T_1\underline{u} + T_2\underline{u}$, így

$$\underline{\underline{(T_1 + T_2)}} \cdot \underline{u} = \underline{\underline{T_1 u}} + \underline{\underline{T_2 u}} = \underline{\underline{T_1}} \cdot \underline{u} + \underline{\underline{T_2}} \cdot \underline{u} = (\underline{\underline{T_1}} + \underline{\underline{T_2}})\,\underline{u},$$

tehát

$$\underline{\underline{T_1 + T_2}} = \underline{\underline{T_1}} + \underline{\underline{T_2}}$$

c), d) bizonyitását hasonlóan végezhetjük, ezeket feladatként tüzzük ki az olvasónak. ■

A lineáris operátor mátrixa mint már tudjuk, függ a bázisoktól. A továbbiakban megnézzük, hogy milyen kapcsolat van egy operátor különböző bázisokban felirt mátrixai között.

3.4. Tétel

Legyen $T : U \longrightarrow V$ lineáris operátor

U két bázisa $B : b_1, \dots, b_n$ és $C : c_1, \dots, c_n$

V két bázisa $F : f_1, \dots, f_r$ és $G : g_1, \dots, g_r$

T mátrixát a B, F bázispárban $\underline{\underline{T}}_{B,F}$-fel és

T mátrixát a C, G bázispárban $\underline{\underline{T}}_{C,G}$-vel jelölve

$$\underline{\underline{T}}_{C,G} = \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_{B,F} \cdot \underline{\underline{C}}, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{\underline{C}} = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{matrix} \quad \underline{c}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\,\underline{b}_i \quad \text{és}$$

$$\underline{\underline{G}} = (g_{ps}) \quad \begin{matrix} 1 \leqslant p \leqslant r \\ 1 \leqslant s \leqslant r \end{matrix} \quad \underline{g}_s = \sum_{p=1}^{n} g_{ps}\,\underline{f}_p$$

Bizonyitás:

Legyen $\underline{u} \in U$, tetszőleges és $T\underline{u} = \underline{v}$.

Irjuk fel a B, F bázispárban a megfelelő mátrixegyenletet:

$$\underline{\underline{T}}_{B,F} \cdot \underline{\underline{u}}_b = \underline{\underline{v}}_f \tag{1}$$

A IV. fejezet 2.19. Tétele értelmében tudjuk, hogy mi a kapcsolat egy vektor különböző bázisbeli koordinátái között:

$$\underline{\underline{u}}_b = \underline{\underline{C}}\cdot\underline{\underline{u}}_c \quad \text{és} \quad \underline{\underline{v}}_f = \underline{\underline{G}}\cdot\underline{\underline{v}}_g$$

Ezeket (1)-be helyettesitve azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{T}}_{B,F} \cdot \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{u}}_c = \underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{v}}_g \tag{2}$$

balról szorozzunk $\underline{\underline{G}}^{-1}$-gyel és adódik, hogy

$$(\underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_{B,F} \cdot \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{u}}_c = \underline{\underline{v}}_g ,$$

tehát

$$\underline{\underline{T}}_{C,G} = \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_{B,F} \cdot \underline{\underline{C}}. \quad \blacksquare$$

Fontossága miatt megfogalmazzuk a bázistranszformációról szóló tételt külön abban a speciális esetben, amikor $T : U \longrightarrow U$ lineáris transzformáció.

3.5. Tétel

Legyen $T : U \longrightarrow U$ lineáris transzformáció.
U két bázisa $B : \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ és $C : \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$
T mátrixát a B bázisban $\underline{\underline{T}}_B$-vel,
T mátrixát a C bázisban $\underline{\underline{T}}_C$-vel jelölve

$$\underline{\underline{T}}_C = \underline{\underline{C}}^{-1}\,\underline{\underline{T}}_B \cdot \underline{\underline{C}}\,, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{\underline{C}} = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{matrix} \qquad \underline{c}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\,\underline{b}_i$$

Bizonyitás:

Az állitás a 3.4. Tétel következménye. ■

3.6. Definició

$$\text{Ha} \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{C}} \quad , \quad \text{ahol}$$

$\underline{\underline{C}}$ tetszőleges invertálható mátrix, akkor az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixot hasonló mátrixoknak nevezzük.

A 3.5. Tétel értelmében egy homogén lineáris transzformáció különböző bázisbeli mátrixai hasonlóak.

3.7. Tétel

Hasonló mátrixok determinánsai azonosak.

Bizonyitás:

Ha $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{A}}$ hasonlóak, akkor

$$\det \underline{\underline{B}} = \det (\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}}) = \det \underline{\underline{C}}^{-1} \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{C}}$$

(lásd a VI. fejezet 1.11. Tételét).

Mivel $\det \underline{\underline{C}}^{-1} = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{C}}}$,

$\det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}}$, mint állitottuk. ∎

4. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTVEKTORAI SAJÁTÉRTÉKEI, FŐVEKTOROK

A matematika számos ágában, többek között a mátrixalgebrában és a differenciálegyenletek elméletében, továbbá számos fizikai probléma megoldásában hasznosak az olyan vektorok, amelyeket a transzformáció önmaguk skalárszorosába képez le. A továbbiakban ezekkel az un. sajátvektorokkal és sajátértékekkel foglalkozunk.

4.1. Definició

Az U vektortér N alterét invariáns altérnek nevezzük a T transzformációra vonatkozóan, ha

$$\underline{u} \in N \Rightarrow T\underline{u} \in N ,$$

vagyis a leképezés nem vezet ki az N altérből.

A legfontosabb invariáns alterek az egydimenziós alterek.

4.2. Definició

A $T : U \longrightarrow U$ homogén lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük a λ skalárt és hozzá tartozó sajátvektornak az

$\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort, ha

$$T\underline{s} = \lambda \underline{s}$$

4.3. Tétel

Ha $\underline{s} \in U$ a T homogén lineáris transzformáció sajátvektora, akkor skalárszorosai U egydimenziós invariáns alterét alkotják.

Bizonyitás:

a) A $c.\underline{s}$ vektorok, ahol c tetszőleges skalár U alterét alkotják.

b) Ez invariáns altér, mert

ha $T\underline{s} = \lambda \underline{s}$, akkor

$$Tc\,\underline{s} = \lambda c\,\underline{s}. \quad \blacksquare$$

A sajátérték fontos tulajdonságáról szól a

4.4. Tétel

A λ skalár akkor és csak akkor sajátértéke a T homogén lineáris transzformációnak, ha $T - \lambda E$ nem reguláris. (E az egységoperátor.)

Bizonyitás:

a) Ha $T - \lambda E$ nem reguláris, akkor magterében van $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektor, vagyis $\exists\, \underline{s} \neq \underline{0}$, amellyel

$$(T - \lambda E)\,\underline{s} = \underline{0}$$

és átrendezve

$T\underline{s} = \lambda\,\underline{s}$, tehát λ T sajátértéke.

b) Ha λ sajátérték, akkor van olyan $\underline{s} \neq \underline{0}$, amellyel

$T\underline{s} = \lambda\,\underline{s}$, átrendezve

$(T - \lambda E)\,\underline{s} = \underline{0}$, tehát találtunk $T - \lambda E$ magterében $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort, igy $T - \lambda E$ nem reguláris. $\blacksquare$

A 4.4. TÉTEL alábbi következménye már lehetőséget ad a sajátértékek meghatározására is.

4.5. Tétel

A λ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az U véges dimenziós vektortér T homogén lineáris transzformációjának, ha U tetszőleges B bázisában

$$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0.$$

Bizonyitás:

A 4.4. Tétel értelmében λ akkor és csak akkor sajátérték, ha $\exists\ \underline{s} \neq \underline{0}$ amellyel $(T- \lambda E)\ \underline{s} = \underline{0}$. De akkor tetszőleges B bázisban felirva $T - \lambda E$ és $\underline{s}$ mátrixát, $\exists\ \underline{\underline{s}} \neq \underline{\underline{0}}$, hogy

$$(\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}})\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{0}}.$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek mint tudjuk, akkor és csak akkor van nem-triviális megoldása, ha determinánsa nulla. Tehát $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$ szükséges és elégséges feltétele λ sajátérték voltának. ■

4.6. Megjegyzés

Az nyilvánvaló, hogy

$|\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}}|$ értéke

U bármely bázisában ugyanaz, mivel hasonló mátrixok determinánsai egyenlőek.

