Alkalmazott algebra

Ivanyos Gábor

2010. október 21.

1. Alapok

1.1. Testek

1.1.1. Definíció

Informálisan:. Egy test egy négy alapművelettel $(+, -, \cdot, /)$ ellátott halmaz, amelyen a racionális számokon megszokott azonosságok teljesülnek.

Formálisan:. Egy test egy $\mathbb{F}$ halmaz két művelettel és két (különböző) kitüntetett elemmel: $+, \cdot$ illetve $0, 1$, amelyekre

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})$ – mindkét művelet *asszociatív*

(2) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ $(\forall x, y \in \mathbb{F})$ – mindkét művelet *kommutatív*

(3) $0 + x = x$, $0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x$ $(\forall x \in \mathbb{F})$ – 0 *neutrális elem* 1 *egységelem*

(4) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{F})$ – *disztributivitás*

(5) $\forall x \in \mathbb{F}$-re van $(-x) \in \mathbb{F}$, hogy $x + (-x) = 0$,
$\forall 0 \neq x \in \mathbb{F}$-re van $x^{-1} \in \mathbb{F}$, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$,
– $+$-ra minden, $\cdot$-ra minden nem-nulla elemnek van inverze

Kivonás, osztás:. Belátható, hogy $-x$ és x^{-1} egyértelmű. $x - y := x + (-y)$ és $x/y := x \cdot y^{-1}$.

Megjegyzés:. Ezekből tényleg levezethető minden, a racionális számokra érvényes azonosság ($G_1 = G_2$ alakú, ahol G_1 és G_2 az alapműveletek és a $0, 1$ konstansok segítségével felépített kifejezés.) Pl. a mások oldali disztributivitás levezethető az eredetiből a szorzás kommutativitása segítségével: $z \cdot (x+y) = (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) = (z \cdot x) + (z \cdot y)$.

Konvenció:. Zárójelek elhagyása, műveletek kötési sorrendje, $\cdot$ elhagyása a szokásos módon

1.1.2. Példák

- $\mathbb{Q}$ racionális számok
- $\mathbb{R}$ valós számok
- $\mathbb{C}$ komplex számok
- $\mathbb{Z}_p$ vagy $\mathbb{F}_p$: egész számok modulo p prím
  $\mathbb{Z}_2$ másképpen: $\{1 =$ "igaz", $0 =$ "hamis"$\}$ $+ =$ "kizáró vagy", $\cdot =$ "és".
- $\mathbb{F}_q$, q elemű test, ahol $q = p^r$ (p prím). Lényegében (ún. izomorfia erejéig) egyértelmű.

1.1.3. Polinomok

n-ed fokú egyváltozós polinom:. $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_i \in \mathbb{F},\ a_n \neq 0)$.

Áll. (gyöktényező kiemelése):. $a \in \mathbb{F}$, $f(a) = 0$ esetén létezik egy eggyel alacsonyabb fokú $g(x)$ polinom, hogy $f(x) = (x - a)g(x)$
Biz.: Az egészekhez hasonló maradékos osztással $f(x) = (x-a)g(x)+c$, ahol $c \in \mathbb{F}$. Ebből $0 = f(a) = (a-a)g(a)+c = c$.

Köv.:. Egy n-ed fokú polinomnak legfeljebb n gyöke van.
Biz.: A fokszám szerinti indukcióval. Elsőfokúra nyilván igaz. Ha $n > 1$ és α egy gyöke $f(x)$-nek, akkor $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ az előző állítás értelmében. Ha $\beta \neq \alpha$ és $g(\beta) \neq 0$ akkor $f(\beta) = (\beta-\alpha)g(\beta) \neq 0$, így $f(x)$ összes α-tól különböző gyöke $g(x)$-nek is gyöke, amelyből legfeljebb $n-1$ van az indukciós feltevés szerint.

Algebra alaptétele. Minden komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben (multiplicitással számolva összesen fokszámnyi)

1.2. Vektorterek

1.2.1. Definíció, példák

Vektortér $\mathbb{F}$ felett:. Egy olyan V halmaz egy $+ : V \times V \to V$ (*összeadás*) művelettel, egy kitüntetett 0 elemmel, továbbá egy $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ (skalárokkal való *szorzás*) művelettel, amelyekre:

- $+$ kommutatív és asszociatív, 0 neutrális elemmel,
- $\cdot$ asszociatív: $(x \cdot y) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$ $(x, y \in \mathbb{F}, v \in V)$
- $\cdot$ mindkét oldalról disztributív: $(x+y) \cdot (u+v) = x \cdot u + y \cdot u + x \cdot v + y \cdot v$ $(x, y \in \mathbb{F}, u, v \in V)$
- felcserélhető az $\mathbb{F}$–beli szorzással: $(xy)v = x(yv)$ ($\sim$ asszociativitás)

Megjegyzés:. Additív inverz V-ben: $-v := (-1) \cdot v$.

Példák:.

- S halmaz, $S \to \mathbb{F}$ függvények; értékek szerinti összeadással és beszorzással.
  $\sim S$ elemeivel indexelt táblázatok, $\mathbb{F}$–beli elemekkel kitöltve.
- Spec. eset: $n \times m$-es mátrixok $\mathbb{F}$–beli elemekkel. Műveletek elemenként.
- Speciális eset: $m = 1$, n hosszú **oszlopvektorok.**
- Polinomok. (Összeadás, beszorzás érték szerint ugyanazt adják, mintha az együtthatókon külön-külön hajtanánk végre.)
- n-nél alacsonyabb fokú polinomok.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ az $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ felett.

1.2.2. Alterek, bázis, dimenzió

Lineáris kombináció:. $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ alakú kifejezés, ahol $0 \neq v_i$ és $v_i \neq v_j$ ha $i \neq j$. Mindig véges számú tagból álló összeget tekintünk! Az üres összeg is lineáris kombináció, értéke 0.

Altér:. $U \subseteq V$ altere V-nek (jel. $U \leq V$), ha $0 \in U$ is zárt a műveletekre: $u, v \in U, \alpha \in \mathbb{F}$ esetén $u+v, \alpha u \in U$. Ekvivalens feltétel: U zárt a lineáris kombinációkra is. Tartalmazásra nézve $\{0\} = (0)$ (vagy kissé hanyag módon: 0) a legszűkebb, V a legtágabb altere V-nek.

Példák:.

- origón átmenő síkok, egyenesek $\mathbb{R}^3$-ben
- polinomok, folytonos függvények, stb. altere a függvények terében
- homogén lineáris n-változós egyenletrendszerek megoldásai $\mathbb{R}^n$-ben
- Spec. eset: hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: egy nem-triviális n változós homogén lineáris egyenlet megoldásai

Generált (kifeszített) altér:. $S \subseteq V$ által generált altér $\langle S \rangle$ az a legszűkebb altér, amely tartalmazza S-t.

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in V \right\}.$$

$\langle \emptyset \rangle = \{0\}$, $\langle v \rangle = \langle \{v\} \rangle = \{\alpha v | \alpha \in \mathbb{F}\}$.

Példák.

- polinomok között az $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ monomok az n-nél alacsonyabb fokú polinomok alterét generálják
- (Feladat) Mely alteret feszítik ki a következő polinomok: x^3+x^2+x, x^3+2x^2+3x, x^3+x, x^3+3x^2?

Lineáris függetlenség:. $S \subseteq V$ lineárisan független, ha $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, α_i, v_i $(i = 1, \ldots n)$ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ esetén az összes $\alpha_i = 0$. Ha S nem lineárisan független, akkor lineárisan összefüggő. Az $\emptyset$ lineárisan független, $\{0\}$ lineárisan összefüggő Világos, hogy lineárisan független halmazok részhalmazai is lineárisan függetlenek.

Áll.:. Ha S lineárisan független, de $S \cup \{v\}$ lineárisan összefüggő, akkor v (egyértelműen) előáll S–beli elemek lineáris kombinációjaként.

Példák:.

- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ lineárisan függetlenek:

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha+\beta\\ \alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix}.$$

- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ lineárisan összefüggenek:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0.$$

Kapcsolat a generált alterekkel:. $S \subseteq V$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha tetszőleges $S_1 \subsetneq S$ esetén $\langle S_1 \rangle \lneq \langle S \rangle$ ($\Leftrightarrow$ tetszőleges $v \in S$ esetén $v \notin \langle S \setminus \{v\} \rangle$). Más szavakkal S akkor és csak akkor lineárisan független, ha S egy minimális generátorrendszere az $\langle S \rangle$ altérnek.

- (Feladat) Lineárisan függetlenek-e a következő polinomok: x^3+x^2+x, x^3+2x^2+3x, x^3+x, x^3+3x^2?

Bázis:. Olyan lineárisan független rendszer, amely generálja V-t. Ekvivalens jellemzések: minimális generátorrendszere V-nak, maximális lineárisan független rendszer V-ben, minden v–beli elem **egyértelműen felírható** a rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. Általában sorba rendezzük a bázis elemeit, és a másképp bázist az eredetitől különbözőnek tekintünk (hiába ugyanaz, mint halmaz).

Példák:.

- standard bázis $\mathbb{F}^n$-ben $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$
- polinomok közt $1, x, x^2, \ldots$

Áll.:. B_1, B_2 bázis V-ben $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$.

Biz.:. Először a következő kicserélési tulajdonságot látjuk be: tetszőleges $v \in B_1$-hez létezik olyan $v' \in B_2$, amelyre $(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$ is bázis V-ben. Ugyanis mivel $B_1 \setminus \{v\}$ nem generálja V-t, van olyan $v' \in B_2$ elem, amely nem áll elő $B_1 \setminus \{v\}$–beli vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor $(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$ lineárisan független. Ahhoz, hogy $\langle (B_1 \setminus \{v\}) \cup \{v'\} \rangle = V$, elég belátni, hogy v' előáll $(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$–beli elemek lineáris kombinációjaként. Tudjuk, hogy $v' = \alpha v + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, ahol $\alpha_i \in \mathbb{F}$ és $v_i \in B_1 \setminus \{v\}$. A v'-re vonatkozó feltevés miatt $\alpha \neq 0$ és így $v = \frac{1}{\alpha} v' - \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\alpha} v_i$. Ezzel igazoltuk a kicserélési tulajdonságot.

Tegyük fel, hogy B_1 véges. Ekkor legfeljebb $|B_1|$ lépésben alkalmazva a kicserélési tulajdonságot egy olyan B_1' bázist nyerhetünk, amely ugyanakkora, mint B_1 és összes eleme B_2-ből van. Ez csak úgy lehet, hogy $B_1' = B_2$. Szimmetrikusan kezelhető az az eset, amikor B_2 véges.

Tegyük végül fel, hogy B_1 is és B_2 is végtelen. Minden B_1–beli v vektor egyértelműen felírható $\sum_{i=1}^{m_v} \alpha_{v,i} w_{v,i}$ alakban, ahol $m_v > 0$ egész, $0 \neq \alpha_{v,i} \in \mathbb{F}$ és $w_{v,i} \in B_2$ $(i = 1, \ldots, m_v)$. Legyen $i > m_v$-re $w_{v,i} := w_{v,m_v}$. Ekkor a $(v, i) \mapsto w_{v,m_v}$ egy $\mathbb{Z}_{>0} \times B_1 \to B_2$ függvény, ami szürjektív, hiszen a képben előforduló vektorok generálják V-t. Tehát $|\mathbb{Z}_{>0} \times B_1| \geq |B_2|$. Mivel B_1 végtelen, $|\mathbb{Z}_{>0} \times B_1| \geq |B_1|$, így $|B_1| \geq |B_2|$. A $B_1| \leq |B_2|$ egyenlőtlenség szimmetrikus érveléssel igazolható.

Dimenzió:. $\dim V$, pontosabban $\dim_{\mathbb{F}} V = V$ tetszőleges bázisának számossága (elemszáma).

Példák:.

- ha S véges, akkor $\dim\{S \to \mathbb{F} \text{ függvények}\} = |S|$
- spec. eset: $\dim\{n \times m\text{-es mátrixok}\} = nm$
- $\dim\{\text{polinomok}\} = \infty$ (megszámlálható)
- $\dim\{n\text{-nél alacsonyabb fokú polinomok}\} = n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$ (kontinuum)
- Ha $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, akkor $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

Megállapodás. Ezentúl – hacsak kifejezetten nem jelezzük az ellenkezőjét – **csak véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk**.

1.3. Lineáris leképezések

1.3.1. Definíció, példák

Lineáris leképezés:. V, W vektorterek F felett. Egy $\phi : V \to W$ leképezés lineáris, ha $\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \phi(v_1) + \alpha_2 \phi(v_2)$. Továbbiakban elhagyjuk a zárójelet: $\phi v := \phi(v)$.

Fontos példa:. A $m \times n$-es mátrix $\mathbb{F}$–beli elemekkel. $\phi_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$: $\phi_A v := Av$.

