A3 1. zh, 2012 ősz

1. Oldja meg az $y' = \frac{1}{2x-y}$ differenciál-egyenletet!

2. Oldja meg a $2x - y^2 + xyy' = 0$ differenciál-egyenletet!

3. Oldja meg az $y' + \frac{y}{x} = e^x$ $(x > 0)$ differenciál-egyenletet!

4. Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = 8x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdetiérték-problémát! ?

5. Oldja meg az

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 3y + 3t \\ y' &= -2x - y - 2t \end{aligned}$$

differenciál-egyenletrendszert.

6. Igazak-e az alábbi állítások ($\mathfrak{L}\{f\}$ jelöli az f függvényt Laplace-transzformáltját, $f * g$ az f és g konvolúcióját):
(a) Ha y megoldása egy homogén lineáris differenciál-egyenletnek, akkor cy is az $(c \in \mathbb{R})$.
(b) Ha y megoldása egy homogén lineáris differenciál-egyenletnek, akkor $y + c$ is az $(c \in \mathbb{R})$. ?
(c) $\mathfrak{L}\{fg\} = \mathfrak{L}\{f\}\mathfrak{L}\{g\}$.
(d) $\mathfrak{L}\{f * g\} = \mathfrak{L}\{f\}\mathfrak{L}\{g\}$
(e) Ha $\mathfrak{L}\{f\} = \mathfrak{L}\{g\}$, akkor $f = g$.

A3 1. zh, 2012 ősz

1. Oldja meg az $y' = \frac{1}{2x-y}$ differenciál-egyenletet!

MO. Lineáris argumentumú, szétválaszthatóra visszavezethető. 1p
$u := 2x - y \rightsquigarrow u' = 2 - y' = 2 - \frac{1}{u}$ szétválasztható. $\frac{du}{dx} = 2 - \frac{1}{u} \rightsquigarrow \int \frac{1}{2-\frac{1}{u}}\, du = \int 1\, dx$,
integrálás után $\frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}\ln|2u-1|) = x + c$. 6p
Visszahelyettesítve: $\frac{-y}{2} + \frac{1}{4}\ln|4x - 2y - 1| = c$ és ennek megoldásai az eredeti egyenlet megoldásai. 3p

10p

2. Oldja meg a $2x - y^2 + xyy' = 0$ $(x > 0)$ differenciál-egyenletet!

MO. $(2x - y^2)_y = -2y$, $(xy)_x = y$, tehát nem egzakt, de $\frac{(2x-y^2)_y - (xy)_x}{xy} = \frac{-3}{x}$, így $e^{\int -3/x} = \frac{1}{x^3}$-el végigszorozva a $2x^{-2} - y^2x^{-3} + x^{-2}yy' = 0$ egzakt egyenletet kapjuk. 4p

$$u = \int 2x^{-2} - y^2x^{-3}\, dx = \frac{-2}{x} + \frac{y^2}{2x^2} + c(y)$$
$$\rightsquigarrow \frac{y}{x^2} = u_y = \frac{y}{x^2} + c'(y) \rightsquigarrow c'(y) = 0 \rightsquigarrow c(y) = c$$

4p

tehát $u = \frac{-2}{x} + \frac{y^2}{2x^2} + c$, vagyis $\frac{-2}{x} + \frac{y^2}{2x^2} = c$ megoldásai az általános megoldás. 2p

10p

3. Oldja meg az $y' + \frac{y}{x} = e^x$ $(x > 0)$ differenciál-egyenletet!

MO. (1) Homogén. $y' = -\frac{y}{x}$ szétválasztható:

$$\int \frac{y'}{y}\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx \rightsquigarrow \ln|y| = c_1 + \ln\frac{1}{x} \rightsquigarrow |y| = e^{c_1}\frac{1}{x}$$

amiből y folytonossága és a Bolzano-tétel miatt $y_{ha} = \frac{c}{x}$. 4p
(2) Inhomogén (állandók variálásával). $y = \frac{c(x)}{x}$-et visszahelyettesítve $c'(x) = xe^x \rightsquigarrow c(x) = (x-1)e^x$, azaz $y_{ip} = (1 - \frac{1}{x})e^x$ jó, és így $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = \frac{c}{x} + (1 - \frac{1}{x})e^x$. 6p

10p

4. Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = 8x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdetiérték-problémát!