Igy a $|\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = 0$ egyenlet

egy olyan, bázistól független dim U fokszámu algebrai egyenlet, amely jellemző a transzformációra és gyökei a sajátértékek.

4.7. Elnevezés

A $|\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = 0$ λ-ra

vonatkozóan dim U fokszámu egyenletet a transzformáció karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Az algebra alaptétele értelmében (ld. II. 2.1.) minden algebrai egyenletnek van gyöke a komplex számok körében. Ebből következik a

4.8. Tétel

A véges dimenziós U vektortér bármely T lineáris operátorának van sajátértéke és sajátvektora.

Bizonyitás:

A $|\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = 0$ egyenletnek van gyöke és akkor van olyan $\underline{s} \neq \underline{0}$, hogy $(T - \lambda E)\,\underline{s} = \underline{0}$, mivel $T - \lambda E$ szinguláris operátor. ∎

4.9. Megjegyzés

Fentiek következménye, hogy ha T lineáris operátora egy U vektortérnek és $V \subseteq U$, V invariáns altér U-ban, akkor T-nek van sajátvektora V-ben.

Bizonyos alkalmazások szempontjából célszerü mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait is értelmezni.

4.10 Definició

A T kvadratikus mátrix sajátértékének nevezzük a λ skalárt és hozzá tartozó sajátvektornak az $\underline{\underline{s}} \neq \underline{\underline{0}}$ oszlopvektort, ha

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{s}} = \lambda\,\underline{\underline{s}}\,.$$

Mivel egy mátrix mindig tekinthető egy lineáris operátor valamely bázisbeli mátrixának és

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{s}} = \lambda\,\underline{\underline{s}} \iff T\,\underline{s} = \lambda\,\underline{s}\,,$$

T sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására érvényes a 4.5. Tétel megfelelője, a

4.11. Tétel

A λ skalár akkor és csak akkor sajátértéke a $\underline{\underline{T}}$ kvadratikus mátrixnak, ha

$$\det\,(\underline{\underline{T}} - \lambda\,\underline{\underline{E}}) = 0\,.$$

$\underline{\underline{T}}$ sajátvektorai a

$$(\underline{\underline{T}} - \lambda\,\underline{\underline{E}})\,\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{0}}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorai.

B i z o n y i t á s:

A z állitást a 4.5. Tétel igazolása során bizonyitottuk. ∎

4.12. A lineáris operátor skalár invariánsai

Tekintsük a $T : U_n \longrightarrow U_n$ lineáris operátor karakterisztikus polinomját a

$$p(\lambda) = |\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{E}}| \quad \text{polinomot}$$

$$p(\lambda) = (-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + b_1(-\lambda) + b_o$$

A II. fejezet 2.2. Tétele alapján (gyökök és együtthatók közti összefüggés)

$$b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1}$$

és

$$b_o = \lambda_1 \ldots \lambda_n . \tag{2}$$

Másrészt irjuk fel a $p(\lambda)$ polinom b_{n-1} és b_o együtthatóját a karakterisztikus polinom definiciója,

$$p(\lambda) = |\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & \ldots & t_{1n} \\ & \ldots & \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} - \lambda \end{vmatrix} ,$$

alapján.

Innen

$$b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} \tag{1'}$$

és λ helyébe nullát helyettesitve

$$b_o = \det \underline{\underline{T}}$$

adódik.

(1) és (1') összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ,$$

a T operátor bármely bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege megegyezik a sajátértékek összegével, vagyis független a bázistól. Hasonlóan, összevetve (2)-t (2')-vel azt kapjuk, hogy

$$\det \underline{\underline{T}} = \lambda_1 \dots \lambda_n .$$

(Ebben $|\underline{\underline{T}}|$ bázistól való függetlensége már nem uj információ számunkra.)

Fentiek indokolják, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ii} \text{-t és } \det \underline{\underline{T}}\text{-t}$$

a $T: U_n \longrightarrow U_n$ lineáris operátor skalárinvariánsainak nevezzük.

Emlékeztetjük az olvasót az I. fejezet 7.6. példájára, amelyben geometriai homogén lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait határoztuk meg. Nézzünk most egy más természetü példát.

<u>4.13. Példa</u>

Legyen U az akárhányszor differenciálható egyváltozós valós függvények vektortere. A

$D : U \longrightarrow U$ lineáris operátort a

következőképpen definiáljuk:

$$Df = f' , \quad \text{ha } f \in U .$$

Keressük D sajátvektorait és sajátértékeit. A sajátvektorok az

$$f' = \lambda f \quad \text{differenciálegyenlet}$$

megoldásai, sajátértékek azok a valós λ számok, amelyek mellett a differenciálegyenletnek van megoldása.

Mivel $f' = \lambda f$ bármely λ esetén megoldható, a sajátértékek az összes valós számok és egy, λ-hoz tartozó sajátvektor az

$$f(t) = e^{\lambda t} \quad \text{függvény.}$$

<u>Megjegyzések:</u>

1. Mivel a példánkban U végtelen dimenziós, a 4.5. Tétel nem használható.

2. Ha U függvényelemü vektortér, sajátvektor helyett használatos a sajátfüggvény elnevezés is.

A 4.3. Tételből kitünik, hogy egy sajátvektor skalárszorosai is - ha ez a skalár nem nulla - ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a nullaszorost - vagyis a nullvektort - hozzávéve a tárgytérnek egydimenziós invariáns alterét alkotják. Egy sajátértékhez tartozhat több lineárisan független sajátvektor is.

Erről szól a

4.14. Tétel

A $T : U \longrightarrow U$ lineáris operátor λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai kiegészitve U nullvektorával U invariáns alterét alkotják.

Bizonyitás:

Ha $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ λ-hoz tartozó sajátvektorok, akkor tetszőleges c_1, c_2 skalárokkal

$$T(c_1\underline{s}_1 + c_2\underline{s}_2) = c_1 T\,\underline{s}_1 + c_2\,T\,\underline{s}_2 = c_1\,\lambda\,\underline{s}_1 + c_2\lambda\underline{s}_2 =$$
$$= \lambda\,(c_1\underline{s}_1 + c_2\underline{s}_2).$$

Vagyis $c_1\underline{s}_1 + c_2\underline{s}_2$ vagy nullvektor, vagy szintén λ-hoz tartozó sajátvektor. ∎

A sajátvektorok nagyon fontos tulajdonságát fogalmazza meg a

4.15 Tétel

A T homogén lineáris transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyitás:

Legyenek $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k$ T sajátértékei, és

$$\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_k$$

hozzájuk tartozó sajátvektorok. A sajátvektorok lineáris függetlenségét a sajátértékek számára (n) vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

1. Először megmutatjuk, hogy az állitás

$n = 2$-re igaz.

Vizsgáljuk a nullvektor előállitását a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$c_1 \underline{s}_1 + c_2 \underline{s}_2 = \underline{0} \tag{1}$$

Alkalmazzuk (1)-re a T transzformációt.

$$c_1 T \underline{s}_1 + c_2 T \underline{s}_2 = \underline{0} \tag{2}$$

(2) $T \underline{s}_1 = \lambda_1 \underline{s}_1$ és $T \underline{s}_2 = \lambda_2 s_2$ behelyettesitése után a következő alaku:

$$\lambda_1 c_1 \underline{s}_1 + \lambda_2 c_2 \underline{s}_2 = \underline{0} \tag{3}$$

Vonjuk ki (3)-ból (1) λ_1-szeresét,

$$(\lambda_2 - \lambda_1) c_2 \underline{s}_2 = \underline{0} \tag{4}$$

adódik. Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$ és $\underline{s}_2 \neq \underline{0}$, a (4) egyenlet csak ugy teljesülhet, hogy $c_2 = 0$, de akkor (1)-ből $c_1 = 0$ is következik. Tehát $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ lineárisan függetlenek.