Vektortér-műveletek leképezésekkel:. $\phi, \phi' : U \to W, \alpha \in \mathbb{F}$-re $(\alpha\phi + \phi')v := \alpha(\phi v) + (\phi' v)$. Ezekkel az $U \to V$ lineáris leképezések vektorteret alkotnak.

Kiterjesztés bázisról:. Legyen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ egy bázis V-ban és legyenek $w_1, \ldots, w_n$ W–beli vektorok. Ekkor $\exists! \phi : V \to W$ lineáris leképezés, amelyre $\phi v_i = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\phi \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i.$$

Köv.:. Az $V \to W$ lineáris leképezések terének dimenziója $\dim V \cdot \dim W$.

Speciális esetek:.
Lineáris függvény: $V \to \mathbb{F}$ lineáris leképezés.
Lineáris transzformáció: $V \to V$ lineáris leképezés.

Példák:.

- Adott $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektor.
  - A $v \mapsto u^T v$ egy lineáris függvény $\mathbb{R}^n$-en.
  - A $v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ egy lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-en: az u-ra merőleges hipersíkra történő vetítés.
  - A $v \mapsto v - 2\frac{u^T v}{u^T u} u$ pedig az u-ra merőleges hipersíkra való tükrözés
- Az $I_V : v \mapsto v$ a V tér identikus lineáris transzformációja.
- Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor az $f(x) \mapsto f(a)$ egy $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ lineáris függvény.

1.3.2. Képtér, magtér, dimenziótétel

Képtér:. $\phi : V \to W$ lineáris leképezés képtere a

$$\phi V = \{\phi v | v \in V\}$$

halmaz. (Szokásos még az $\operatorname{Im}\phi$ jelölés is.) Könnyen ellenőrizhető, hogy ϕV altér W-ben. A ϕ leképezés *szürjektív*, ha $\phi V = W$

Magtér:. $\phi : V \to W$ lineáris leképezés magja vagy magtere a

$$\ker\phi = \{v \in V | \phi v = 0\}$$

halmaz. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egy altér V-ben. A ϕ leképezés *injektív*, ha $\phi(v_1) = \phi(v_1)$ csak $v_1 = v_2$ esetén teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy $\ker\phi = 0$.

Példa:. $u \in \mathbb{R}^n$, $\pi : v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ vetítés. $\ker\pi = \mathbb{R}u$, $\pi\mathbb{R}^n = u^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | u^T v = 0\}$.

Izomorfizmus:. A $\phi : V \to W$ lineáris leképezés izomorfizmus V és W között, ha ϕ bijektív, azaz egyszerre injektív és szürjektív. Ekkor a $\phi^{-1} : W \to V$ **inverz** leképezés is lineáris izomorfizmus. Két vektortér izomorf, ha létezik közöttük izomorfizmus. Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha egyenlő a dimenziójuk.

Dimenziótétel:. Legyen $\phi : V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor $\dim\phi V = \dim V - \dim\ker\phi$.
Biz.: Legyen $d = \dim\ker\phi$ és legyen $v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_{d+\ell}$ egy olyan bázisa V-nek, hogy $v_1, \ldots, v_d$ bázisa $\ker\phi$-nek. Ha $v = \sum_{i=1}^{d+\ell} \alpha_i v_i$. Ekkor $\phi v = \sum_{i=1}^{d+\ell} \alpha_i \phi v_i = \sum_{i=d+1}^{d+\ell} \alpha_i \phi v_i$, így a $\phi v_{d+1}, \ldots, \phi v_{d+\ell}$ vektorok kifeszítik a ϕV képteret. Belátjuk, hogy ezek a vektorok egyben lineárisan függetlenek is. Evégett tegyük fel, hogy a $\sum_{i=d+1}^{d+\ell} \gamma_i \phi v_i$ lineáris kombináció 0, vagyis $\phi \sum_{i=d+1}^{d+\ell} \gamma_i v_i = 0$, azaz $\sum_{i=d+1}^{d+\ell} \gamma_i v_i \in \ker\phi$, akkor, mivel a $v_1, \ldots, v_d$ a $\ker\phi$ magtér egy bázisa, léteznek olyan $\beta_1, \ldots, \beta_d \in \mathbb{F}$ skalárok, hogy $\sum_{j=1}^{d} \beta_j v_j = \sum_{i=d+1}^{d+\ell} \gamma_i v_i$. A $v_1, \ldots, v_{d+\ell}$ vektorok lineáris függetlensége miatt az csak úgy lehet, hogy az $\beta_1 = \ldots = \beta_d = \gamma_{d+1} = \ldots = \gamma_{d+\ell} = 0$. Tehát a $\phi v_{d+1}, \ldots, \phi v_{d+\ell}$ vektorok a ϕV képtér egy bázisát alkotják, ezért $\dim\phi V = \ell = \dim V - \dim\ker\phi$.
A dimenziótételből adódik:

Egy egyszerű izomorfizmus-kritérium:. Legyen $\phi : V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor ϕ akkor és csak akkor izomorfizmus, ha $\ker\phi = (0)$ és $\dim V = \dim W$.

Alkalmazás (Lagrange-interpoláció):. Legyen V az n-nél alacsonyabb fokú $\mathbb{F}$ feletti polinomok tere, és legyenek $a_1, \ldots, a_n$ páronként különböző $\mathbb{F}$–beli elemek. Legyen $\phi : V \to \mathbb{F}^n$ az

$$f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$$

leképezés. A ϕ leképezés lineáris, hiszen a kép minden koordinátájában lineáris. A mag:

$$\ker\phi = \{f(x) | \deg f(x) < n, f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 0)\} = \{0\},$$

hiszen csak a 0 az az n-nél alacsonyabb fokú polinom, amelynek lehet n különböző gyöke. A dimenziótétel miatt $\phi V = \mathbb{F}^n$, tehát ϕ izomorfizmus és így létezik inverze. A $\phi^{-1} : \mathbb{F}^n \to V$ leképezés adott $b_1, \ldots, b_n$ értékekhez azt az egyértelműen meghatározott n-nél alacsonyabb fokú $f(x)$ polinomot rendeli, amelyre $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n$.

Megjegyzés. A behelyettesítés-interpoláció páros speciális esetként tartalmazza a népszerű diszkrét Fourier transzformációt (DFT, ld. később). Ha $n + d$ pontot helyettesítünk be, az $f(x)$ n-nél alacsonyabb fokú polinom meghatározható az $n + d$ hely közül bármely n helyen felvett érték segítségével. Ha $d/2$-nél kevesebb helyen elrontjuk a behelyettesített értéketeket, a polinom akkor is visszaállítható. Ezen az ötleten alapulnak az úgynevezett (általánosított) Reed-Solomon kódok.

1.3.3. Alkalmazás: a Shamir-féle titokmegosztási rendszer

A feladatban n résztvevő között szeretnénk egy titkot megosztani úgy, hogy közülük semelyik $n-1$-nek ne legyen semennyi információja se a titokról, együttesen viszont meg tudják fejteni.

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test, $|\mathbb{F}| > n$, a titok $\mathbb{F}$ egy eleme lesz. Előzetesen szétosztunk az n résztvevő között n különböző $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nem-nulla elemet az $\mathbb{F}$ testből. Tegyük fel, hogy a titok a $\beta \in \mathbb{F}$ elem. Választunk függetlenül és egyenletesen $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ véletlen elemet $\mathbb{F}$-ből. Legyen $f(x) = \beta + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x^i$. Az i-edik résztvevőnek az $f(\alpha_i)$ értéket küldjük el titkos csatornán.

Ekkor $f(x)$ egy n-nél alacsonyabb fokú polinom, így n helyen ismerve az értékét egyértelműen meg tudjuk határozni Lagrange-interpoláció segítségével. A β titok az $f(x)$ polinom konstans tagja, amit tehát az n résztvevő együtt ki tud találni.

Tegyük fel, hogy $n-1$ résztvevő találkozik, mondjuk az első $n-1$. Tekintsük a

$$\phi : \begin{pmatrix} \beta \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$$

behelyettesítő leképezést. A ϕ leképezés bijekció $\mathbb{F}^n$ és $\mathbb{F}^n$ között. (Két bijekció kompozíciója: az első az n-nél alacsonyabb polinomok azonosítása együttható-sorozatukkal, a második pedig a behelyettesítés-interpoláció páros.) Így rögzített β-ra a

$$\phi_\beta : \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$$

leképezés is bijekció $\mathbb{F}^{n-1}$ és $\mathbb{F}^{n-1}$ között, tehát – mivel a $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$ vektort egyenletesen választottuk $\mathbb{F}^{n-1}$-ből – az $\begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$ vektor egyenletes eloszlású $\mathbb{F}^{n-1}$-ben, β értékétől teljesen függetlenül. Azaz az $\begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$ vektor eloszlása minden β-ra ugyanaz. Más szavakkal $\begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}$ semmilyen statisztikai információt nem szolgáltat β-ról.

1.3.4. Lineáris leképezések kompozíciója

Kompozíció. $\phi : V \to V', \phi' : V' \to V''$ lineáris leképezések. Ekkor a $\phi'\phi$ kompozíció ($(\phi'\phi)v = \phi'(\phi v)$) egy $V \to V''$ lineáris leképezés. A kompozíció asszociatív: ha még $\phi'' : V'' \to W$ akkor $\phi''(\phi'\phi) = (\phi''\phi')\phi$ és mindkét oldalról lineáris:

$$(\alpha_1\phi_1' + \alpha_2\phi_2')(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2) = \alpha_1\beta_1\phi_1'\phi_1 + \alpha_1\beta_2\phi_1'\phi_2 + \alpha_2\beta_1\phi_2'\phi_1 + \alpha_2\beta_2\phi_2'\phi_2.$$

Az asszociativitás alapján a 2-nél több tényezős (de értelmes) kompozíciókban elhagyhatjuk a zárójeleket.

Inverz tulajdonságai:. $(\phi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\phi^{-1}$ és $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$.

Hatványozás:. $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció, $k > 0$ egész. $\phi^k := \phi \cdots \phi$ (k tényező); $\phi^0 = I_V$; $\phi^{-k} = (\phi^{-1})^k$.

1.4. Mátrixok

1.4.1. Definíció, formális műveletek

$m \times n$-es mátrix:. $\sim m \times n$-es táblázat $\mathbb{F}$–beli elemekkel. Az elemenkénti műveletekkel $m \times n$ dimenziós vektorteret alkotnak.

Mátrixszorzás. Ha $A = (a_{ij})$ egy $m \times \ell$-es, $B = (b_{ij})$ pedig egy $\ell \times n$-es mátrix, akkor AB az a (d_{ij}) $m \times n$-es mátrix, ahol

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}, \ (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Szavakban: az AB szorzat i-edik sorának j-edik eleme az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix j-edik oszlopának a "skaláris" szorzata.

Tulajdonságok. A szorzás asszociatív és mindkét változójában lineáris (értelemszerűen a megfelelő méreteknek egyezniük kell). A szorzat tényezői általában nem felcserélhetők (gyakran nem is végezhető el a szorzás a fordított sorrendben.

Példák.

- diagonális mátrixok:

$$diag(a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

  ahol az üres helyeken 0-k állnak.

$$diag(a_1, \ldots, a_n) diag(b_1, \ldots, b_n) = diag(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n),$$

  ezért az azonos méretű diagonális mátrixok felcserélhetők a szorzásra nézve.

- egységmátrix $I_n = diag(1, \ldots, 1)$ (n darab 1-es)
- alsó háromszög-mátrixok

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & a_{nn} \\ & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & a_{nn} \\ * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Transzponált mátrix:. Ha A egy $m \times n$-es (a_{ij}) mátrix, akkor A^T az az $n \times m$-es (a'_{ij}) mátrix, amelyre $a'_{ij} = a_{ji}$. Ha A egy $m \times n$-es, B pedig egy $n \times k$-as mátrix, akkor $(AB)^T = B^T A^T$.

Blokk-mátrixok szorzása. Gyakran hasznos a következő: Legyen A felbontható $m \times \ell$ darab A_{ij} részmátrixra, B pedig $\ell \times n$ darab B_{ij} részmátrixra:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1\ell} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{12} & \ldots & A_{m\ell} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & \ldots & B_{2n} \\ B_{31} & \ldots & B_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1} & \ldots & B_{\ell n} \end{pmatrix},$$

ahol minden $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq \ell$, $1 \leq j \leq n$-re A_{ik}-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B_{kj}-nek. Ekkor a $D = AB$ szorzat felbontható $m \times n$ darab D_{ij} részmátrixra:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & D_{12} & \ldots & D_{mn} \end{pmatrix},$$

ahol

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} A_{ik} B_{kj}.$$

Szavakban: kompatibilis blokk-felbontás esetén a mátrixszorzat blokkjai a tényezők a blokkjaiból a szokásoshoz hasonló eljárással kaphatók. (A skalárok szorzása és összeadása helyett mátrixok szorzását és összeadását tekintjük. Vigyázat, számít szorzásnál a tényezők sorrendje!)

