Kiegészítés 1.

Chvátal tétele:

1) Ha egy n csúcsú G gráf $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ fokszámaira igaz, hogy amennyiben $d_k \le k < \frac{n}{2}$ akkor $d_{n-k} \ge n-k$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

2) Ha a $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ pozitív egészekre a fenti feltétel nem teljesül, akkor van olyan Hamilton-kört nem tartalmazó gráf melynek $d'_1 \le d'_2 \le \ldots \le d'_n$ fokszámaira $\forall i$ $d'_i \ge d_i$.

Bizonyítás:

Az 1) állítás bizonyítása:

A bizonyítás az Ore-tétel bizonyításával azonosan indul: tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis létezik olyan G' gráf, aminek fokszámai teljesítik a feltételt és mégsincs Hamilton-köre. Tekintsünk egy ilyen G'-t, és adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg ez megtehető Hamilton-kör létrehozása nélkül. Az így kapott gráf legyen G. G továbbra is ellenpélda, hiszen nincs Hamilton-köre, a feltétel teljesülését pedig nem ronthattuk el az új élek hozzáadásával, hiszen attól a fokszámok csak nőttek.

Az Ore-tétel bizonyításakor elmondottak szerint:

- G bármely két összekötelen csúcsa között megy Hamilton-út, hiszen az említett két csúcs összekötésével csak így keletkezhet Hamilton-kör;

- Bármely két összekötetlen x és y csúcs $d(x)$ és $d(y)$ fokszámaira $d(x)+d(y) \le n-1$. (Ezt az Ore-tételnél indokoltuk: az x és y közötti Hamilton-úton x szomszédait megelőző pontok nem lehetnek szomszédai y-nak [máskülönben lenne Hamilton-kör], amiből $d(y) \le n-1-d(x)$, ami a mondottal ekvivalens.)

Most jön az, ami új az Ore-tétel bizonyításához képest: válasszuk x-et és y-t úgy, hogy $d(x)+d(y)$ a lehető legnagyobb legyen rájuk az összes összkötetlen csúcspár között. Tegyük fel még, hogy $d(x) \le d(y)$. Az előbbiek szerint, ebből következik, hogy $d(x) \le \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$.

Jelöljük $d(x)$-et h-val. Megmutatjuk, hogy h-ra $d_h \le h < \frac{n}{2}$. Ebből a második egyenlőtlenséget az előbb láttuk, tehát az elsőt kell csak bizonyítanunk. Ez avval ekvivalens, hogy G-nek van legalább h olyan csúcsa, aminek a fokszáma legfeljebb h (ekkor tehát a h-adik legkisebb fok nem lehet h-nál több, $d_h \le h$ pedig éppen ezt jelenti). Tekintsük x minden szomszédjához az x és y közötti Hamilton-út mentén őt megelőzőt. Már az Ore-tétel bizonyításánál láttuk, hogy ezek egyike sem lehet összekötve y-nal (mert lenne Hamilton-kör). Eszerint ezen összesen éppen h csúcs mindegyike választható lett volna y párjául a tekintett Hamilton-út kezdőpontjának, s ha bármelyiknek a fokszáma nagyobb volna x-énél, akkor $d(x) + d(y)$ maximalizálásához valóban inkább ezt a csúcsot kellett volna választanunk. Mivel x-et választottuk, biztos, hogy ezen h darab csúcs egyikének sem nagyobb a foka x fokszámánal, vagyis h-nál. Tehát tényleg van legalább h darab h-nál nem nagyobb fokszámú csúcs, vagyis $d_h \le h$.

A feltételben szereplő k helyébe h-t írva a fentiekből azt kapjuk, hogy $d_{n-h} \ge n-h$. Utóbbi pontosan azt jelenti, hogy legalább $h+1$ csúcs fokszáma legalább $n-h$. Mivel x-nek h szomszédja van, az előbbi $h+1$ csúcs között biztosan van olyan, amelyik nincs összekötve

x-szel. Ezennel találtunk tehát két összekötetlen csúcsot, melyek fokszámösszege legalább $h + n - h = n$, ami ellentmond az Ore-tétel bizonyításánál elmondottaknak (vagy ha úgy tetszik: x és y választásának).

Ellentmondásra jutottunk, ezzel bebizonyítottuk az 1) állítást.

A 2) állítás bizonyítása:

Tegyük fel, hogy az 1)-ben szereplő feltétel nem teljesül valamely $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ számokra. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $k < \frac{n}{2}$, amire egyrészt $d_k \le k$, másrészt $d_{n-k} < n - k$. Ebből következően $d_1 \le \ldots \le d_k \le k, d_{k+1} \le \ldots \le d_{n-k} \le n - k - 1$, és értelemszerűen $d_{n-k+1} \le \ldots \le d_n \le n - 1$. Vagyis a

$$d'_1 = \ldots = d'_k = k, d'_{k+1} = \ldots = d'_{n-k} = n - k - 1, d'_{n-k+1} = \ldots = d'_n = n - 1$$

sorozatra teljesül, hogy $\forall i \; d'_i \ge d_i$. Ha tehát mutatunk egy olyan gráfot, aminek fokszámai $d'_1 \le d'_2 \le \ldots \le d'_n$, és nincsen Hamilton-köre, akkor készen vagyunk.

A következő G gráf éppen ilyen. Az n-elemű csúcshalmazt osszuk fel három részre, A-ra, B-re és C-re, ahol $|A| = |B| = k$ és $|C| = n - 2k$. A $B \cup C$ részbe eső csúcsok mindegyikét kössük össze mindegyik (ugyane $B \cup C$-be eső) másikkal, továbbá kössük össze valamennyi A-beli csúcsot valamennyi B-belivel. Több éle ne legyen a gráfnak. Ezzel a G gráfot teljesen megadtuk, könnyen ellenőrizhető, hogy fokszámai teljesítik a mondottakat: minden A-beli csúcs foka k, a C-belieké $n - k - 1$, a B-be esőké pedig $n - 1$. Annyit kell még megmutatnunk, hogy G-nek nincs Hamilton-köre. Ez abból látható, hogy a B-beli pontokat elhagyva a gráf $k + 1$ komponensre esik szét: az A-beli pontokból k izolált pont lesz, a $k+1$-edik komponens pedig a C-n megmaradó teljes gráf. (Fontos, hogy C biztosan nem üres halmaz, hiszen mérete $n - 2k$, ami a $k < \frac{n}{2}$ feltétel miatt biztosan pozitív.) G tehát nem teljesíti a Hamilton-kör létezéséhez szükséges tanult elemi feltételt, így valóban nem lehet Hamilton-köre. Ezzel a bizonyítást befejeztük.