2. Végül megmutatjuk, hogy ha (n-1) sajátvektor lineárisan független, ebből következik n vektor lineáris függetlensége. Módszerünk azonos az 1.lépés módszerével. Tekintsük a nullvektor előállitását $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n$ segitségével:

$$c_1 \underline{s}_1 + \ldots + c_n \underline{s}_n = \underline{0}\,. \tag{1'}$$

Alkalmazzuk (1')-re a T operátort.

$$c_1 T \underline{s}_1 + \ldots + c_{n-1} T \underline{s}_{n-1} + c_n T \underline{s}_n = \underline{0} \tag{2'}$$

Felhasználva, hogy $\underline{s}_i$-k sajátvektorok,

$$c_1 \lambda_1 \underline{s}_1 + \ldots + c_{n-1} \lambda_{n-1} \underline{s}_{n-1} + c_n \lambda_n \underline{s}_n = \underline{0} \tag{3'}$$

Vonjuk ki (3')-ből (1') λ_n-szeresét, a

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_n) \underline{s}_1 + \ldots + c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \underline{s}_{n-1} = \underline{0} \tag{4'}$$

egyenletet kapjuk. Az indukciós feltevés miatt és kihasználva, hogy a sajátértékek különbözők,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$$

kell legyen, de akkor 1'-ből $c_n = 0$ is következik. A sajátvektorrendszer tehát lineárisan független. ∎

4.16. Tétel

Ha egy U_n vektortér lineáris operátorának van n lineárisan független sajátvektora, akkor ebben a bázisban az operátor mátrixa diagonálmátrix.

Bizonyitás:

A lineárisan független $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n$ vektorrendszer választható bázisnak. Jelöljük T mátrixát ebben a sajátvektor bázisban $\underline{\underline{T}}_s$-sel. $\underline{\underline{T}}_s$ oszlopaiban a

$$T\underline{s}_i = \lambda_i \underline{s}_i \qquad i=1,\ldots,n$$

vektorok sajátvektor bázisbeli oszlopmátrixai állnak:

$$\lambda_i \underline{\underline{s}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \underset{\smile}{i} \quad ; \qquad i=1,\ldots,n,$$

tehát

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

∎

Megjegyzés:

A 4.15. Tételből következik, hogy ha a karakterisztikus egyenletnek n különböző gyöke van, akkor van n lineárisan független sajátvektora és igy jellemezhető diagonálmátrixszal.

Az előbbi, un. teljes sajátvektorrendszerrel rendelkező T homogén lineáris transzformáció tetszőleges bázisbeli mátrixáról szól a

4.17. Tétel

Ha a T homogén lineáris transzformációnak van teljes sajátvektorrendszere, akkor mátrixai hasonlóak a diagonálmátrixhoz.

$$\underline{\underline{T}}_s = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bizonyitás:

Rögzitsük T tárgyterében a B bázist. T $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékeihez tartozó $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ lineárisan független sajátvektorok B bázisbeli koordinátamátrixait jelöljük a következő módon:

$$\underline{\underline{s}}_i = \begin{pmatrix} s_{i1} \\ \vdots \\ s_{in} \end{pmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

A T lineáris operátor mátrixát a B bázisban $\underline{\underline{T}}_B$-vel jelöljük. Végezzünk bázistranszformációt, térjünk át a B bázisról az S sajátvektor bázisra. A 3.5. Tétel szerint

$$\underline{\underline{T}}_s = \underline{\underline{S}}^{-1}\, \underline{\underline{T}}_B\, \underline{\underline{S}} \qquad (1),$$

ahol $\underline{\underline{S}}$ a bázistranszformáció mátrixa

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{in} & & s_{nn} \end{pmatrix}$$

(1)-et átrendezve, balról $\underline{\underline{S}}$-sel és jobbról $\underline{\underline{S}}^{-1}$-gyel szorozva az egyenlőség mindkét oldalát

$$\underline{\underline{T}}_B = \underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{T}}_S\, \underline{\underline{S}}^{-1} \quad \text{adódik,}$$

tehát T tetszőleges B bázisbeli mátrixa hasonló a $\underline{\underline{T}}_S$ diagonálmátrixhoz. ∎

A 4.17. Tétel bizonyos egyszerü mátrixok jól kezelhető szorzattá alakitására is használható.

4.18. Tétel

Ha a $\underline{\underline{T}}$ n-edrendü kvadratikus mátrixnak van n lineárisan független oszlopvektora, akkor

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1}$$

alakban irható, ahol

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{s}_1 \ldots \underline{s}_n) ,$$

az $\underline{s}_i$ $i=1,\ldots n$ vektorok $\underline{\underline{T}}$ sajátvektorai, $\underline{\underline{T}}\underline{s}_i = \lambda_i \underline{s}_i$. $<\lambda_1, \ldots, \lambda_n>$ diagonálmátrix, amelynek főátlójában $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ áll.

Bizonyitás:

Az állitás a 4.17. Tétel következménye. ■

4.19. Elnevezés

A kvadratikus T mátrix fenti

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1}$$

előállitását spektrálfelbontásnak nevezzük.

Mivel különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak (4.15 Tétel), ha $\underline{\underline{T}}$-nek van annyi különböző sajátértéke, mint amekkora a rendje, akkor van spektrálfelbontása.

A továbbiakban néhány egyszerü alkalmazását mutatjuk meg a spektrálfelbontásnak.

4.20. Tétel

Ha a $\underline{\underline{T}}$ kvadratikus mátrix spektrálfelbontása

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1} ,$$

akkor

$$\underline{\underline{T}}^k = \underline{\underline{S}} < \lambda_1^k, \ldots \lambda_n^k > \underline{\underline{S}}^{-1}$$

(k tetszőleges természetes szám).

Bizonyitás:

A bizonyitást k-ra vonatkozó teljes indukcióval végezzük. k = 1-re az állitás igaz, és

ha $\underline{\underline{T}}^{k-1} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1^{k-1}, \ldots, \lambda_n^{k-1} > \underline{\underline{S}}^{-1}$,

$\underline{\underline{T}}^{k} = \underline{\underline{T}}^{k-1} \cdot \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1}$, akkor

$\underline{\underline{T}}^{k} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1^{k-1}, \ldots, \lambda_n^{k-1} > \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1}$, vagyis

$\underline{\underline{T}}^{k} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1^{k}, \ldots, \lambda_n^{k} \; \underline{\underline{S}}^{-1}$,

mint állitottuk. ■

A spektrálfelbontás segitségével könnyen meghatározható az inverzmátrix is.

4.21. Tétel

A

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1} \tag{1}$$

mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha egyik sajátértéke sem nulla. Ekkor $\underline{\underline{T}}^{-1}$ spektrálfelbontása a következő:

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{S}} < \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} \tag{2}$$

Bizonyitás:

Mint tudjuk T invertálhatóságának szükséges és elégséges feltétele

det $\underline{\underline{T}} \neq 0$ fennállása.

Mivel det $\underline{\underline{T}} = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ (4.12. Tétel), az állitás első részét bizonyitottuk. Megmutatjuk, hogy ha $\lambda_i \neq 0$ i=1, 2, ..., n, akkor $\underline{\underline{T}}^{-1}$ (2) alaku. Ugyanis

$$\underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} < \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} =$$

$$= \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \cdot < \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$$

és hasonlóan forditott sorrendben végezve a szorzást

$$\underline{\underline{S}} < \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} < \lambda_1, \ldots, \lambda_n > \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{E}} ,$$

tehát

$$\underline{\underline{S}} < \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} > \underline{\underline{S}}^{-1} \quad \text{valóban}$$

$\underline{\underline{T}}$ inverze, mint állitottuk. ■

Lássunk egy példát a spektrálfelbontásra.

4.22. Példa

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg $\underline{\underline{T}}$ spektrálfelbontását, ha lehet. Ehhez megkeressük először a sajátértékeket a karakterisztikus egyenletből.

$$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

A karakterisztikus egyenlet.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, tehát van teljes sajátvektorrendszer és igy elvégezhető a spektrálfelbontás. A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és az}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{homogén}$$

lineáris egyenletrendszerek megoldásaként kapjuk. Elég egy-egy megoldást meghatároznunk.

$$\underline{\underline{s}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{s}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a spektrálfelbontás.