1.4.2. Lineáris leképezések mátrixa

Definíció:. Legyen $\phi : V \to W$ lineáris leképezés, $v_1, \dots v_n$ bázis V-ben, $w_1, \dots, w_m$ pedig bázis W-ben. Ekkor $j = 1, \dots, n$-re $\phi v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$. Az $m \times n$-es $A = (\alpha_{ij})$ mátrix a ϕ mátrixa a $v_1, \dots, v_n$, illetve $w_1, \dots, w_n$ bázisokra vonatkozóan.

Lineáris transzformációkra ($W = V$) szokásos egyetlen bázist kijelölni mind a bemeneti, mind a kimeneti oldalra. A $\phi : V \to V$ mátrixa a $v_1, \dots, v_n$ bázisban tehát valójában a $(v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_n)$ bázispárra vonatkozó mátrix.

Példa: permutációmátrixok. Legyen π az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz egy permutációja (azaz $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektív leképezés). Legyen V egy n-dimenziós vektortér egy $v_1, \dots, v_n$ bázissal. Legyen továbbá ϕ az a lineáris transzformáció az $\mathbb{R}^n$-en, ami az i-edik báziselemet $\pi(i)$-be viszi. ($\phi v_i = v_{\pi(i)}$ és legyen $P = (p_{ij})$ a ϕ transzformáció mátrixa a $v_1, \dots, v_n$ bázisban. Ekkor

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \pi(j) = i, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tehát P minden egyes sorában és oszlopában pontosan egy darab 1 áll és a többi elem 0. Ez a tulajdonság jellemzi is a báziselemek permutációiból kapható mátrixokat. Az $(12 \dots n)$ ciklushoz tartozó mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Mátrixhoz tartozó lineáris leképezés:. Legyen $v_1, \dots v_n$ bázis V-ben, $w_1, \dots, w_m$ pedig bázis W-ben, $A = (\alpha_{ij})$ pedig egy $m \times n$-es lineáris transzformáció Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\phi : V \to W$ lineáris leképezés, aminek a mátrixa A a $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)$ bázispárra vonatkozóan.
Biz.: Legyen $u_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$. Tudjuk, hogy egyértelműen létezik olyan ϕ, amelyre $\phi v_j = u_j$ $j = 1, \dots, n$. ϕ mátrixa éppen A.

Megjegyzés:. Ha $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $w_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (előbbiek n hosszú, utóbbiak m hosszú oszlopvektorok) akkor a fenti ϕ éppen az n hosszú oszlopvektorok A-val való (balról) szorzása. (Egy korábbi példában ϕ_A-val jelölt leképezés.)

1.4.3. Műveletek transzformációkkal és mátrixukkal

Rögzített bázisok esetén megfelelnek egymásnak. Leképezések lineáris kombinációjának a mátrixa az egyedi mátrixok lineáris kombinációja, a kompozíciónak pedig a mátrixok szorzata lesz a mátrixa. Utóbbi pontosabban: ha $\phi : V \to V'$ és $\phi' : V' \to V''$ lineáris leképezések, B bázis V-ben, B' bázis V'-ben, B'' bázis V''-ben, ϕ mátrixa a B, B' bázispárra vonatkozóan A, ϕ' mátrixa a B', B'' bázispárra vonatkozóan A', akkor a $\phi'\phi$ kompozíció mátrixa a B, B'' bázispárra vonatkoztatva $A'A$.
Biz. Egyszerű számolás (HF).

Inverz:. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Legyen $V = \mathbb{F}^n$, az n hosszú oszlopvektorok tere és $\phi : V \to$ az A-val való jobbról szorzás. Azt mondjuk, hogy A **invertálható (nemelfajuló, reguláris, nem-szinguláris)**, ha a $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció bijektív. Ez esetben az A mátrix A^{-1} inverze a ϕ^{-1} lineáris leképezés mátrixa szintén a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisban felírva. Ha A invertálható, akkor $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$. A dimenziótétel miatt ϕ akkor és csak akkor invertálható, ha $\ker \phi = 0$ és ez azzal is ekvivalens, hogy $\phi V = V$. Ezért, ha létezik B, amelyre $BA = I_n$ vagy $AB = I_n$, akkor A invertálható. Ez esetben $A^{-1} = B$. (Ez a véges dimenziós vektorterek sajátossága, végtelen dimenzióban elképzelhető, hogy egy transzformációnak csak egyoldali inverze van.) Következésképpen ha A invertálható, akkor A^{-1} is és $(A^{-1})^{-1} = A$. Ha A és B invertálható mátrixok, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Szinguláris (elfajuló) mátrix, lineáris transzformáció:. nem invertálható négyzetes mátrix illetve lineáris transzformáció.

Áll.:. Egy A négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha oszlopai lineárisan függetlenek.
Biz.: A fenti értelmezésben az A-val való jobbról szorzás képtere az A oszlopai által generált altér. Ez pont akkor a teljes tér, ha ezen oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Példa (Vandermonde-mátrix). Legyen V az n-nél alacsonyabb fokú valós $\mathbb{F}$ feletti tere és $a_1, \ldots, a_n$ páronként különböző $\mathbb{F}$–beli elemek. Legyen $\phi : V \to \mathbb{F}^n$ az

$$f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_n)) \end{pmatrix}$$

leképezés. Ekkor ϕ mátrixa az

$$(1, x, \ldots, x^{n-1}), \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bázispárra vonatkozóan

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Mivel a behelyettesítés bijekció V és $\mathbb{F}^n$ között, M egy invertálható mátrix (és az inverze a Lagrange-interpoláció mátrixa).

1.4.4. Báziscsere

Báziscsere mátrixa:. Legyen V-ben $v_1, \ldots, v_n$ és $v_1', \ldots, v_n'$ két bázis. Ekkor létezik $C = (c_{ij})$ illetve $C' = (c_{ij}')$ $n \times n$-es mátrixok, amelyekre: $v_j' = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i$ illetve $v_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}' v_i'$ $(j, k = 1, \ldots, n)$. Innen

$$v_j = \sum_{k=1}^n c_{kj}' v_k' = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{kj}' c_{ik} v_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj}' v_i.$$

Mivel $v_1, \ldots, v_n$ bázis, $\sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj}' = \delta_{ij}$. (Kronecker delta: $\delta_{ii} = 1$ és $\delta_{ij} = 0$ $i \neq j$ esetén.) Tehát $CC' = I_n$, az $n \times n$-es egységmátrix, így C invertálható és $C' = C^{-1}$.

Megjegyzés:. Fenti C mátrix a $v_i \mapsto v_i'$ leképezés lineáris kiterjesztésének a mátrixa a $(v_1, \ldots, v_n), (v_1, \ldots, v_n)$ bázispárra vonatkozóan. A C' mátrix pedig a $v_i' \mapsto v_i$ leképezés lineáris kiterjesztésének a mátrixa a $(v_1', \ldots, v_n'), (v_1', \ldots, v_n')$ bázispárra vonatkozóan.

Fontosabb megjegyzés:. Fenti C mátrix az identikus leképezés mátrixa a $(v_1', \ldots, v_n'), (v_1, \ldots, v_n)$ bázispárra vonatkozóan. A $C' = C^{-1}$ mátrix pedig az identikus leképezés mátrixa a $(v_1, \ldots, v_n), (v_1', \ldots, v_n')$ bázispárra vonatkozóan.

Báziscsere hatása lineáris leképezések mátrixára:. Legyenek V-ben $v_1, \ldots, v_n$ és $v_1', \ldots, v_n'$ két bázis; W-ben pedig $w_1, \ldots, w_m$ és $w_1', \ldots, w_m'$ két bázis. Legyen a $\phi : V \to W$ lineáris transzformáció mátrixa a $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n)$ vonatkozóan A. Legyenek $C, C' = C^{-1}$ a fenti mátrixok V két adott bázisára, illetve $D, D' = D^{-1}$ a hasonlóan definiált mátrixok mátrixok W két bázisára. Ekkor ϕ mátrixa a $(v_1', \ldots, v_n'), (w_1' \ldots . w_m')$ bázispárra vonatkozóan

$$D^{-1}AC.$$

Ha a $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció $(W = V)$ mátrixa a $v_1, \ldots, v_n$ bázisban (azaz a $(v_1, \ldots, v_n), (v_1, \ldots, v_n)$ bázispárra vonatkozó mátrixa) A, akkor ϕ mátrixa a $v_1', \ldots, v_n'$ bázisban ϕ mátrixa a

$$C^{-1}AC$$

konjugált mátrix.
Biz. A "fontosabb megjegyzés" és a kompozíció mátrixára vonatkozó eredmény alapján $\phi = I_W \phi I_V$ mátrixa az új bázispárra éppen $D^{-1}AC$. A második állítás az első állítás speciális esete.

Hasonló mátrixok. Két $n \times n$-es A és A' mátrix hasonló, létezik egy olyan invertálható C $n \times n$-es mátrix, amelyre $A' = C^{-1}AC$. A báziscsere tulajdonsága alapján A és A' hasonló, ha ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixai két (esetleg) különböző bázisban felírva.

Műveletek konjugált mátrixokkal.

$$C^{-1}\lambda A + \mu BC = \lambda C^{-1}A + C\mu C^{-1}BC, \;\; C^{-1}ABC = C^{-1}ACC^{-1}BC.$$

Példa:. Legyen M a következő $2n \times 2n$-es mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

ahol A, B, C, D $n \times n$-es mátrixok. Cseréljük ki az első báziselemet az $n+1$-edikkel, a másodikat az $n+2$-edikkel, és így tovább. A báziscsere mátrixa

$$T = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix},$$

ahol I most az $n \times n$-es I_n egységmátrix. Mivel $T^2 = I_{2n}$, $T^{-1} = C$. A blokk-mátrixok szorzását használva könnyen adódik, hogy

$$\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Például a $B = 0$ esetben M alsó blokk-háromszög mátrix, amiből a báziscsere felső blokk-háromszög mátrixot csinál.

1.5. Determináns

1.5.1. Mátrixok determinánsa, példák

Permutációk, előjel:. Az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja egy $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektív leképezés. A különböző permutációk száma $n!$, köztük van az identikus is. Egy $1 \le i < j \le n$ pár inverzió π-ben, ha $\pi(i) > \pi(j)$ A π permutáció páros, ha páros sok inverziót tartalmaz, egyébként pedig páratlan. A π permutáció $\operatorname{sgn}(\pi)$ előjele 1, ha π páros, a páratlan esetben pedig -1. Az $\operatorname{sgn}(\,)$ függvény multiplikatív:

$$\operatorname{sgn}(\pi_1\pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1)\operatorname{sgn}(\pi_2).$$

Determináns:. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor

$$\det A = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)},$$

ahol az összegzés az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz $n!$ permutációjára vonatkozik.

Példák:.

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-ra $\det A = ad - bc$.
- Az általános 3×3-as $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa 6 tagú:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- Ha π egy permutáció és P a mátrixa, akkor $\det P = \operatorname{sgn}(\pi)$.
- Egy alsó vagy felső háromszögmátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata.
- Legyen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ alakú, ahol A és C négyzetes. Ekkor $\det M = \det A \cdot \det C$.
- Legyenek $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Ekkor $\det A = \det B = \det C = \det D = 0$, míg $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -abcd$, mutatva azt, hogy $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ nem számítható ki pusztán $\det A, \det B, \det C, \det D$ felhasználásával.

1.5.2. Oszlop és sor szerinti kifejtés

Kifejtési tétel (Laplace):. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix. Adott (i, j) párra egyen C_{ij} az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix, amely A-ból az i-edik sor és a j oszlop elhagyásával adódik. Emellett a jelölés mellett tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$-re

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det C_{ik}.$$

Biz.: Egyszerű számolás.

1.5.3. Elemi tulajdonságok:

Transzponált mátrix determinánsa:. $\det A^T = \det A$

Oszlopokban lineáris:. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Adott $1 \leq j \leq n$ indexre és $v \in \mathbb{F}^n$ vektorra $A_j(v)$-vel azt a mátrixot, amit úgy kapunk, hogy az A mátrix j-edik oszlopát helyettesítjük v-vel. (Megj.: $A_j(v)$ nem függ A-nak a j-edik oszlopában levő elemektől, csak a többitől.) Ezzel a jelöléssel:

$$\det A_j(\lambda u + \mu v) = \lambda \det A_j(u) + \mu \det A_j(v).$$

Biz.: A j-edik oszlop szerinti kifejtésből.
Hasonló állítás fogalmazható meg sorokra is.

Köv. (Nullákból álló oszlop (sor)):. Ha van ilyen, akkor a determináns 0.

Skalárszoros oszlopok. Ha A-nak van két olyan oszlopa (sora), hogy az egyik a másik skalárszorosa, akkor $\det A = 0$.
Biz. Kétszer alkalmazva a kifejtési tételt, nézzük meg egy $n-2 \times n-2$-es aldeterminánsegyütthatóját.

Sor- és oszlopműveletek hatása.