MO. (1) Homogén. Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Megoldásai: $\lambda = -2$ kétszeres gyök. A homogén egyenlet általános megoldása: $y_{ha} = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$. 3p

(2) Inhomogén partikuláris megoldása: $8x = e^{0x}(8x\cos 0x + 0\sin 0x)$ és 0 a karakterisztikus egyenletnek nem gyöke, ezért y-t $ux + v$ alakban keressük. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe $8x = 4u + 4ux + 4v$, tehát $u = 2$, $v = -u = -2$, azaz $y_{ip} = 2x - 2$, és $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + 2x - 2$. 5p
(3) Kezdetiérték-feltétel: $y = y_{ia}$-ra $y' = -e^{-2x}(2c_1 - c_2 - 2c_2x) + 2$ miatt a $0 = y(0) = c_1 - 2$, $-1 = y'(0) = -(2c_1 - c_2) + 2$ egyenletrendszert kell megoldani. $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása: $y = (2 + x)e^{-2x} + 2x - 2$. 2p

Vagy: Laplace-transzformációval. 10p

$$\frac{8}{s^2} = \mathfrak{L}\{y''\} + 4\mathfrak{L}\{y'\} + 4\mathfrak{L}\{y\} = Y(s^2+4s+4) - 1$$

$$Y = \frac{8-s^2}{s^2(s+2)^2} = \frac{-2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

Visszatranszformálva: $y = \mathfrak{L}^{-1}\{Y\} = (2+x)e^{-2x} + 2x - 2$.

5. Oldja meg az

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 3y + 3t \\ y' &= -2x - y - 2t \end{aligned}$$

differenciál-egyenletrendszert.

MO. (1) Homogén. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ sajátértékei és egy-egy hozzájuk tartozó saját-vektor: $\lambda = 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\lambda = 2$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tehát $\Psi = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{2t} \\ -e^t & -2e^{2t} \end{pmatrix}$ oszlopvektorai alaprendszer, azaz a homogén általános megoldása $\Psi\mathbf{c}$.

(2) Inhomogén. Egy partikuláris megoldás $\Psi\mathbf{c}(t)$, ahol $\Psi\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \end{pmatrix}$; utóbbi egyenletrendszer megoldása: $c_1'(t) = 0$, $c_2' = e^{-2t}t$, amiből $c_1(t) = k$ és $c_2(t) = -e^{-2t}(t/2+1/4)$, tehát $x_{ip} = ke^t - 3t/2 - 3/4$ és $y_{ip} = -ke^t + t + 1/2$, következésképp $x_{ia} = x_{ha} + x_{ip} = (c_1+k)e^t + 3c_2e^{2t} - 3t/2 - 3/4$, $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = -(c_1+k)e^t - 2c_2e^{2t} + t + 1/2$, azaz, mivel c_1 tetszőleges,

$$\begin{aligned} x_{ia} &= c_1e^t + 3c_2e^{2t} - 3t/2 - 3/4 \\ y_{ia} &= -c_1e^t - 2c_2e^{2t} + t + 1/2. \end{aligned}$$

6. Igazak-e az alábbi állítások ($\mathfrak{L}\{f\}$ jelöli az f függvényt Laplace-transzformáltját, $f * g$ az f és g konvolúcióját):

(a) Ha y megoldása egy homogén lineáris differenciál-egyenletnek, akkor cy is az ($c \in \mathbb{R}$).

(b) Ha y megoldása egy homogén lineáris differenciál-egyenletnek, akkor $y + c$ is az ($c \in \mathbb{R}$).

(c) $\mathfrak{L}\{fg\} = \mathfrak{L}\{f\}\mathfrak{L}\{g\}$.

(d) $\mathfrak{L}\{f * g\} = \mathfrak{L}\{f\}\mathfrak{L}\{g\}$

(e) Ha $\mathfrak{L}\{f\} = \mathfrak{L}\{g\}$, akkor $f = g$.

MO. (a) Igen, a megoldások alteret alkotnak.

(b) Nem, pl. e^t megoldása $y' = y$-nak de $e^t + 1$ nem.

(c) Nem, pl. ha $f(t) = t = g(t)$, akkor $\mathfrak{L}\{fg\} = 2/s^3 \neq 1/s^4 = \mathfrak{L}\{f\}\mathfrak{L}\{g\}$.

(d) Igen, tétel volt.