Azt tudjuk, hogy ha egy véges dimenziós vektortér lineáris operátorának sajátértékei különbözők, akkor van teljes sajátvektorrendszere. Felmerül a kérdés, hogy lehet-e teljes sajátvektorrendszert találni, ha a karakterisztikus egyenletnek van többszörös gyöke. Megmutatjuk, hogy van olyan eset, amikor a többszörös gyökhöz tartozik multiplicitásának megfelelő számu sajátvektor és akkor van teljes sajátvektorrendszer. Végül foglalkozunk azzal az esettel, amikor nincs elég sajátvektor és megmutatjuk, hogy a hiányzó sajátvektorok akkor pótolhatók un. fővektorokkal, vagy más néven általánositott sajátvektorokkal.

4.23. Példák

1. Legyen a T operátor mátrixa egy B bázisban a

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mátrix.}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$(1 - \lambda)^2 (1 + \lambda) = 0 ,$$

a sajátértékek: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1.$

A $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozik például az

$$\underline{\underline{s}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ sajátvektor.

Megmutatjuk, hogy a kétszeres gyökhöz található két lineárisan független sajátvektor, amelyeket a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapunk.

$$\underline{\underline{s}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{s}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Itt az volt a szerencsénk, hogy a kétszeres sajátértékhez tartozó lineáris egyenletrendszer mátrixának a rangja kettővel kevesebb a rendjénél és ezért kaptunk teljes sajátvektorrendszert. Következő példánkban más a helyzet.

2. Legyen most a T operátor B bázisbeli mátrixa

$$\underline{\underline{T}}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet

$$(1 - \lambda)^2 \, (2 - \lambda) = 0 \, .$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Egy λ_1-hez tartozó sajátvektor:

$$\underline{\underline{s}}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

A $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$-hez tartozó egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mátrixának a rangja 2, tehát csak egy független sajátvektor tartozik az 1 sajátértékhez. Ez például az

$$\underline{\underline{s}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vektor.}$$

Szeretnénk kiegésziteni az $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ vektorrendszert ugy, hogy kifeszítse a teret és bázisnak választva minél egyszerübb legyen az operátor mátrixa. A kiinduló ötlet a következő. Mivel a

$$(T - \lambda E)\, \underline{s} = \underline{0} \qquad \text{egyenletnek}$$

$\lambda = 1$ esetén csak egy megoldása van, a hiányzó vektort pótoljuk egy olyan $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$-től független $\underline{f}$ vektorral, amely a

$$(T - \lambda E)^2\, \underline{f} = \underline{0} \qquad \text{egyenlet}$$

megoldása - ha ilyen létezik.
$(T - \lambda E)^2\, \underline{f} = \underline{0} \Leftrightarrow (T - \lambda E)\,(T - \lambda E)\, \underline{f} = \underline{0}$, de akkor $(T - \lambda E)\, \underline{f}$ λ-hoz tartozó sajátvektor kell legyen, tehát a

$$(T - \lambda E)\, \underline{f} = \underline{s} \qquad \text{egyenletből}$$

határozható meg $\underline{f}$. Irjuk fel a B bázisban a megfelelő lineáris egyenletrendszert

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer egy megoldása

$$\underline{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ és $\underline{f}$ B bázisbeli koordinátaoszlopvektorai

$$\underline{\underline{s}}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{s}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A három vektor lineáris független, tehát választható bázisnak. Ebben az S bázisban határozzuk meg T mátrixát.

$$T\underline{s}_1 = 2\underline{s}_1, \quad T\underline{s}_2 = \underline{s}_2, \quad T\underline{f} = \underline{f} + \underline{s}_2$$

és igy

$$\underline{\underline{T}}_s = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bár}$$

nem diagonálmátrix, de egyszerü alaku. Érdemes tehát foglalkoznunk kicsit részletesebben is az ilyen tulajdonságu $\underline{f}$ vektorokkal.

4.24. Definició

Az $\underline{f}_k$ vektort a T homogén lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó k-adrendü fővektorának nevezzük, ha

$$(T - \lambda E)^k \underline{f}_k = \underline{0} \qquad \text{és}$$

$$(T - \lambda E)^{k-1} \underline{f}_k \neq \underline{0}.$$

Megjegyzés:

A sajátvektor a fenti definició értelmében elsőrendü fővektor. Ez indokolja, hogy a fővektorokat szokták általánositott sajátvektoroknak is nevezni.

4.25. Tétel

Ha egy T homogén lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozik $\underline{f}_k$ k-adrendü fővektor, akkor tartozik hozzá

$\forall\ j < k$-ra $\underline{f}_j$ j-ed rendü fővektor is, és az

$\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k$ λ-hoz tartozó

fővektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyitás:

a) $(T - \lambda E)\,\underline{f}_k = \underline{f}_{k-1}, \ldots, (T-\lambda E)^{k-1}\,\underline{f}_k = \underline{f}_1$ az állitásban szereplő fővektorok, ugyanis ha

$$j<k, \quad (T-\lambda E)^j \underline{f}_j = (T - \lambda E)^j \cdot (T - \lambda E)^{k-j} \underline{f}_j = \underline{0}$$

és

$$(T - \lambda E)^{j-1}\,\underline{f}_j = (T - \lambda E)^{k-1}\underline{f}_k \neq \underline{0}\,.$$

b) Igazoljuk a k elemü un. <u>fővektorlánc</u> vektorainak lineáris függetlenségét.

$$c_1\,\underline{f}_1 + c_2\,\underline{f}_2 + \ldots + c_k \underline{f}_k = \underline{0} \qquad (1)$$

Alkalmazzuk (1)-re a $(T - \lambda E)^{k-1}$ operátort. Azt kapjuk, hogy

$$c_k\,(T - \lambda E)^{k-1}\underline{f}_k = \underline{0} \implies c_k = 0\,.$$

Hasonlóan a

$c_1\,\underline{f}_1 + \ldots + c_{k-1}\underline{f}_{k-1} = \underline{0}$ vektorra

$(T - \lambda E)^{k-2}$-t $(T - \lambda E)^{k-3}$-t, ..., végül

$(T - \lambda E)$-t alkalmazva adódik, hogy a többi együttható is nulla. A vektorrendszer tehát lineárisan független. ∎

Ahhoz, hogy egy véges dimenziós vektortér lineáris operátorát a bevezető példában szereplő un. Jordan alaku mátrixszal tudjuk jellemezni, szükségünk van egy fontos uj fogalomra, a magtér fogalmának általánositására.

<u>4.26. Tétel</u>

Ha λ a $T : U \to U$ lineáris operátor sajátértéke, az U tárgytér azon vektorai, amelyeket a $T - \lambda E$ operátor valamely egész kitevős hatványa a nullvektorra képez le, vektorteret alkotnak. Ezt az M vektorteret a $T - \lambda E$ operátor <u>általánositott magterének</u> nevezzük.

Bizonyitás:

1. M nem üres, mert $\underline{0} \in M$, sőt $T - \lambda E$ szinguláris volta miatt van

$\underline{f}_1 \neq \underline{0}$ $\quad \underline{f}_1 \in M$, ahol

$\underline{f}_1$ T λ-hoz tartozó sajátvektora.

2. Ha $(T - \lambda E)^k \underline{m}_1 = \underline{0}$ és $(T - \lambda E)^{\ell} \underline{m}_2 = \underline{0}$, akkor

$$(T - \lambda E)^{\max(k,\ell)} (c_1\underline{m}_1 + c_2\underline{m}_2) = \underline{0},$$

tehát M U altere. ■

A következőkben M néhány tulajdonságát vizsgáljuk.

4.27. Tétel

Ha a T homogén lineáris transzformáció tárgyterének dimenziója n és λ egy sajátérték, akkor $\forall\, \underline{m} \in M$ esetén

$$(T - \lambda E)^n \underline{m} = \underline{0}$$

Bizonyitás:

M minden vektorához keressük meg azt a legkisebb kitevőt, amellyel

$$(T - \lambda E)^k \underline{m} = \underline{0} \text{ teljesül.}$$

Megmutatjuk, hogy $k \leq n$, indirekt módszerrel. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan $k > n$ és $\underline{m} \in M$, hogy

$$(T - \lambda E)^k \underline{m} = \underline{0} \quad \text{és}$$

$$(T - \lambda E)^{k-1} \underline{m} \neq \underline{0}$$

ekkor a 4.25. Tétel értelmében volna M-ben λ-hoz tartozó $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k$ lineárisan független vektorrendszer, ami lehetetlen, hiszen

M az n dimenziós tárgytér

altere, amelynek dimenziója nem lehet n-nél nagyobb. Tehát $k \leq n$ és akkor $(T - \lambda E)^n \underline{m} = \underline{0}$ $\forall\, \underline{m} \in M$ esetén. ■

Lehet, hogy n-nél kisebb olyan i egész is van, amellyel

$$(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0} \quad \forall\, \underline{m} \in M\text{-re}$$

fennáll.