- $\det A$ nem változik, ha A egy oszlopához (sorához) hozzáadjuk egy másik oszlopának (sorának) skalárszorosát.
  Biz.: Tegyük fel, hogy az i-edik oszlophoz adjuk a j-edik oszlop α-szorosát. A j-edik oszlop szerinti linearitásból adódik, hogy az új mátrix determinánsa az eredeti determinánsnak és annak a mátrixnak a determinánsának az összege, amely úgy adódok az eredetiből, hogy az i-edik oszlopot kicseréljük a j-edik oszlop α-szorosával. Ebből a sorokra vonatkozó állítás transzponálás segítségével nyerhető.
  Megj. Az i-edik oszlophoz a j-edik oszlop α-szorosának a hozzáadása az $I + \alpha E_{ji}$ mátrixszal való jobbról szorzást jelenti, ahol E_{ji} az az $n \times n$-es mátrix, amely minden eleme 0, kivéve az i-edik sor j-edik helyét, ahol pedig 1 áll. A hasonló sorművelethez pedig az $I + \alpha E_{ij}$ mátrixszal történő balról szorzás tartozik.

- $\det A$ nem változik, ha A egy oszlopához (sorához) hozzáadjuk néhány, tőle különböző indexű oszlopának (sorának) egy tetszőleges lineáris kombinációját.
  Biz.: Az előző eredményt alkalmazzuk többször.

- $\det A$ α-szorosára változik, ha A egy oszlopát (sorát) α-szorosára kicseréljük.
  Megj.: A-nak egy diagonális mátrixszal való jobbról szorzása A oszlopainak a diagonális mátrix megfelelő elemivel való beszorzását eredményezi. A balról szorzás pedig a sorokra ugyanezt. A determináns a diagonális elemek szorzatával (azaz a diagonális mátrix determinánsával szorzódik).

- $\det A$ előjelet vált (-1-szeresére változik), ha A két oszlopát megcseréljük.
  Megj.: Egy $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutáció mátrixa az az $n \times n$-es (p_{ij}) mátrix, amelyre $p_{ij} = 0$, ha $i \neq \pi(j)$ és $p_{ij} = 1$, ha $i = 1$. Egy mátrixnak egy permutáció mátrixával való jobbról szorzás az oszlopok megfelelő permutálását jelenti, a balról szorzás pedig a sorok permutálását. Ezek a műveletek a determinánst a permutáció előjelével szorozzák meg.

Nem invertálható mátrixok determinánsa. Ha A nem invertálható akkor $\det A = 0$.
Biz.: Tegyük fel, hogy A nem invertálható, azaz az oszlopai lineárisan összefüggenek. Az oszlopok egy nem 0-t adó lineáris kombinációjából nyerhető, hogy valamely oszlop előáll a többi oszlop lineáris kombinációjaként. Levonva ezt a kombinációt az adott oszlopból, a determináns nem változik, ugyanakkor lesz egy csupa 0-ból álló oszlop, ami szerint kifejtve 0 determinánst kapunk.

Megj.:. Ha A sorai lineárisan összefüggenek, $\det A$ akkor is 0. (Az előző állításból transzponálással.)

1.5.4. Szorzat determinánsa

Determinánsok szorzástétele:. Ha A és B $n \times n$-es mátrixok, akkor

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Biz.: B determinánsa, és ezért a $(\det A)(\det B)$ jobboldal lineáris B bármelyik oszlopa szerint. Belátjuk ezt a $\det(AB)$ baloldalról is. A B mátrix j-edik oszlopa szerinti linearitáshoz vegyük észre, hogy tetszőleges v n hosszú oszlopvektorra $A \cdot B_j(v) = (AB)_j(v)$, ezért

$$\det(A \cdot B_j(\lambda u + \mu v)) = \det\left((AB)_j(\lambda u + \mu v)\right) = \lambda \det\left((AB)_j(u)\right) + \mu \det\left((AB)_j(v)\right) = \lambda \det(A \cdot B_j(u)) + \mu \det(A \cdot B_j(v)).$$

Legyenek $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ekkor $\det B$ B első sora szerinti linearitása miatt

$$\det(A)\det(B) = b_{11}\det(A)\det(B_1(v_1)) + b_{21}\det(A)\det(B_1(v_2)) + \ldots + b_{n1}\det(A)\det(B_1(v_n))$$

és $\det(AB)$ B első sora szerinti linearitása miatt

$$\det(AB) = b_{11}\det(A \cdot B_1(v_1)) + b_{21}\det(A \cdot B_1(v_2)) + \ldots + b_{n1}\det(A \cdot B_1(v_n)).$$

Ennek megfelelően elegendő belátni, hogy

$$\det(A \cdot B_1(v_i)) = \det A \det B_1(v_i) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A $B_1(v_i)$ mátrixok olyan mátrixok, amelyek első oszlopában pontosan egy darab 1-es van, a többi elem 0. Elegendő tehát a $\det(AB) = \det A \det B$ egyenlőséget olyan B mátrixokra igazolni, amelyek első sorában pontosan egy darab 1-es van, a többi elem 0. Az ilyen B mátrixok kezelését második oszlop linearitásának felhasználásával folytatjuk. Azt kapjuk, hogy immár elegendő olyan B mátrixokkal foglalkozni, amelyekben az első két oszlop mindegyikében pontosan egy darab 1-es van, a többi elem 0. Így folytatva végül is arra jutunk, hogy elég a $\det(AB) = \det A \det B$ egyenlőséget arra az esetre belátni, amikor B minden oszlopában pontosan egy darab 1-es van, a többi elem 0. Ha egy ilyen B valamely sora 0, akkor $\det B = 0$, továbbá van két megegyező oszlopa, így az AB szorzatnak is, ezért $\det(AB)$ is 0, tehát ez esetben az egyenlőség triviálisan teljesül. Végül is elég azzal az esettel foglalkozni, amikor B egy permutációmátrix. Mivel

$$\det A = \det A^T \text{ és } \det(AB) = \det\left((AB)^T\right) = \det\left(B^T A^T\right),$$

az A^T mátrixra (B megtartása mellett) ugyanez a visszavezetés működik, tehát A-ról is feltehető, hogy permutációmátrix. Permutációmátrixok determinánsa a megfelelő permutációk előjelével egyezik meg, így a fennmaradó eset a permutációk előjelének multiplikativitásából adódik.

Fontos megjegyzés:. Ez a bizonyítás szó szerint átmegy tetszőleges kommutatív egységelemes gyűrűk feletti négyzetes mátrixok determinánsára, például olyan mátrixok esetére, amelyeknek az elemei testek feletti polinomok.

Következmény:. Ha A invertálható (más neveken reguláris, etc.), akkor $\det A \neq 0$ és $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Következmény:. A invertálható $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A^T$ invertálható.

Következmény:. A invertálható $\Leftrightarrow A$ sorai lineárisan függetlenek $\Leftrightarrow A$ oszlopai lineárisan függetlenek.

1.5.5. Inverz mátrix előjeles aldeterminánsokkal

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix. Adott (i, j) párra egyen C_{ij} az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix, amely A-ból az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával adódik. Az (i, j)-edik előjeles aldeterminánsa $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$. Ha A invertálható és $A^{-1} = (a'_{ij})$, akkor

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det C_{ji}}{\det A}.$$

Biz.: Legyen A tetszőleges $n \times n$-es mátrix és A'' az az $n \times n$-es (a''_{ij}) mátrix, amelynek elemeire $a''_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ji}$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a''_{kj} = \delta_{ij} \det A,$$

ugyanis $i = j$-re éppen $\det A$-nak az i-edik sor szerinti kifejését látjuk, különben pedig annak a mátrixnak a determinánsának a j-edik sora szerinti kifejtését, amelyet úgy kapunk A-ból, hogy a j-edik sorát lecseréljük az i-edikre (következésképpen két sora egyenlő).
Megj.: Igazából azt láttuk be, hogy

$$AA'' = (\det A)I_n$$

akkor is, ha A nem feltétlenül invertálható. Hasonlóan igazolható $A''A = (\det A)I_n$.

1.5.6. Lineáris transzformációk determinánsa

Legyen ϕ egy $V \to V$ lineáris transzformáció és legyen ϕ mátrixa a B bázisban A. Ha B' egy másik bázis, amelyre a $B \leftrightarrow B'$ báziscseréhez tartozó mátrixok C illetve C^{-1}, akkor ϕ mátrixa a B' bázisban $C^{-1}AC$, a determinánsok szorzástétele miatt

$$\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C^{-1} \det C = \det A \det(C^{-1}C) = \det A \det I = \det A,$$

így ϕ mátrixának a determinánsa független a bázis választásától. Más szavakkal, hasonló mátrixok determinánsa megegyezik.

1.6. Lineáris egyenletrendszerek

1.6.1. Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer egy

$$Ax = b$$

alakú egyenletrendszer, ahol $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrix, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ változó-vektor és $b \in \mathbb{F}^n$. Az egyenletrendszer mátrixa A, a *kibővített mátrixa* az $(A|b)$ $m \times (n+1)$ mátrix.

1.6.2. Megoldás Gauss-eliminációval

Ha egy egyenlethez (a kibővített mátrix egy sorához) egy másik egyenlet (sor) skalárszorosát adjuk, az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk. Nyilván megváltoztathatjuk a rendszerben az egyenletek (azaz a kibővített mátrix sorainak) sorrendjét is. Egy kis óvatossággal átindexelhetjük a változókat (azaz a kibővített mátrix első részének oszlopait is cserélgethetjük). Az ilyen lépéseknél a szükséges óvatosság abban áll, hogy az új egyenletrendszerre kapott megoldásokra majd vissza kell csinálni az átindexelést. Hacsak nem az összes együttható 0, átindexeléssel (oszlopcserével) és esetleges sorcserével elérhető, hogy az első egyenletben az első változó (a mátrix bal felső eleme) nem 0 együtthatóval szerepel. Ezután az első egyenlet (sor) alkalmas többszörösét levonva a többiből kiküszöböljük az első változót. Így a maradék $m-1$ egyenletben csak az $x_2, \ldots, x_n$ változók szerepelnek nem 0 együtthatóval. Az eljárást rekurzíve folytatjuk a maradék $m-1$ egyenletre és $n-1$ változóra, egészen addig, amíg csupa 0 együtthatót nem kapunk. Az eredmény r darab egyenlet lesz valamilyen r-re, az elsőben az x_1 a legelső változó, aminek az együtthatója nem 0, a másodikban x_2, és így tovább. A többi $n-r$ egyenletben nem szerepelnek változók. Ha van ezek között olyan, aminek a jobboldalán $b_j \neq 0$ áll, akkor nyilván nincs az egyenletrendszernek megoldása.

Ha nincs ilyen, folytatásként az első egyenletből a többi alkalmas lineáris kombinációját levonva elérhetjük, hogy az első r változó közül az első egyenletben csak az x_1 szerepeljen nem 0 együtthatóval. Hasonlóan, $i = 2, \ldots, r$-re elérhető, hogy az i-edik egyenletben az első r változó közül csak az x_i szerepeljen. (Így az egyenletrendszer kibővített mátrixának felső $r \times r$-es blokkja diagonális, és mindkét alsó blokkja ($(n-r) \times r$, illetve $(n-r) \times (n-r+1)$-es része csupa 0.) Leosztva $x_1, \ldots x_r$ együtthatójával és a maradék változókat tartalmazó kifejezéseket átvíve a jobboldalra $x_1, \ldots, x_r$-re konstansokat és esetleg az $x_{r+1}, \ldots, x_n$ változókat tartalmazó lineáris kifejezéseket kapunk, amelyek $n > r$ esetén az $x_{r+1}, \ldots, x_r$ tetszőleges értéke mellett megoldást adnak.

Példa:. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

A kibővített mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Az első sort levonjuk másodikból:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A második sort levonjuk a negyedikből:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A második sort levonjuk az ötödikből:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A harmadik sort levonjuk a negyedikből:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az utolsó sor a $0 = 1$ ellentmondásnak felel meg, ez az egyenletrendszer tehát nem megoldható. Ha viszont az utolsó, $x_2 + x_5 = 1$ egyenlet helyett az $x_2 + x_5 = 0$ áll, akkor az eljárás eddigi részével az utóbbi mátrixunk helyett az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. Levonjuk a második sort az elsőből:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és itt az első 3×3-as blokk már diagonális. Ekkor a megoldás: x_4, x_5 tetszőleges és $x+1 = x_5+1$, $x_2 = x_5$, $x_3 = x_4+1$.