4.28. Elnevezés

Azt az i egész számot, amellyel

$$(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0} \qquad \forall \underline{m} \in M\text{-re}$$

és $\exists$ $\underline{m} \in M$, hogy $(T - \lambda E)^{i-1}\underline{m} \neq \underline{0}$

a λ sajátérték és a hozzá tartozó M általánositott magtér indexének nevezzük.

4.29. Tétel

M invariáns altere U-nak a T operátorra vonatkozóan.

Bizonyitás:

Ha $\underline{m} \in M$, akkor

$$(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0}$$

itt i M indexe. Ekkor

$$(T - \lambda E)^i T\underline{m} = T(T - \lambda E)^i \underline{m} = \underline{0}\,,$$

mivel $(T - \lambda E)^i$ és T felcserélhető operátorok. ∎

A továbbiakban megmutatjuk, hogy T tárgyterét lépésenként általánositott magterek direkt összegére lehet bontani.

4.30. Tétel :

Ha λ a $T : U_n \longrightarrow U_n$ operátor i indexü sajátértéke, akkor

$$U = M \oplus K$$

ahol M $T - \lambda E$ általánositott magtere, K pedig $(T - \lambda E)^i$ képtere.

Bizonyitás:

Legyen $\underline{u}$ tetszőleges vektor az U tárgytérben. Tekintsük az

$$\underline{u},\ (T - \lambda E)^i \underline{u},\ (T - \lambda E)^{2i}\underline{u}, \ldots,\ (T - \lambda E)^{ni}\, \underline{u}$$

vektorrendszert. Mivel $\dim U = n$, ez az $n + 1$ vektor lineárisan összefüggő, tehát létezik

$c_o, c_1, \ldots c_n$ nem mind nulla skalár ugy, hogy

$$c_o \underline{u} + c_1(T-\lambda E)^i \underline{u} + \ldots + c_n(T-\lambda E)^{in} \underline{u} = \underline{0} . \qquad (1)$$

a) Ha $c_o \neq 0$, akkor

$$\underline{u} = -(T-\lambda E)^i \left[\frac{c_1}{c_o} \underline{u} + \ldots + \frac{c_n}{c_o} (T-\lambda E)^{(n-1)i} \underline{u} \right] ,$$

tehát $\underline{u} \in K$

b) Ha $c_o = c_1 = \ldots c_{k-1} = 0$, de már $c_k \neq 0$, akkor ezt figyelembe véve (1)-ből azt kapjuk, hogy

$$c_k(T-\lambda E)^{k.i} \Big[\underline{u} + \underbrace{\frac{c_{k+1}}{c_k}(T-\lambda E)^i \underline{u} + \ldots + \frac{c_n}{c_k}(T-\lambda E)^{(n-k)i} \underline{u}}_{\underline{v} \in K} \Big] = \underline{0} .$$

$c_k \neq 0$ és rövidebb jelöléssel

$(T-\lambda E)^{k.i} (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{0}$ adódik.

Tudjuk, hogy λ indexe i, ezért

$(T-\lambda E)^i (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{0}$ is teljesül,

$\underline{u} + \underline{v} \in M$ és $\underline{v} \in K$,

tehát $\underline{u} \in U$ előáll M és K elemeinek összegeként. Meg kell még mutatnunk, hogy $M \cap K = \{\underline{0}\}$

Legyen

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{m}_1 + \underline{k}_1 \quad \text{és} \\ \underline{u} &= \underline{m}_2 + \underline{k}_2 \quad , \end{aligned} \qquad (2)$$

$\underline{m}_1, \underline{m}_2 \in M$, $\underline{k}_1, \underline{k}_2 \in K$

(2)-ből következik, hogy

$$\underline{m}_1 - \underline{m}_2 = \underline{k}_2 - \underline{k}_1 = \underline{w}$$

vagyis $\underline{w} \in M \cap K$.

$\underline{w} \in K$ azt jelenti, hogy van $\underline{u}_1 \in U$, amellyel

$$\underline{w} = (T-\lambda E)^i \underline{u}_1 \qquad (3)$$

$\underline{w} \in M$ azt jelenti, hogy

$$(T-\lambda E)^i \underline{w} = \underline{0} \tag{4}$$

(3)-at (4)-be helyettesitve

$$(T-\lambda E)^{2i} \underline{u}_1 = \underline{0} \quad \text{adódik,}$$

és mivel λ indexe i, akkor

$$\underline{w} = (T-\lambda E)^i \underline{u}_1 = \underline{0} \quad \text{is fennáll, tehát}$$

$\underline{w} = \underline{0}$. Igy

$$U = M \oplus K \ . \ \blacksquare$$

Azt már tudjuk, hogy M T-re vonatkozó invariáns altere U-nak.

<u>4.31. Tétel</u>

$(T-\lambda E)^i$ képtere K, invariáns altere az U tárgytérnek a T operátorra vonatkozóan.

<u>Bizonyitás:</u>

Ha $\underline{w} = (T-\lambda E)^i \underline{u}$ $\quad u \in U$, akkor

$T\underline{w} = (T-\lambda E)^i (T\underline{u})$

ismét kihasználva, hogy T és $(T-\lambda E)^i$ felcserélhető operátorok. ■

Megmutatjuk, hogy a tárgytér invariáns alterekre bontása a transzformáció mátrixának felirása szempontjából nagyon előnyös.

<u>4.32. Tétel</u>

Ha a T homogén lineáris transzformáció véges dimenziós U tárgytere, két invariáns altér direkt összege

$$U = M \oplus K \ ,$$

akkor az operátor

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{K}} \end{pmatrix}$$

alaku mátrixszal jellemezhető, ahol

$\underline{\underline{M}}$ a $T : M \longrightarrow M$ és $\underline{\underline{K}}$ a $T : K \longrightarrow K$ transzformáció mátrixa.

<u>Bizonyitás:</u>

Legyen dim $U = n$,

M bázisa $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_r$

K bázisa $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n-r}$

tetszőleges $\underline{u}$ U

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{r} a_i \underline{m}_i + \sum_{j=1}^{n-r} b_j \underline{k}_j$$ alakban irható egyértelmüen.

$\underline{u}$ koordináta mátrixa particionálva:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{a}} \\ \underline{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

Keressük a $\underline{\underline{T}}$ mátrixot is particionált alakban

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{K}} \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{\underline{T}}$ n-ed rendü, $\underline{\underline{M}}$ r-ed rendü, $\underline{\underline{K}}$ (n-r)-ed rendü kvadratikus mátrixok, $\underline{\underline{C}}$ $r \times n-r$ és $\underline{\underline{D}}$ $n-r \times r$ méretü.

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{b}} \\ \underline{\underline{D}}\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

Ha $\underline{u} \in M$, akkor $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}}$ és mert M invariáns altér, vagyis $T\underline{u} \in M$ $\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}}$ kell legyen, minden $\underline{u}$ és igy minden $\underline{\underline{a}}$ esetén, tehát $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$ kell legyen.

Hasonlóan, megismételve a gondolatmenetet, következik K invariáns voltából $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$ és ezzel az állitás. ∎

Ez a tétel segitségünkre lesz homogén lineáris transzformáció mátrixának egyszerü alakban történő felirásánál.

4.33. Tétel

A $T : U_n \longrightarrow U_n$ lineáris operátor T mátrixa tetszőleges B bázisban

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{M}}_j \end{pmatrix}$$ alakban irható,

ahol $\underline{\underline{M}}_k$ a λ_k sajátértékhez tartozó M_k általánositott magtéren értelmezett

$$T : M_k \longrightarrow M_k$$ operátor

mátrixa a B bázisban.