1.6.3. A Cramer-szabály

Tekintsük az $m = n$ esetet. Jelölje $j = 1, \dots n$-re $A_j(b)$ azt a mátrixot, amely úgy kapható A-ból, hogy a j-edik oszlopát helyettesítjük a b oszlopvektorral. Ha $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ egy megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, akkor

$$x_j \det A = \det A_j(b) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Biz.: Jelölje a_k az A mátrix k-adik oszlopát $(k = 1, \dots, n)$. Mivel $b = Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$, az $A_j(b)$ mátrix illetve az $A_j(x_k a_k)$ mátrixok determinánsának j-edik oszlopa szerinti kifejtéseket összevetve azt kapjuk, hogy $\det A_j(b) =$

$\sum_{k=1}^{n} \det(A_j(x_k a_k))$. Vegyük észre, hogy $k \neq j$ esetén $\det A_j(x_k a_k) = 0$, hiszen az $A_j(x_k a_k)$ mátrix j-edik oszlopa a k-adik oszlop x_k-szorosa. Ezért

$$\det A_j(b) = \det A_j(x_j a_j) = x_j \det A_j(a_j) = x_j \det A.$$

Következésképp:

Cramer-szabály. Legyenek A, x, b, $A_j(b)$ mint fent. Tegyük fel továbbá, hogy $\det A \neq 0$. Ekkor

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

1.7. A Gauss-elimináció további alkalmazásai

1.7.1. Mátrix rangja:

Lineárisan független oszlopok maximális száma:. Az oszlopok közül kiválasztható max. lineárisan független rendszerek mérete azonos: maximális független rendszer=az oszlopok által generált tér egy, az oszlopok közül kiválasztott bázisa.

Max. invertálható négyzetes részmátrix. Egy invertálható részmátrixot tartalmazó oszlopok nyilván függetlenek. Fordítva, ha van r független n hosszú oszlopunk, akkor sorcserékkel és elemi oszlopműveletekkel elérhetjük, hogy a felső $r \times r$-es részmátrix felső háromszög alakú legyen. Az érintett (a felső r-be mozgatott) r sorhoz tartozó részmátrix invertálható.

Lineárisan független sorok maximális száma:. Transzponált gondolatmenettel szintén ugyanaz, mint a legnagyobb méretű invertálható részmátrix.

1.7.2. Rang és determináns kiszámítása Gauss-eliminációval

Az eliminációs lépések (oszlopok illetve sorok cseréje, skalárszorosának levonása más oszlopokból, illetve sorokból) megtartják a rangot és a determináns értékét kontrollált módon változtatják meg (esetleg előjelet vált vagy nem változik). Ilyen lépésekkel a mátrix háromszög alakra (sőt, végül is diagonális alakra) hozható. Nagy méretű mátrixokra sokkal gyorsabb, mint a determinánst kifejteni vagy az összes négyzetes részmátrixot végignézni.

HF:. Mutassuk meg, hogy egy lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha a kibővített mátrixának a rangja megegyezik a kibővítetlen mátrixának (a változók együtthatóiból álló mátrixnak) a rangjával.

1.8. Sajátértékek, sajátvektorok, sajátalterek

1.8.1. Definíció

Sajátvektor, sajátérték. : Legyen $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció. A $0 \neq v \in V$ vektor sajátvektora ϕ-nek $\lambda \in \mathbb{F}$ sajátértékkel, ha

$$\phi v = \lambda v.$$

Áll:. Ha $\phi v = \lambda v$ és $\phi v' = \lambda v'$, akkor $\phi(\alpha v + \alpha' v') = \lambda(\alpha v + \alpha' v')$,

Sajátaltér:. és így a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a 0-val együtt egy alteret alkotnak, a λ sajátértékhez tartozó sajátalteret.

Példa:. Az $\mathbb{R}^n$-en a $\pi : v \mapsto v - \frac{u^T v}{u^T u} u$ $(0 \neq u \in \mathbb{R}^n)$ vetítésnek u egy sajátvektora 0 sajátértékkel, az $u^\perp$ hipersík minden nem 0 vektora pedig sajátvektor 1 sajátértékkel. Az $\langle u \rangle$ egyenesen és az $u^\perp$ hipersíkon kívül nincs sajátvektor: ha $v \in \mathbb{R}^n \setminus \langle u \rangle \setminus u^\perp$, akkor $v = \alpha u + w$ alakú, ahol $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ és $0 \neq w \in u^\perp$ és így $\pi v = w \notin \langle v \rangle$. Tehát π-nek pontosan két sajátértéke van: 0 és 1. A hozzájuk tartozó sajátalterek pedig $\langle u \rangle$ illetve $u^\perp$.

1.8.2. Sajátalterek együttesen

Alterek lineáris függetlensége:. A $(0) \neq W_1, \ldots W_s \leq V$ alterek lineárisan függetlenek, ha $w_1 + \ldots + w_s = 0$ $(w_1 \in W_1, \ldots, w_s \in W_s)$ esetén $w_1 = \ldots = w_s = 0$.

Megj.:. A $v_1, \ldots, v_s \in V$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha az általuk generált 1 dimenziós alterek lineárisan függetlenek.

Áll.:. A $(0) \neq W_1, \ldots, W_s \leq V$ alterek lineárisan függetlenek $\Leftrightarrow \dim\langle W_1 + \ldots + W_s\rangle = \dim W_1 + \ldots \dim W_s$
Biz.: HF

A sajátalterek lineárisan függetlenek:. Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ páronként különböző sajátértékei ϕ-nek továbbá v_i sajátvektora ϕ-nek λ_i sajátértékkel $(i = 1, \ldots, s)$: $\phi v_1 = \lambda_1 v_1, \ldots, \phi v_s = \lambda_s v_s$. Ekkor $v_1 + \ldots + v_s = 0$ esetén $v_1 = \ldots v_s = 0$.
Biz.: Az alterek s száma szerinti indukció. Az $s = 1$ eset triviális. tegyük fel, hogy $s \geq 2$ és $v_1 + \ldots + v_s = 0$. Ekkor

$$0 = \phi(v_1 + \ldots v_s) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$$

és

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_1 v_s.$$

Kivonva egymásból a két egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + (\lambda_s - \lambda_1)v_s = 0,$$

ezért az indukciós feltevés miatt itt minden tag 0, ami $\lambda_j \neq \lambda_1$ $(j \neq 1)$ miatt csak úgy lehet, ha $v_2 = \ldots = v_s = 0$. Ekkor v_1 nyilván 0.

Köv.:. A sajátalterek dimenzióinak összege legfeljebb $\dim V$. Legfeljebb $\dim V$ különböző sajátérték van.

Köv.:. Ha a $\phi : V \to V$ lineáris transzformációnak $\dim V$ különböző sajátértéke van, akkor van V-nek ϕ sajátvektoraiból álló bázisa.

Diagonalizálható mátrixok. Az A $n \times n$-es $\mathbb{F}$-beli elemű mátrix diagonalizálható $\mathbb{F}$ felett, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha van olyan C szintén $n \times n$-es $\mathbb{F}$ feletti elemű mátrix, amelyre $C^{-1}AC$ diagonális. Ez utóbbi akkor és csak akkor teljesül, ha C oszlopai az A-nak egy sajátvektorokból álló bázisát alkotják. Tehát A pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik $\mathbb{F}^n$-nak A sajátvektoraiból álló bázisa.

1.8.3. Karakterisztikus polinom

Legyen V egy n dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció, $\lambda \in \mathbb{F}$ skalár.

Áll.:. λ sajátértéke ϕ-nek $\Leftrightarrow \lambda I - \phi$ nem invertálható $\Leftrightarrow \det(\lambda I - \phi) = 0$.

Karakterisztikus polinom. Legyen V egy bázisában ϕ mátrixa A és tekintsük az $xI_n - A$ mátrixot (elemei $\mathbb{F}[x]$–beli polinomok). Ennek $\det(xI_n - A)$ determinánsa egy $\mathbb{F}[x]$–beli 1 főegyütthatós n-ed fokú polinom. Tekintsünk egy másik bázist, ahol a báziscsere mátrixa C. Ebben a bázisban ϕ mátrixa az új bázisban $C^{-1}AC$ lesz. Az $\mathbb{F}[x]$ polinomgyűrű felett számolva

$$\begin{aligned}
\det\left(xI_n - C^{-1}AC\right) &= \det\left(C^{-1}(xI_n - A)C\right) \\
&= \det C^{-1} \det(xI_n - A) \det C \\
&= \det C \det C^{-1} \det(xI_n - A) \\
&= \det I_n \det(xI_n - A) \\
&= \det(xI_n - A).
\end{aligned}$$

Itt a második egyenlőségnél a mátrixok szorzástételét az $\mathbb{F}[x]$ gyűrű felett használtuk. Tehát a

$$\det(xI - \phi) := \det(xI_n - A)$$

polinom független a bázis választásától. Elnevezés: a ϕ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja. Egy B $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomja ennek megfelelően $\det(xI_n - B)$. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

HF:. Mi lesz $\det(xI_n - A)$ konstans tagja? Mi lesz az $n - 1$-ed fokú tag együtthatója?

Áll.:. $\lambda \in \mathbb{F}$ sajátértéke ϕ-nek (A-nak) $\Leftrightarrow \lambda$ gyöke ϕ (A) karakterisztikus polinomjának.

Köv.:. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ esetén minden lineáris transzformációnak van legalább egy sajátértéke.

Blokk-háromszög alakú mátrix determinánsa és karakterisztikus polinomja:. A diagonális blokkok determinánsának illetve karakterisztikus polinomjának a szorzata. Azaz ha A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix} \text{ vagy } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

alakú $n \times n$-es , ahol az A_{ii} diagonális blokk $n_i \times n_i$ méretű $(i = 1, \dots r)$. Ekkor

$$\det A = \prod_{i=1}^{r} \det A_{ii},$$

illetve

$$\det(xI_n - A) = \prod_{i=1}^{r} \det(xI_{n_i} - A_{ii}).$$

Biz.: Egyszerű a determináns definícióját használva.

1.8.4. Spektrálfelbontás spec. esetben

Négyzetmentes polinom:. aminek nincs többszörös gyöke.

Áll.. Ha egy komplex test feletti vektortér lineáris transzformációjának (egy négyzetes mátrixnak) a karakterisztikus polinomja négyzetmentes, akkor van sajátértékeiből álló bázis (diagonalizálható, azaz hasonló egy diagonális mátrixhoz).

Példa (DFT):. Legyen $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ az a lineáris transzformáció, amely a (standard) bázis elemeit ciklikusan permutálja: $\phi v_i = v_{i+1}$ (ahol $v_{n+1} := v_1$). Legyen $\omega = e^{2\pi i/n}$.

- (HF) ϕ karakterisztikus polinomja $x^n - 1$
- $x^n - 1$ gyökei $1 = \omega^0, \omega, \dots, \omega^{n-1}$
- (HF) $w_j := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{j(n-1)} \end{pmatrix}$ sajátvektora ϕ-nek ω^{-j} sajátértékkel
- a $v_i \mapsto w_i$ báziscsere mátrixa

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

  az $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ számokhoz tartozó Vandermonde-mátrix.

Példa nem diagonalizálható mátrixra:. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor M karakterisztikus polinomja x^2, így M-nek csak a 0 a sajátértéke. Tegyük fel, hogy M diagonalizálható, azaz hasonló a

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz. Ekkor M és D karakterisztikus polinomjai és így sajátértékei is megegyeznek. Mivel D-nek d_1 és d_2 is sajátértéke, az csak úgy lehet, hogy $D = 0$. Azonban hasonló mátrixok rangja is ugyanaz, tehát, mivel M rangja 1, M nem lehet hasonló a 0 mátrixhoz sem.

1.9. A Jordan-féle normálalak

1.9.1. Invariáns altér

Def.:. Az $U \leq V$ altér invariáns a $\phi : V \to V$ lineáris transzformációra, (vagy más szavakkal egy ϕ-invariáns altér), ha $u \in U$ esetén $\phi U \in U$ is teljesül. Például ϕ sajátalterei, vagy a ϕ néhány sajátvektora által generált altér ϕ-invariánsak.

HF:. Mutassuk meg, hogy ha $\phi, \psi : V \to V$ két felcserélhető lineáris transzformáció (azaz $\phi\psi = \psi\phi$), akkor ϕ tetszőleges sajátaltere ψ-invariáns.

Blokk-háromszög alak:. Egészítsük ki az $U \leq V$ ϕ-invariáns altér egy $u_1, \ldots, u_m$ bázisát V egy

$$u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$$

bázisává. Ebben a bázisban ϕ mátrixa felső blokk háromszög, azaz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix}$$

alakú, ahol a bal felső $m \times m$-es blokkban ϕ U-ra való megszorításának A mátrixa látható az $u_1, \ldots, u_m$ bázisban, a bal alsó $(n-m) \times m$-es blokk csupa 0.

1.9.2. Direkt összeg, komplementer altér

Direkt összeg (belső):. A V vektortér direkt összege a $0 < V_1, \ldots, V_\ell \leq V$ altereknek (Jelölés: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_\ell$), ha minden $v \in V$ vektor egyértelműen előáll $v = v_1 + \ldots + v_\ell$ alakban, ahol $v_1 \in V_1, \ldots, v_\ell \in V_\ell$. Kicsit más megfogalmazásúan $V = \langle V_1, \ldots, V_\ell \rangle$ és a $V_1, \ldots, V_\ell$ alterek lineárisan függetlenek.