Bizonyitás:

A T operátornak van λ_1 sajátértéke, ehhez tartozik

$(T-\lambda_1 E)^{i_1}$ M_1 magtere és

K_1 képtere. A 4.30. Tétel értelmében az U tárgytér

$$U = M_1 \oplus K_1$$ módon

invariáns alterekre bontható és akkor

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_1 \end{pmatrix}$$ alaku,

ahol $\underline{\underline{M}}_1$ a $T : M_1 \longrightarrow M_1$

$\underline{\underline{K}}_1$ a $T : K_1 \longrightarrow K_1$ mátrixa.

Mivel K_1 U invariáns altere, van benne sajátvektor, amelyhez tartozó sajátérték legyen λ_2. Az előbbihez hasonló

$$K_1 = M_2 \oplus K_2 \quad \text{módon}$$

bontható invariáns alterekre s.i.t. ∎

Megjegyzés:

Itt végülis lépésenként invariáns alterek direkt összegeként állitottuk elő a tárgyteret.

$$U = M_1 \oplus \dots \oplus M_j \quad \text{módon,}$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{j} \dim M_i = \dim U .$$

Feladatunk most már csak az, hogy jól megválasztott bázisban irjuk fel a

$$T : M_i \longrightarrow M_i \quad \text{leképezések}$$

$\underline{\underline{M}}_i$ mátrixait.

4.34. Tétel

Legyen λ a $T : U_n \longrightarrow U_n$ operátor sajátértéke és M $T-\lambda E$ általánositott magtere, λ indexe i. Ha dim M = i, akkor fővektorokból álló bázist választva

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

alaku i-edrendü un. Jordan mátrix.

Bizonyitás:

Ha λ indexe i, akkor van M-ben λ-hoz tartozó i elemü $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_i$ fővektorlánc, amelynek vektorai mint tudjuk, lineárisan függetlenek (lásd 4.25. Tétel). Mivel dim M = i, a fővektorlánc választható M bázisául. Ebben a bázisban irjuk fel M mátrixát.

$$(T-\lambda E)\,\underline{f}_1 = 0 \implies T\,\underline{f}_1 = \lambda \underline{f}_1$$

$$(T-\lambda E)\,\underline{f}_2 = \underline{f}_1 \implies T\,\underline{f}_2 = \lambda \underline{f}_2 + \underline{f}_1, \ldots,$$

$$(T-\lambda E)\,\underline{f}_i = \underline{f}_{i-1} \implies T\,\underline{f}_i = \lambda \underline{f}_i + \underline{f}_{i-1}\,.$$

Felirva a bázisvektorok transzformáltjait koordinátáiból álló oszlopvektorral, az állitásban szereplő mátrixot kapjuk. ∎

4.35. Elnevezés

Ha a 4.33. Tételben szereplő $\underline{\underline{M}}_k$ mátrixok mindegyikét Jordan alakban irjuk fel, tehát fővektor bázist választunk, a kapott $\underline{\underline{T}}$ mátrixot Jordan-féle normálalaku mátrixnak, az $\underline{\underline{M}}_k$ mátrixot Jordan blokknak nevezzük.

Megjegyzés:

Előfordulhat olyan eset is, hogy valamelyik $T : M \longrightarrow M$ transzformációnál dim M nagyobb a λ sajátérték indexénél. Ekkor a fővektorrendszer nem alkot láncot, van több lineárisan független azonos rendü fővektor. Ebben az esetben egy λ -hoz több Jordan-blokk tartozik. Ennek az esetnek a tárgyalása meghaladja a jegyzet kereteit, ezzel nem foglalkozunk.

Ahogy a sajátvektorrendszer alkalmas mátrixok diagonalizálására, ugy fővektorok segitségével tetszőleges kvadratikus mátrix Jordan alakra transzformálható pontosabban hasonló egy Jordan mátrixhoz.

4.36. Definició

Tekintsük az $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrixot egy A lineáris operátor valamely bázisbeli mátrixának. Az operátor fővektorainak koordinátaoszlopvektorait az $\underline{\underline{A}}$ mátrix fővektorainak nevezzük.

4.37. Tétel

Tetszőleges $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix hasonló egy Jordan mátrixhoz

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}, \qquad \text{ahol}$$

$\underline{\underline{J}}$ a megfelelő Jordan mátrix,

$\underline{\underline{F}}$ oszlopait $\underline{\underline{A}}$ fővektorai alkotják.

Bizonyitás:

A 4.18. Tétel igazolásával azonos módon történik.

Megjegyzés:

Felhivjuk az olvasó figyelmét arra a tárgyalásból nyilvánvaló tényre, hogy ha van teljes sajátvektorrendszer, akkor a mátrix Jordan normálalakra transzformálása megegyezik a spektrálfelbontással.

4.38. Példa

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{hozzuk}$$

Jordan alakra.

A karakterisztikus egyenlet:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

tehát

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

A 3 kétszeres gyökhöz először a sajátvektorokat keressük meg a következő egyenletből:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Több lineárisan független elsőrendü fővektor nincs, mivel az $\underline{\underline{A}} - \lambda E$ mátrix rangja 1 és rendje 2.

$$\text{A} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{egyenletből egy}$$

másodrendü fővektor $\underline{\underline{f}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.39. Cayley-Hamilton tétel

Minden $T : U_n \longrightarrow U_n$ operátor kielégiti a saját karakterisztikus egyenletét és ennek következtében minden kvadratikus $\underline{\underline{T}}$ mátrix is kielégiti a saját karakterisztikus egyenletét.

Bizonyitás:

Legyen T karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Állitásunk azt jelenti, hogy a

$$P(T) = (T - \lambda_1 E)^{m_1} \ldots (T - \lambda_k E)^{m_k}$$

homogén lineáris transzformáció a nulloperátor. Mivel a

$$P(T) : U_n \longrightarrow U_n \quad \text{lineáris operátor } T$$

minden fővektorához a nullvektort rendeli és igy van n lineárisan független vektor, amelynek $\underline{0}$ a képe. $P(T)$ minden $\underline{u} \in U_n$ vektort $\underline{0}$-ba visz át, tehát nulloperátor. A mátrixra vonatkozó állitás ebből már következik. ■

5. AZ EUKLIDESZI TÉR LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓI

Ebben a pontban a skaláris szorzattal rendelkező valós és komplex vektorterek néhány speciális lineáris operátorával foglalkozunk.

5.1. Definició

Legyen T az E_n euklideszi tér lineáris operátora. Értelmezzük a T^* operátort a következő módon:

$$(T\underline{x} \mid \underline{y}) = (\underline{x} \mid T^* \underline{y}) \qquad \text{ha} \quad \underline{x}, \underline{y} \in E_n$$

a T^* operátort T <u>adjungáltjának</u> nevezzük.

5.2. Tétel

Az E euklideszi tér minden T lineáris operátorához egyértelmüen tartozik T^* és T^* is lineáris operátor.

Bizonyitás:

Ha $(T\,\underline{x} \mid \underline{y}) = (\underline{x} \mid T^* \underline{y})$, akkor a skaláris szorzat tulajdonságai alapján

$$(T^* \underline{y} \mid \underline{x}) = (\underline{y} \mid T\,\underline{x}) \quad \text{is fennáll.}$$

Legyen $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ E_n ortonormált bázisa

$$(T^*\underline{y} \mid \underline{e}_i) = (\underline{y} \mid T\,\underline{e}_i) \qquad i=1,\dots,n$$

és ebből

$$T^*\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} (T^*\underline{y} \mid \underline{e}_i)\,\underline{e}_i \qquad \text{alapján}$$

$$T^*\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{y} \mid T\,\underline{e}_i)\,\underline{e}_i \qquad \text{adódik,}$$

ami azt mutatja, hogy minden $\underline{y} \in E_n$ vektorhoz rendel képet T^*, a skaláris szorzás és adott bázisbeli vektorfelbontás egyértelmüsége miatt egyértelmüen és a skaláris szorzás tulajdonságai alapján homogén lineáris módon. Ezzel az állitást igazoltuk. ■

5.3. Tétel

Az adjungált operátor a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $(T^*)^* = T$
2. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.
4. $(c\,T)^* = \bar{c}\,T^*$ (c skalár)

B i z o n y i t á s:

1. Irjuk fel T^* adjungáltjára vonatkozóan a definiáló egyenlőséget

$$(T^* \underline{y} \,|\, \underline{x}) = (\underline{y} \,|\, (T^*)^* \underline{x})$$

másrészt mint 5.2. bizonyitásánál

$(T^* \underline{y} | \underline{x}) = (\underline{y} \,|\, T\underline{x})$ ebből

$(\underline{y} \,|\, (T^*)^* \underline{x}) = (\underline{y} \,|\, T\underline{x})$ mivel ez

minden $\underline{y}$ esetén fennáll $(T^*)^* = T$.