Példa: bázis. A $0 \neq v_1, \ldots, v_n$ vektorok bázist alkotnak V-ben $\Leftrightarrow V = \langle v_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle v_1 \rangle$

Példa: külső direkt összeg. $W_1, \ldots, W_\ell$ vektorterek. $V = \{(w_1, \ldots, w_\ell) | w_i \in W_i\}$, összeadás: koordinátánként. Legyen $V_i = \{(w_1, \ldots, w_\ell) \in V | w_j = 0 \text{ ha } j \neq i\} \cong W_i$. Ekkor $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_\ell$. Azonosítva V_i-t W_i-vel azt is mondjuk, hogy V a $W_1, \ldots, W_\ell$ vektorterek (külső) direkt összege.

Komplementer altér:. Legyen $U \leq V$. Ekkor U egy komplementere egy olyan $W \leq V$ altér, amelyre $V = U \oplus W$. Ha U egy bázisát kiegészítjük V egy bázisává, az U-ba nem eső báziselemek pl. egy komplementer alteret generálnak.

Invariáns alterek direkt összege:. Tegyük fel, hogy $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_\ell$, ahol a $V_1, \ldots, V_\ell \leq V$ alterek invariánsak a $\phi : V \to V$ lineáris transzformációra. Legyen B_i bázis V_i-ben és tekintsük V-nek azt a bázisát, amelynek első $|B_1|$ eleme B_1 elemei, ezt követik B_2 elemei, és így tovább. Ebben a bázisban ϕ mátrixa blokk diagonális:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\ell \end{pmatrix}$$

Az i-edik blokkban ϕ-nek a $V_i \times V_i$-re való megszorításának B_i bázisban felírt A_i mátrixa áll.

Fontos példa:. Ha ϕ-nek $\dim V$ különböző sajátértéke van, az 1 dimenziós sajátalterek direkt összege szerinti felbontás $\leftrightarrow$ ϕ mátrixának diagonalizálása.

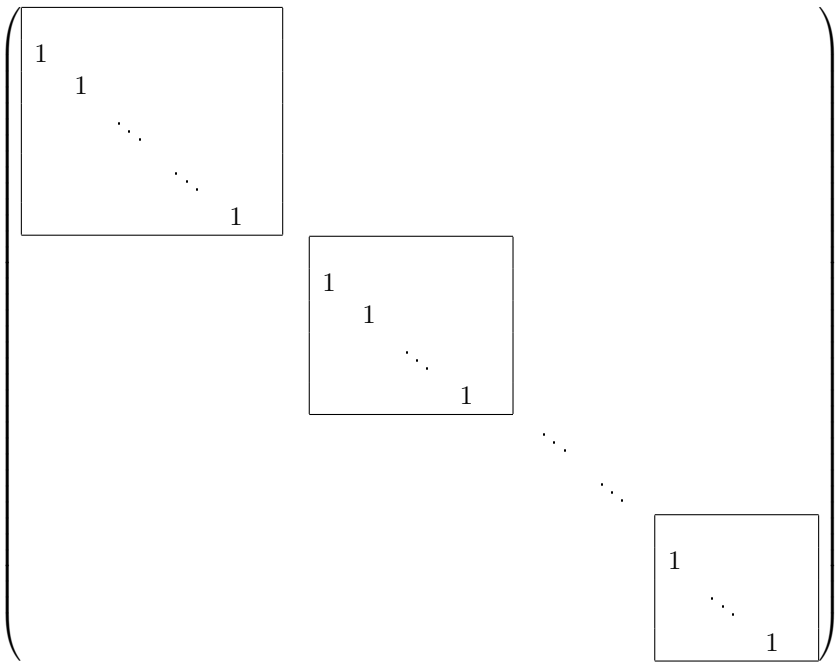
1.9.3. Nilpotens transzformációk

Lemma:. Tegyük fel, hogy $\phi^k v = 0$ valamely $0 \neq v \in V$-re és $k > 0$ egészre, és tegyük fel, hogy k a legkisebb ilyen szám. Ekkor a $v, \phi v, \ldots, \phi^{k-1} v$ vektorok lineárisan függetlenek. Következésképpen $k \leq \dim V$.
Biz.: k szerinti indukcióval. A $k = 1$ eset nyilvánvaló. A $k > 1$ esetben ϕv-re $k-1$ az a legkisebb ℓ kitevő, amelyre $\phi^\ell \phi v = 0$, így az indukciós feltevés miatt a $\phi v, \phi^2 v, \ldots, \phi^{k-1} v$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen $U = \langle \phi v, \phi^2 v, \ldots, \phi^{k-1} v \rangle$. Vegyük észre hogy U fenti bázisának minden elemére és így persze U minden u vektorára igaz, hogy $\phi^{k-1} u = 0$. Viszont $\phi^{k-1} v \neq 0$, ezért $v \notin U$ és így az egész $v, \phi v, \ldots, \phi^{k-1} v$ rendszer lineárisan független.

Definíció:. Egy $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció nilpotens, ha $\phi^k = 0$ valamely k természetes számra. A lemma miatt ez azzal egyenértékű, hogy $\phi^n = 0$ ($n = \dim V$) és azzal is, hogy minden $v \in V$ vektorra $\phi^{k_v} v = 0$ valamely $k_v >$ egészre.

Példa:. Deriválás n-nél alacsonyabb fokú polinomokra. Az összes polinom példája mutatja, hogy a végtelen dimenziós térben a harmadik feltétel nem elegendő.

Jordan-bázis nilpotens transzformációkra. Legyen $\phi : V \to V$ nilpotens lin. transzformáció. Ekkor léteznek olyan $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t$ pozitív egészek, és $v_1, \ldots, v_t$ vektorok, amelyekre a $v_1, \phi v_1, \ldots, \phi^{n_1-1} v_1, \ldots, v_t, \phi v_t, \ldots, \phi^{n_t-1} v_t$ a V tér egy bázisát alkotják és $\phi^{n_i} v_i = 0$. Azaz létezik olyan bázisa a V térnek, amelyben ϕ mátrixa



alakú. A t valamint az $n_1, \ldots, n_t$ számok egyértelműek.
Biz.: A létezés indukció $\dim V$ szerint. Mivel $\phi^n V = (0)$, nem lehet $\phi V = V$. Legyen $W = \phi V$. Ekkor W-re alkalmazzuk az indukciós feltevést: léteznek olyan $w'_1, \ldots, w'_s \in W$ vektorok, és $n'_1, \ldots, n'_s$ számok, amelyekre a $w_1, \phi w_1, \ldots, \phi^{n'_1-1} w_1$ $, \ldots,$ $w_s, \phi w_s, \ldots, \phi^{n'_s-1} w_s$ a W altér egy bázisát alkotják, továbbá $\phi^{n'_i} w_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\phi^{n'_1-1} w_1, \ldots, \phi^{n'_s-1} w_s$ vektorok szükségszerűen a ϕ transzformáció W-re való megszorításának a magjának (azaz a $W \cap \ker \phi$ altérnek) egy bázisát alkotják. Legyenek $t = \dim \ker \phi$ és $v_{s+1}, \ldots, v_t$ olyan vektorok, amelyek a $\phi^{n'_1-1} w_1, \ldots, \phi^{n'_s-1} w_s$ rendszert a $\ker \phi$ magtér bázisává egészítik ki. Legyenek továbbá $n_1 = n'_1 + 1$, …, $n_s = n'_s + 1$, $n_{s+1} = \ldots = n_t = 1$. A $v_1, \phi v_1$, stb. vektorok száma $\sum_{i=1}^{t} n_i = \sum_{i=1}^{s} n'_i + s + t - s = \dim \phi V + t = \dim \phi V + \dim \ker \phi = \dim V$. Azt kell tehát belátni, hogy vektoraink lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy az $\alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} \phi v_1 + \ldots + \alpha_{1n_1} \phi^{n_1-1} v_1 + \ldots + \alpha_{s1} v_s + \alpha_{s2} \phi v_s + \ldots + \beta_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \beta_t v_t$ lineáris kombináció a nulla vektort adja. Alkalmazzuk az összegre a ϕ leképezést. Kapjuk, hogy az $\alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} \phi w_1 + \ldots + \alpha_{s1} w_s + \alpha_{s2} \phi w_s + \ldots + \alpha_{sn_s} \phi^{n'_s-1} w_s$ kombináció is nulla. Ebből – mivel a $w_1, \phi w_1$, stb. vektorok lineárisan függetlenek – adódik, hogy az összes α_{ij} együttható 0, kivéve esetleg a ϕ alkalmazásával kieső α_{in_i} együtthatókat. Beírva a nullákat az eredeti kombinációba, marad a $0 = \alpha_{1n_1} \phi^{n_1-1} v_1 + \ldots + \alpha_{sn_1} \phi^{n_s-1} v_s + \beta_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \beta_t v_t$ egyenlőség. Itt a jobboldalon $\ker \phi$ egy bázisának elemeiből képzett lineáris kombinációja látható, ezért mind a "maradék" α együtthatók, mind a β együtthatók is nullák. Így tényleg lineárisan független rendszerünk van.
Az egyértelműség: $t =$ #láncok, $\dim \ker \phi^2 - \dim \ker \phi =$ #legalább 2 hosszú láncok, $\dim \ker \phi^j - \dim \ker \phi^{j-1} =$ #legalább j hosszú láncok.

1.9.4. Általánosított sajátvektor, sajátaltér

Általánosított sajátvektor:. Legyen λ egy skalár. A $0 \neq v \in V$ vektor ϕ-nek általánosított sajátvektora ϕ-nek λ sajátértékkel, ha $(\phi - \lambda I)^k v = 0$ valamely k pozitív egészre. A lemma miatt ez azzal ekvivalens, hogy $(\phi - \lambda I)^n = 0$ $(n = \dim V)$. A sajátérték elnevezést az indokolja, hogy ha k a legkisebb, a feltételnek elegendő szám, akkor $(\phi - \lambda I)^{k-1} v$ sajátvektora ϕ-nek λ sajátértékkel.

Általánosított sajátaltér:. Ha λ sajátvektora ϕ-nek, akkor a λ-hoz tartozó általánosított sajátaltér $\ker(\phi - \lambda I)^n$. (Azaz a λ-hoz tartozó általánosított sajátvektorokból és 0 vektorból álló altér.) Ez egyben a legtágabb altér, amelyen $\phi - \lambda I$ nilpotens.

Áll.:. Legyen V_λ a $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátaltere. Legyen m_λ a λ gyök multiplicitása ϕ karakterisztikus polinomjában. (Azaz a karakterisztikus polinom $(x-\lambda)^{m_\lambda} g(x)$, ahol $g(\lambda) \neq 0$. Ekkor $\dim V_\lambda = m_\lambda$.
Biz.: Olyan bázist veszünk, amelynek első néhány vektora V_λ egy bázisa. Egy ilyen bázisban ϕ mátrixa blokk felső háromszög alakú:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix},$$

és így a karakterisztikus polinom az A mátrix illetve a C mátrix karakterisztikus polinomjainak a szorzata. A ϕ transzformációnak a V_λ altérre való megszorításának megfelelő A mátrix a karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)^{\dim V_\lambda}$. (Ez a következőképpen látható: Legyen $W_0 = V_\lambda$, $W_i = (\phi - \lambda I)W_{i-1}$. Ekkor $W_k = 0$ valamely $k \leq n$ számra. Vegyük W_{k-1} egy bázisát, majd ezt egészítsük ki W_{k-2} egy bázisává, és így tovább. Így végül V_λ olyan bázisát kapjuk, amelyben ϕ (és $xI - \phi$) mátrixa alsó háromszög alakú csupa λ-val (illetve $(x-\lambda)$-val) a főátlóban.)
Jelöljük $h(x)$-szel a C mátrix karakterisztikus polinomját, Ekkor ϕ karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)^{\dim V_\lambda} h(x)$, ahol $h(x) = g(x)(x-\lambda)^t$ valamely $t \geq 0$ egészre. Tegyük fel, hogy $h(\lambda) = 0$. Ekkor $(C - \lambda I)w = 0$ valamely nem csupa nulla $n - \dim V_\lambda$ hosszú w oszlopvektorra. Legyen v egy olyan vektor V-ben, amelyet ha felírunk a választott bázisunkban, a "hátsó" koordináták éppen a w oszlopvektort adják ki. Ekkor $(\phi - \lambda I)v$ "hátsó" koordinátái éppen a $(C - \lambda I)w = 0$ oszlopvektort adják, ezért $(\phi - \lambda I)v \in V_\lambda$, és így $v \in V_\lambda$, ellentmondás azzal hogy v "hátsó" koordinátái a $w \neq 0$ vaktort adják. Tehát $h(\lambda) = 0$, és így $h(x) = g(x)$ és $m_\lambda = \dim V_\lambda$.

Áll:. Ha $\lambda \neq \mu$ skalárok, k_1, k_2 pozitív egészek és $v \in V$, amelyekre $(\phi - \lambda I)^{k_1} v = (\phi - \mu I)^{k_2} v = 0$, akkor $v = 0$. **Biz.** Ha valamely α skalárra $(\phi - \alpha I)v = 0$, akkor $\phi v = \alpha v$. Ha $\alpha \neq \lambda$, akkor $(\phi - \lambda I)v = (\alpha - \lambda)v$. Ezért $(\phi - \lambda I)^{k_1} v = (\phi - \lambda)^{k_2} v = 0$, ahonnan $v = 0$. Hasonlóan kapjuk a $v = 0$ egyenlőséget az $\alpha = \lambda$ esetben, hiszen akkor $\alpha \neq \mu$ és λ helyett μ használható. Feltehető tehát, hogy $(\phi - \alpha I)v \neq 0$ semelyik α skalárra sem. Ekkor tetszőleges α skalárra legyen U_α az a legszűkebb v-t tartalmazó altere V-nek, amely $\phi - \alpha I$-invariáns. Mivel $\phi = (\phi - \alpha I) + \alpha I$, U_α ugyanaz, mint a legszűkebb v-t tartalmazó ϕ-invariáns altér, tehát $U_\alpha = U_0 = U_\beta$ tetszőleges α, β skalárokra. Az $\alpha = \lambda$ választással $U\alpha$ egy generátorrendszere $v, (\phi - \lambda I)v, \ldots, (\phi - \lambda I)^{k_1 - 1} v$ míg $\alpha = \mu$ választással a kézenfekvő generátorrendszer $v, (\phi - \mu I)v, \ldots, (\phi - \mu I)^{k_2 - 1} v$. Ha $v \neq 0$, akkor legyen u az első sorozatnak azon nem 0 tagja, amelyre $(\phi - \lambda I)u = 0$. Ekkor, mivel u előáll mint a második sorozat tagjainak lineáris kombinációja, így $(\phi - \mu I)^{k_1} u = 0$ és így a már tárgyalt eset miatt $u = 0$, ellentmondás.

Az általánosított sajátalterek lineárisan függetlenek:. Legyenek $v_1, \ldots, v_s$ olyan vektorok, amelyekre $(\phi - \lambda_j I)^n v_j = 0$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ páronként különböző skalárok. Ekkor a $v_1 + \ldots + v_s$ összeg csak úgy lehet 0, hogy $v_1 = \ldots = v_s = 0$.
Biz.: s szerinti indukció. Alkalmazzuk Az összegre a $(\phi - \lambda_s I)^n$ lineáris transzformációt. kapjuk, hogy $v_1' + \ldots + v_{s-1}' = 0$, ahol $v_j' = (\phi - \lambda_s I)^n v_j$. A $(\phi - \lambda_j I)(\phi - \lambda_s I) = (\phi - \lambda_s I)(\phi - \lambda_j I)$ felcserélhetőségi tulajdonság segítségével a $(\phi - \lambda_j I)^n v_j' = 0$ egyenlőség könnyen igazolható. Így az indukciós feltevés miatt $v_1' = \ldots, v_{s-1}' = 0$. Az előző állítás miatt ebből $v_1 = \ldots, v_{s-1} = 0$ következik, majd ezeket beírva az eredeti egyenlőségbe marad a $v_s = 0$ egyenlőség.

Tétel:. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$-re V a ϕ általánosított sajátaltereinek direkt összege.
Biz.: Ezek az alterek lineárisan függetlenek. Ugyanakkor a ϕ karakterisztikus polinom gyökeinek multiplicitását az általánosított sajátalterek dimenziójával összekapcsoló állítás alapján a dimenziók összege $\dim V$.

1.9.5. Jordan-bázis

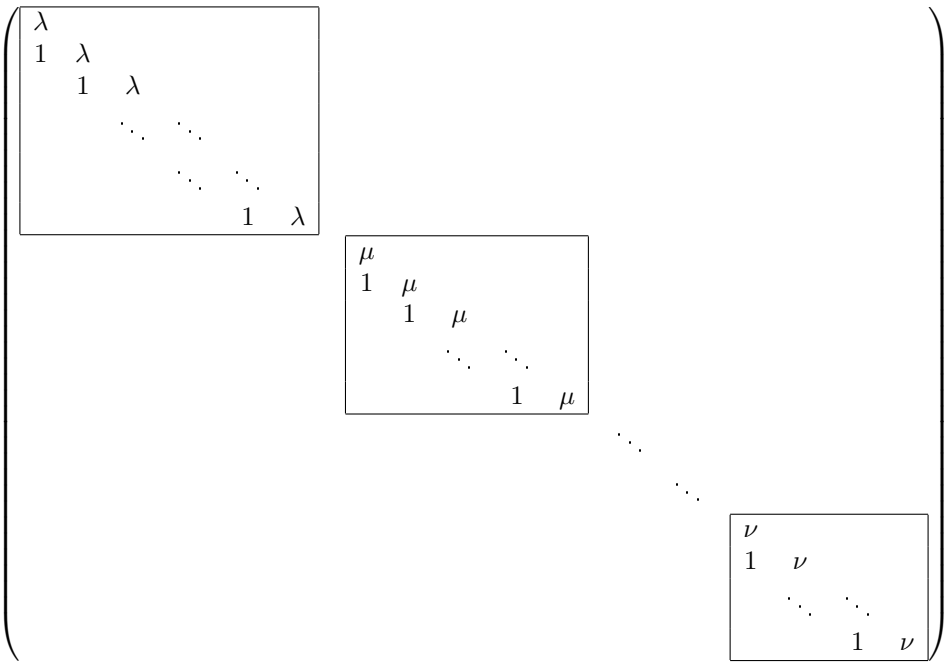
Általánosított sajátaltér Jordan-bázisa:. Legyen V_λ a ϕ lineáris transzformációjának λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátaltere. Ekkor $\phi - \lambda I$ megszorítása V_λ-n nilpotens. Ennek a nilpotens transzformációnak egy Jordan-bázisát tekintjük. A V_λ altér egy Jordan-bázisban ϕ megszorításának a mátrixa blokk-diagonális, ahol a főátlóban elhelyezkedő blokkok speciális szerkezetűek:

Jordan-blokk:. Legyen $v \in V$, amelyre $(\phi - \lambda I)^m v = 0$, de $v, (\phi - \lambda I)v, \ldots, (\phi - \lambda I)^{m-1} v$ lineárisan függetlenek. A $\langle v, (\phi - \lambda I)v, \ldots, (\phi - \lambda I)^{m-1} v \rangle$ altér ϕ-invariáns és ϕ megszorításának a mátrixa a $v, (\phi - \lambda I)v, \ldots, (\phi^- \lambda I)m - 1v$ bázisban:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Egy ilyen mátrixot **Jordan-blokknak** hívunk.

Jordan-normálalak. Egy négyzetes mátrixot Jordan-normálalakúnak hívunk, ha blokk-diagonális, és a főátlóban elhelyezkedő blokkok Jordan-blokkok:



Tétel. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ esetén V-nek van olyan bázisa, amelyben ϕ mátrixa Jordan-normálalakú. (Mátrixokra megfogalmazva: egy négyzetes komplex mátrix hasonló egy Jordan-normálalakú mátrixhoz.) Az adott λ paraméterű és m méretű diagonális blokkok száma a ϕ transzformáció (illetve a mátrix) által egyértelműen meghatározott.

Biz.: Az előző tétel miatt V a ϕ általánosított sajátaltereinek direkt összege. A λ sajátértékhez tartozó altéren $\phi - \lambda I$ nilpotens így a nilpotens mátrixok Jordan-bázisáról szóló állítás miatt fenti típusú alterek direkt összegére bontható tovább: Létezik V-nek olyan bázisa, amelyben ϕ mátrixa blokk-diagonális és ahol a diagonális blokkok Jordan-blokkok. Ugyanezen tétel alapján az adott λ paraméterű és m méretű diagonális blokkok száma a ϕ egyértelműen meghatározott. **Elnevezés:** A mátrix, illetve transzformáció Jordan-normálalakja.

A Hamilton–Calyley-tétel. Legyen $\phi : V \to V$ lineáris transzformáció és legyen ϕ karakterisztikus polinomja $f(x)$. Ekkor $f(\phi) = 0$. Ha egy A négyzetes mátrix karakterisztikus polinomja $f(x)$, akkor $f(A) = 0$.

Tetszőleges alaptestre igaz. A komplex (következésképpen a valós, a racionális, stb.) számok testje feletti vektorerek lineáris transzformációira illetve komplex (valós, racionális) mátrixokra és annak résztestjeire a Jordan-normálalakból könnyen következik.

Minimálpolinom. Legyen $\phi : V \to V$ egy lineáris transzformáció és $0 \neq f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinomok. Ha $f(\phi) = g(\phi) = 0$, továbbá $\deg f(x) \leq \deg g(x)$, akkor $g(x)$-nek a az $f(x)$ szerinti maradékos osztásánál kapott $h(x)$ $f(x)$-nél alacsonyabb fokú maradékra is igaz, hogy $h(\phi) = 0$. Ezért egyértelműen létezik egy legalacsonyabb 1 főegyütthatós $f(x)$ polinom, amire $f(\phi) = 0$, továbbá az összes olyan $g(x)$ polinom, amire $g(\phi) = 0$ az $f(x)$-nek többszöröse $\mathbb{F}[x]$-ben. A karakterisztikus polinom tehát többszöröse a minimálpolinomnak.

1.10. Euklideszi terek

1.10.1. Szimmetrikus bilineáris függvények:

Bilineáris függvény:. Legyen V vektortér az $\mathbb{F}$ test felett. A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ függvény bilineáris, ha mindkét változójában lineáris, azaz

- $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$ és $\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$ $(\forall u, u', v, v' \in V)$
- $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ és $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $(\forall u, v, \in V, \lambda \in \mathbb{F})$

Gram-mátrix:. Legyen $v_1, \ldots, v_n$ egy bázis V-ben. A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény $v_1, \ldots, v_n$ bázisára vonatkozó Gram-mátrixa az $A = (a_{ij})$ mátrix, ahol $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Ha $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ és $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, akkor a bilinearitás miatt $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j a_{ij}$, tehát egy tetszőleges rögzített bázis esetén a Gram-mátrix egyértelműen meghatározza a bilineáris függvényt. Fordítva, az is világos, hogy az előbbi szabály segítségével minden előírt A mátrixhoz tudunk is olyan bilineáris függvényt fabrikálni, aminek A a Gram-mátrixa. A megfeleltetés nyilván lineáris is, tehát egy izomorfizmust ad a bilineáris függvények tere és az $n \times n$-es mátrixok tere között.

Példa:. Legyen A egy $n \times n$-es $\mathbb{F}$–beli elemekből felépülő mátrix. Legyen az $\mathbb{F}^n$–beli u, v vektorpárokon

$$\langle u, v \rangle = u^T A v.$$

Ekkor $\langle \, , \, \rangle$ egy bilineáris függvény $\mathbb{F}^n$-en, aminek Gram- mátrixa a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, v_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorokból álló standard bázisban éppen A.

Standard skalárszorzat F^n-en:. $(u, v) = u^T v$. A fenti példa $A = I_n$ egységmátrixszal.

Kapcsolat:.

$$u^T A v = (u, Av) = (A^T u, v).$$

Az első egyenlőség a standard skalárszorzat definíciója alapján világos, míg a harmadik alak a transzponálás tulajdonsága alapján a következőképpen vezethető le: $(A^T u, v) = (A^T u)^T v = (u^T A) v = u^T (Av)$.

Báziscsere hatása a Gram-mátrixra:. Legyen $v_1, \ldots, v_n$ és $v'_1, \ldots, v'_n$ két bázis V-ben, amelyekben az $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény Gram-mátrixa A, illetve A'. Ha az első bázist a másodikba vivő báziscsere mátrixa C, akkor $A' = C^T A C$.
Biz.: Legyen $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Ekkor

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \langle v'_i, v'_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n c_{ki} v_k, \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} v_\ell \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n c_{ki} \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} a_{k\ell} \end{aligned}$$

Itt adott k-ra a belső összegben az AC mátrix k-adik sorának j-edik eleme áll, majd ez a C^T mátrix i-edik sorának k-adik elemével van megszorozva. Ezért a végső összeg a $C^T AC$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

Szimmetrikus bilineáris függvény:. A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény szimmetrikus, ha $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ tetszőleges $u, v \in V$ esetén. Az bázisról történő egyértelmű lineáris kiterjesztés miatt világos, hogy egy bilineáris függvény akkor és csak akkor szimmetrikus, ha Gram- mátrixa valamely ($\Leftrightarrow$ bármely) bázisban szimmetrikus.

Példa:. A standard skalárszorzat $\mathbb{F}^n$-en egy szimmetrikus bilineáris függvény.

Kvadratikus alakok:. Legyen F olyan test, amelyben $2 (:= 1+1) \neq 0$. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, azaz egy szimmetrikus bilineáris függvény Gram-mátrixa. Ekkor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorra

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} 2 a_{ij} x_i x_j$$

egy homogén másodfokú polinom az $x_1, \ldots, x_n$ változókban. Elnevezés: kvadratikus alak.