2.

$$((T_1 + T_2)^* \underline{x}|\underline{y}) = (\underline{x} \,|\, (T_1 + T_2)\underline{y}) = (\underline{x} \,|\, T_1 \underline{y} + T_2 \underline{y}) =$$

$$= (\underline{x} \,|\, T_1 \underline{y}) + (\underline{x}|T_2\underline{y}) = (T_1^* \underline{x}|\underline{y}) + (T_2^* \underline{x}|\underline{y})$$

és akkor

$$((T_1 + T_2)^* \underline{x}|\underline{y}) = ((T_1^* + T_2^*) \underline{x}\,|\,\underline{y}),$$

amiből az állitás következik.

3.

$$(T_1 T_2 \underline{x} \,|\, \underline{y}) = (\underline{x} \,|\, (T_1 T_2)^* \underline{y})$$

Másrészt

$$(T_1 T_2 \underline{x} \,|\, \underline{y}) = (T_1 (T_2 \underline{x}) \,|\, \underline{y}) = (T_2 \underline{x} \,|\, T_1^* \underline{y}) = (\underline{x} \,|\, T_2^* T_1^* \underline{y}),$$

tehát

$(\underline{x} \,|\, (T_1 T_2)^* \underline{y}) = (\underline{x}|T_2^* T_1^* \underline{y})$ és ebből

$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ következik.

4. Ennek igazolását az olvasóra bizzuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy milyen kapcsolat van egy lineáris operátor és adjungáltjának mátrixai között. Erről szól az

5.4. Tétel

Ha a T lineáris operátor mátrixa ortonormált bázisban $\underline{\underline{T}}$, akkor a T^* adjungált operátoré $\overline{\underline{\underline{T}}}'$ (transzponált konjugált).

Bizonyitás:

Legyen $\underline{\underline{T}} = (t_{ij})$ T mátrixa és

$\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ T^{*} mátrixa az

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált bázisban.

Ekkor

$$b_{ij} = (\underline{\underline{B}}\ \underline{e}_i)\ \underline{e}_j \tag{1}$$

Mivel

$$(T^{*}\ \underline{e}_i \mid \underline{e}_j) = (\underline{e}_i \mid T\ \underline{e}_j) \qquad \text{és}$$

a skaláris szorzás tulajdonságai alapján

$$(\underline{e}_i \mid T\ \underline{e}_j) = \overline{(T\ \underline{e}_j \mid \underline{e}_i)}\ ,$$

(1)-ből azt kapjuk, hogy

$$b_{ij} = (\underline{\underline{B}}\ \underline{e}_i)\ \underline{e}_j = \overline{(\underline{\underline{T}}\ \underline{e}_j)\ \underline{e}_i} = \overline{t_{ji}}\ .$$

Ezzel az állitást igazoltuk. ∎

Megjegyzés:

Valós euklideszi téren, fentiek értelmében, ha két operátor egymás adjungáltja, ortonormált bázisbeli mátrixaik egymás transzponáltjai.

Fontosak az alkalmazásokban az olyan lineáris operátorok, amelyek megegyeznek adjungáltjukkal.

5.5. Definició

Az olyan T lineáris operátorokat, amelyekre $T = T^{*}$, önadjungált operátornak nevezzük.

5.6. Tétel

Ha $\underline{\underline{T}} = (t_{ij})$ egy T önadjungált operátor ortonormált bázisbeli mátrixa, akkor

$$\underline{\underline{T}} = \overline{\underline{\underline{T}}}'\ .$$

Bizonyitás:

Az állitás az 5.4. Tétel közvetlen következménye. ∎

5.7. Megjegyzés

Valós euklideszi tér önadjungált operátorának ortonormált bázisbeli mátrixa szimmetrikus mátrix. A valós önadjungált operátort szokták szimmetrikus operátornak is nevezni.
Az önadjungált operátorok sajátértékeiről és sajátvektorairól, ezek speciális voltáról szólunk a következőkben.

5.8. Tétel

A T önadjungált lineáris operátor sajátértékei valósak.

Bizonyitás:

Legyen λ T sajátértéke és $\underline{s}$ hozzátartozó sajátvektor. Ekkor

$$(T\underline{s} \mid \underline{s}) = (\lambda \underline{s} \mid \underline{s}) = \lambda (\underline{s} \mid \underline{s}) .$$

Másrészt vegyük figyelembe, hogy $T = T^{*}$.
Ekkor

$$(T\,\underline{s} \mid \underline{s}) = (\underline{s} \mid T\,\underline{s}) = (\underline{s} \mid \lambda \underline{s}) = \bar{\lambda} (\underline{s} \mid \underline{s}) .$$

A kettő összevetéséből adódik, hogy

$$\lambda (\underline{s} \mid \underline{s}) = \bar{\lambda} (\underline{s} \mid \underline{s}) \quad \text{és mert} \quad (\underline{s} \mid \underline{s}) \neq 0$$

$$\lambda = \bar{\lambda} . \ \blacksquare$$

Azt tudjuk, hogy egy lineáris operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. Az önadjungált operátorokra több is igaz.

5.9. Tétel

Önadjungált lineáris operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Bizonyitás:

Legyen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ T két sajátértéke és $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ hozzájuk tartozó sajátvektorok. Tekintsük a következő skaláris szorzatot:

$$(T\,\underline{s}_1|\underline{s}_2) = \lambda_1(\underline{s}_1|\underline{s}_2)\ .\quad \text{Másrészt}$$

$$(T\,\underline{s}_1|\underline{s}_2) = (\underline{s}_1|\,T\,\underline{s}_2) = (\underline{s}_1|\,\lambda_2\,\underline{s}_2)$$

Ebből $\lambda_1(\underline{s}_1|\underline{s}_2) = \overline{\lambda}_2(\underline{s}_1|\underline{s}_2)$ adódik. Tudjuk, hogy T sajátértékei valósak, ezért $\lambda_2 = \overline{\lambda}_2$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tehát az egyenlőség csak $(\underline{s}_1|\underline{s}_2) = 0$ esetén állhat fenn, mint állitottuk. ∎

Felmerül a kérdés, hogy tudunk-e valamit mondani a sajátvektorok számáról. Látni fogjuk egy később bizonyitandó tétel következményeként, hogy E_n önadjungált operátorának mindig van teljes sajátvektorrendszere. Előbb azonban megismerkedünk néhány további speciális lineáris transzformációval.

5.10. Definició

Az olyan T lineáris operátorokat, amelyekre

$T^* = T^{-1}$, unitér

operátoroknak nevezzük.

Az unitér transzformáció fontos tulajdonságát mondja ki az

5.11. Tétel

Az E_n euklideszi tér T lineáris operátora akkor és csak akkor skaláris-szorzattartó, - ez azt jelenti, hogy $(T\underline{x}\,|\,T\underline{y}) = (\underline{x}\,|\,\underline{y})$ $\forall\,\underline{x},\ \underline{y} \in E_n$-re - ha unitér.

Bizonyitás:

1. Ha T unitér, vagyis $T^* = T^{-1}$, akkor

$$(T\,\underline{x}\,|\,T\,\underline{y}) = (\underline{x}|T^*\,T\,\underline{y}) = (\underline{x}|\underline{y})\,.$$

2. Ha $(\underline{x}|\underline{y}) = (T\,\underline{x}\,|\,T\,\underline{y})$, akkor

$$(\underline{x}\,|\,\underline{y}) = (\underline{x}\,|\,T^*\,T\,\underline{y}),\qquad \text{vagyis}$$

$$(\underline{x}|T^*\,T\,\underline{y} - \underline{y}) = (\underline{x}|(T^*\,T - E)\,\underline{y}) = 0\,.$$

Mivel ez $\forall\,\underline{x},\ \underline{y} \in E_n$-re fennáll,

$$T^*\,T = E\,. \ ∎$$

Megjegyzés:

A Tétel következménye, hogy unitér operátor ortogonális vektorokat ortogonális vektorokba visz át, és

$(T\,\underline{x}\,|\,T\,\underline{x}) = (\underline{x}\,|\,\underline{x})$ miatt a tárgyvektor

és a képvektor normája is azonos.

Igy a transzformáció ortonormált bázist ortonormált bázisba visz át.

5.12. Definició

Az olyan T_1, T_2 lineáris operátorokat, amelyekre

$$T_1\,T_2 = T_2\,T_1$$

felcserélhető lineáris operátoroknak nevezzük.

A felcserélhető operátorok fontos tulajdonságáról szól az

5.13. Tétel

Ha T_1 és T_2 felcserélhető lineáris operátorok, akkor az egyik valamelyik sajátértékéhez tartozó sajátvektorok invariáns alteret alkotnak a másik operátorra vonatkozóan.

Bizonyitás:

Azt kell belátni, hogy ha

$\underline{s}$ T_1 λ-hoz tartozó sajátvektora,

akkor $T_2\,\underline{s}$ is T_1 λ-hoz tartozó sajátvektora. Ez igaz, ugyanis ha

$T_1\,\underline{s} = \lambda\,\underline{s}$, akkor

$T_1(T_2\,\underline{s}) = T_2(T_1\,\underline{s}) = T_2\lambda\,\underline{s} = \lambda T_2\,\underline{s}$, vagyis

$T_1(T_2\,\underline{s}) = \lambda T_2\,\underline{s}$, mint állitottuk. ∎

A bizonyitott tétel következménye az

5.14. Tétel

Két felcserélhető lineáris operátornak van közös sajátvektora.

Bizonyitás:

Legyen λ T_1 sajátértéke. Az 5.13. Tétel szerint T_1 λ-hoz tartozó sajátvektorai T_2-re vonatkozóan invariáns alteret alkotnak. Mint tudjuk, invariáns altérben mindig van sajátvektor. Igy T_1 λ-hoz tartozó sajátvektorainak alterében van T_2-nek sajátvektora, tehát találtunk közös sajátvektort. ∎

5.15. Definició

Az E_n euklideszi tér T lineáris operátorát normális operátornak nevezzük, ha

$$T\,T^* = T^*\,T.$$

Megjegyzés:

Nyilvánvaló, hogy az önadjungált operátorok és az unitér operátorok is normálisak, ezért a következő tétel ezek sajátvektorrendszeréről is szól.

5.16. Tétel

Az E_n euklideszi tér T lineáris operátora akkor és csak akkor jellemezhető valamely ortonormált bázisban diagonálmátrixszal, ha normális.

Bizonyitás:

1. Ha T-t az $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ ortonormált bázisban diagonál mátrix adja meg, vagyis

$$\underline{\underline{T}}_e = \langle \lambda_1,\dots,\lambda_n \rangle, \quad \text{akkor}$$

$$\underline{\underline{T}}^*_e = \langle \bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n \rangle \quad \text{és igy}$$

a mátrixok és akkor az operátorok is felcserélhetők, tehát

$$T\,T^* = T^*\,T$$

2. Ha T normális operátor, vagyis T és T^* felcserélhetők, akkor az 5.14. Tétel értelmében van közös $\underline{s}_1$ sajátvektoruk. Tekintsük az $\underline{s}_1$-re merőleges vektorok E_{n-1} (n-1 dimenziós) alterét. Ez

invariáns T-re és T^*-ra vonatkozóan is ugyanis ha $\underline{x} \in E_{n-1}$, akkor $(\underline{s}_1 | \underline{x}) = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 \underline{s}_1 | \underline{x}) = 0 \Longrightarrow (T \underline{s}_1 | \underline{x}) = 0 \Longrightarrow (\underline{s}_1 | T \underline{x}) = 0$, tehát $T \underline{x}$ is merőleges $\underline{s}_1$-re. Azonos következtetéssel adódik abból, hogy s_1 T^*-nak is sajátvektora, hogy

$$(\underline{s}_1 | T^* \underline{x}) = 0 \quad \text{is fennáll.}$$

Igy E_{n-1}-ben is van T és T^*-nak közös $\underline{s}_2$ sajátvektora és $(\underline{s}_1 | \underline{s}_2) = 0$. Ezt az eljárást folytatva készitettünk egy páronként ortogonális vektorokból álló $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n$ sajátvektor bázist mind T, mind T^* számára, amelyben mindkettő mátrixa diagonálmátrix. ∎

6. KITŰZÖTT FELADATOK

1. Mutassa meg, hogy ha a $P : U \longrightarrow U$ homogén lineáris transzformáció a következő tulajdonságu:

$$P^2 = P$$ (az ilyen transzformációt projekciónak szokták nevezni), akkor

$$U = \ker P \oplus \operatorname{Im} P.$$

2. Határozza meg az I intervallumon akárhányszor differenciálható függvények vektorterén értelmezett D differenciáloperátor magterét.

$$Df = f + f'$$

3. Bizonyitsa be, hogy ha T homogén lineáris transzformáció és

$$T^2 = 0, \quad \text{akkor a}$$

képtér része a magtérnek.

Igaz-e a tétel megforditása?

4. Igazolja a 2.4. Tételben szereplő operátormüveleti azonosságokat.

5. A $T : U \longrightarrow V$ lineáris operátor inverze T^{-1}. Igazolja, hogy

$$(T^{-1})^{-1} = T.$$

6. Igazolja, hogy

$$(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$$

7. A T homogén lineáris transzformáció kielégiti a

$T^2 - T + E = 0$ egyenletet.

Mutassa meg, hogy T^{-1} létezik és határozza meg T segitségével.

8. A T lineáris operátor az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ bázisvektorokhoz a következő módon rendel képet:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Mutassa meg, hogy T szinguláris.
b) Adja meg T mátrixát a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ bázisban.

9. A T transzformáció mátrixa egy B bázisban

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Adja meg a Ker T alteret.

10. Legyen λ az A homogén lineáris transzformáció egy sajátértéke, $\underline{s}$ egy hozzá tartozó sajátvektor és P egy polinom. Igazolja, hogy $\underline{s}$ $P(A)$-nak is sajátvektora és határozza meg a sajátértékeket.

11.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Készitse el $\underline{\underline{A}}$ spektrálfelbontását.

12. Igazolja, hogy unitér transzformáció sajátértékeinek abszolut értéke 1.

13. Legyen T valós unitér transzformáció - un. ortogonális transzformáció. Igazolja, hogy ortonormált bázisban

$$\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}^{-1}$$

14. A valós E_n euklideszi tér T lineáris operátorát antiszimmetrikusnak nevezzük, ha

$$T^* = -T$$

Igazolja, hogy ortonormált bázisban

$$\underline{\underline{T}}' = -\underline{\underline{T}}$$

15. Legyen E_3 a térvektorok lineáris tere és $\underline{v} \in E_3$-ra

$$T\underline{v} = \underline{a} \times \underline{v} \qquad (\underline{a} \neq \underline{0}, \text{ adott})$$

Igazolja, hogy T antiszimmetrikus.

16. Mutassa meg, hogy minden

$$T : E_3 \longrightarrow E_3 \qquad (E_3 \text{ a 15. példabeli})$$

antiszimmetrikus operátorhoz egyértelmüen található $\underline{a}$, amellyel $T = \underline{a} \times$.

17. Bizonyitsa be, hogy a valós E_n euklideszi tér minden lineáris operátora egyértelmüen bontható fel egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus operátor összegére.

IX. AJÁNLOTT IRODALOM

Gelfand I.M. Előadások a lineáris algebráról. Akadémiai Kiadó, 1955.

Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai. Müszaki Kiadó, 1974.

Fried Ervin: Klasszikus és lineáris algebra. Tankönyvkiadó, 1977.

X. TÁRGYMUTATÓ

TARTALOMJEGYZÉK

Kedves Jegyzethasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V_2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **ALGEBRA**

A jegyzet szerzője: **Csató Tamásné**

A jegyzet azonosítója: **051359**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75 %):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:
(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(a túloldalon folytatható)