Fordítva, ha $Q(\underline{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j} b_{ij} x_i x_j$ egy homogén másodfokú polinom, akkor az

$$a_{ii} := b_{ii}, \;\; a_{ij} := a_{ji} = \frac{1}{2} b_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

egyenlőségekkel definiált $A = (a_{ij})$ mátrix szimmetrikus és $\underline{x}^T A \underline{x} = Q(\underline{x})$.

Ortogonális, ortonormált bázis. A V vektortér $v_1, \dots, v_n$ bázisa ortogonális a $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ bilineáris függvényre nézve, ha $1 \leq i \neq j \leq n$ esetén $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Ortonormált, ha még $1 \leq i \leq n$ esetén $\langle v_i, v_i \rangle = 1$. Azaz a bázis ortogonális, ha szerinte felírva $\langle , \rangle$ mátrixa diagonális és ortonormált, ha a mátrix I_n.

Példa. $\mathbb{R}^n$-ben a standard bázis ortonormált a standard skalárszorzásra nézve. $\mathbb{R}^2$-ben az $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ vektorok is ortonormált bázist alakoznak

Merőlegesség, merőleges altér:. Legyen $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ szimmetrikus bilineáris függvény. Azt mondjuk, hogy az $u, v \in V$ vektorok merőlegesek egymásra ($\langle , \rangle$ szerint) – jel.: $u \perp v$ –, ha $\langle u, v \rangle = 0$. Ha G egy részhalmaz V-ben, akkor a G-re merőleges V–beli vektorok egy alteret alkotnak, amelyre a $G^\perp$ jelölést alkalmazzuk. Világos, hogy $G \subseteq H$ esetén $G^\perp \geq H^\perp$ és $\langle G \rangle^\perp = G^\perp$. Továbbá $G \subseteq (G^\perp)^\perp$ és így $\langle G \rangle \leq (G^\perp)^\perp$.

1.10.2. Euklideszi terek

Definitség:. A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvény

- pozitív definit, ha $\forall\, 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle > 0$
- pozitív szemidefinit, ha $\forall\, v \in V$ vektorra $\langle v, v \rangle \geq 0$
- negatív definit, negatív szemidefinit hasonlóan definiálható
- indefinit, ha $\exists\, u, v \in V$, amelyekre $\langle u, u \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle < 0$

Példa:. $\mathbb{R}^2$-en $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$ egy indefinit szimmetrikus bilineáris függvény.

HF. Legyen $\langle\ ,\ \rangle$ szimmetrikus bilineáris függvény Gram-mátrixa a $v_1, \dots, v_n$ bázisban A.

- Mutassuk meg, hogy ha A akkor és csak akkor szinguláris, ha van olyan $0 \neq V$ vektor, amely merőleges (azaz $\langle v, w \rangle = 0$) minden $w \in V$ vektorra.
- Mutassuk meg, hogy amellett a feltevés mellett, hogy $\langle\ ,\ \rangle$ pozitív szemidefinit, A akkor és csak akkor szinguláris, ha van olyan $0 \neq V$ vektor, amely merőleges önmagára (azaz $\langle v, v \rangle = 0$).
- Mutassuk meg, hogy a szemidefinitség feltevése nélkül az önmagára merőleges nem-nulla vektor létezése szükséges, de nem elégséges feltétele A szingularitásának.

Euklideszi tér:. Valós vektortér egy pozitív definit $\langle , \rangle$ szimmetrikus bilineáris függvénnyel. Euklideszi térben a v vektor **hossza** a $\sqrt{\langle v, v \rangle}$ szám.
Példa: $\mathbb{R}^n$ a standard skalárszorzattal

Euklideszi tér altere is euklideszi tér:. a $\langle , \rangle$ megszorításával.

Ortonormált bázis létezése:. Legyen $V, \langle , \rangle$ egy euklideszi tér. Ekkor létezik V-ben ortonormált bázis.
Biz. (Gram–Schmidt-ortogonalizáció): Legyen V-nek egy bázisa $v_1, \dots, v_n$. A definitség miatt $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$, azaz $v_1 \notin v_1^\perp$; továbbá értelmes és lineáris a

$$\pi : w \mapsto w - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

leképezés. Ennek a magja $\langle v_1 \rangle$, képtere pedig $v_1^\perp$. Cseréljük ki a $v_2, \dots, v_n$ bázisvektorokat rendre a $\pi v_2, \dots, \pi v_n$ vektorokkal. Mivel v_j-ből v_1 skalárszorosát vontuk le, az új rendszer ismét egy bázis és így az új $v_2, \dots, v_n$ vektorok a $v^\perp$ altér egy bázisát alkotják. Iteráljuk a konstrukciót a $v_1^\perp$ altérre: tekintsük a $0 \neq v_2 \in v_1^\perp$ vektort, majd folytassuk az eljárást v_1 helyett v_2-vel a $\{v_1, v_2\}^\perp$ altéren, és így tovább. Az iteráció során mindig olyan vektorokból álló altereken dolgozunk, amelyek merőlegesek az addig kiválasztott vektorokra. Ezért világos, hogy ortogonális bázist kaptunk. Végül, mivel $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, a v_i vektort leosztva $\sqrt{\langle v_i, v_i \rangle}$-vel ortonormált bázist kapunk.

Megjegyzések.

- A Gram-Schmidt–eljárásban az iteráció végére kialakuló báziscsere mátrixa – mivel minden lépésben egy bázisvektorhoz egy kisebb indexű bázisvektor skalárszorosát adjuk hozzá – olyan felső háromszög alakú mátrix, amelynek a főátlójában csupa 1 áll:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ & 1 & * & \dots & * \\ & & 1 & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

  A normálást is tartalmazó báziscsere mátrixa is felső háromszög alakú, pozitív elemekkel a főátlóban.

- Az utolsó normáló lépés kivételével a módszer alkalmas változata elég széles körben alkalmazható. Például racionális számok feletti vektorerek szimmetrikus bilineáris függvényekre is értelmezhető a definitség, sőt, a definitség helyettesíthető a $V^\perp = (0)$ feltétellel és az alaptestre vonatkozó elég enyhe megszorítással is. (Arra kell vigyázni, hogy esetleg olyan v_i bázisvektorba botlunk, amelyre $\langle v_i, v_i\rangle - 0$. Ebben az esetben v_i-t alkalmas más vektorra le kell cserélni. A testre vonatkozó megszorítás az $1 + 1 \neq 0$ feltétel, azaz a kételemű test és az azt tartalmazó testek kivételével ez a csere $V^\perp = (0)$ esetén mindig végrehajtható.)

- Az eljárás alkalmas egy adott szimmetrikus bilineáris függvény pozitív definitségének eldöntésére is. Ugyanis az eljárás nyilván végigmegy, ha annak során nem jön elő olyan v vektor, amelyre $\langle v, v\rangle \leq 0$. Ekkor viszont a végső $v_1, \dots, v_n$ bázis ortogonális és $(v_i, v_i) > 0$, így

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle v_i, v_i\rangle > 0,$$

  ha legalább egy $\alpha_i \neq 0$.

Példa. Legyen V bázisa v_1, v_2, v_3, és ebben a bázisban legyen a $\langle , \rangle$ Gram-mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Első menetben a v_2 és v_3 vektorokat vetítjük a $v_1^\perp$ síkra: $v_2' = v_2 - 2v_1, v_3' = v_3 - v_1$. A $v_1 \mapsto v_1, v_2 \mapsto v_2', v_3 \mapsto v_3'$ báziscsere mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

így az új bázisban a Gram-mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A következő körben a v_3' vektort vetítjük a v_2'-re merőleges egyenesesre: $v_3'' = v_3' - 2v_2'$. Az v_1, v_2', v_3'' bázisban a Gram-mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tehát $\langle , \rangle$ indefinit: $\langle v_1, v_1\rangle > 0$, de $\langle v_3'', v_3''\rangle > 0$ A $v_1, v_2, v_3 \to v_1, v_2', v_3''$ báziscsere mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megj. A Gram-mátrix karbantartásánál sok esetben érdemes sorok és oszlopok szerinti Gauss-eliminációként felfogni: Például a v_i $v_1^\perp$-ra való vetítésénél le kell vonni a j-edik sorból az első sor $\frac{(v_1,v_i)}{(v_1,v_1)}$-szeresét, hogy kiküszöbölődjön az i-edik sor első eleme; ezután pedig az i-edik oszlopból az első oszlop $\frac{(v_1,v_j)}{(v_1,v_1)}$-szeresét vonjuk le, kiküszöbölve az első

sor i-edik elemét. A fenti példában először – akárcsak a Gauss-eliminációnál – levonjuk a második sorból az első sor kétszeresét. Az eredmény

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ezután levonjuk az első oszlop kétszeresét a második oszlopból. Az eredmény

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ennek a két lépésnek az eredménye a $\langle , \rangle$ Gram-mátrixa abban a bázisban, amit úgy kapunk az eredetiből, hogy a második bázisvektort kicseréltük az első bázisvektorra – $\langle , \rangle$ szerint – merőleges vetületére. A harmadik bázisvektor elsőre merőleges vetítésének eredménye két lépésben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ majd } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Végül az új harmadik bázisvektornak az új másodikra merőleges vetítésének eredménye két lépésben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ majd } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

HF:. Mutassuk meg, hogy ha V egy valós vektortér és $\langle , \rangle$ egy szimmetrikus bilineáris függvény V-n és $u \in V$ olyan vektor, amelyre $\langle u, u \rangle = 0$ de $u \notin V^{\perp}$, akkor $\langle , \rangle$ nem lehet pozitív szemidefinit.
Ennek a megállapításnak a felhasználásával hogyan lehet módosítani a fenti eljárást pozitív szemidefinitség eldöntésére?

Megj:. A fenti eljárás segítségével igazolható, hogy $\mathbb{R}^n$-en $\langle , \rangle$ akkor és csak akkor pozitív definit, ha valamely (bármely) bázisban felírt A Gram-mátrixára igaz az hogy minden $1 \leq j \leq n$-re A bal felső $n \times n$-es blokkjának a determinánsa pozitív.

Izometria:. Legyenek $V_1, \langle , \rangle$ és $V_2, \langle , \rangle_2$ szimmetrikus bilineáris függvénnyel ellátott terek. Azt mondjuk, hogy a $\phi : V_1 \to V_2$ lineáris bijekció izometria a két tér között, ha még tetszőleges $v, w \in V_1$ vektorokra $\langle v, w \rangle = \langle \phi v, \phi w \rangle_2$. A két tér izometrikus, ha létezik közöttük izometria. Az bázisról való (bi)lineáris kiterjesztés miatt ez azzal ekvivalens, hogy létezik a két térnek egy-egy bázisa, amelyekben a bilineáris függvények Gram-mátrixa ugyanaz. Speciálisan:

Azonos dimenziójú euklideszi terek izometrikusak:. Ha $v_1, \ldots, v_n$ a $V, \langle , \rangle$ euklideszi tér egy ortonormált bázisa, akkor a $v_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $v_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_n \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ leképezés lineáris kiterjesztése izometria $V, \langle , \rangle$ és $\mathbb{R}^n, (,)$ között.

Megj.:. Az izometria távolságtartó leképezést jelent. A két térben a távolság $\sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$, illetve $\sqrt{\langle u - v, u - v \rangle_2}$. Nem nehéz belátni, hogy a 0-t 0-be vivő $\phi : V_1 \to V_2$ nem feltétlenül lineáris távolságtartó leképezések éppen a fenti értelemben vett (lineáris) izometriák.

1.10.3. Komplex euklideszi terek

Más neveken: véges dimenziós Hilbert-terek, unitér terek, Hermite–féle terek, hermitikus terek.

Másfél-lineáris (sesquilinear) függvények:. Legyen V egy komplex test feletti vektortér. A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ függvény másfél-lineáris, ha második változójában lineáris, az első változójában pedig konjugált-lineáris (avagy antilineáris):

- $\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$ $(\forall u, v, v' \in V)$
- $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $(\forall u, v, \in V, \lambda \in \mathbb{C})$

- $\langle u+u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$ $(\forall u, u', v' \in V)$
- $\langle \lambda u, v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$ $(\forall u, v, \in V, \lambda \in \mathbb{C})$

ahol $\overline{\lambda}$ az λ szám komplex konjugáltját jelenti.

Gram-mátrix:. Ugyanaz, mint a bilineáris esetben. Tetszőleges mátrixhoz egyértelműen található olyan másfél-lineáris függvény, amelynek ő a Gram-mátrixa az adott bázisban. (Az első változó szerinti kiterjesztést konjugált-lineárisan kell csinálni.)

Hermitikus függvény (vagy Hermite–féle függvény):. Legyen V egy komplex test feletti vektortér. A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ másfél-lineáris függvény hermitikus, ha konjugált-szimmetrikus:

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} \quad \forall u, v \in V).$$

Példa: standard skalárszorzás $\mathbb{C}^n$-en:. $(u, v) = u^* v$.

Mátrixok, vektorok adjungáltja:. Az A $m \times n$-es (a_{ij}) mátrix A^* adjungáltja az az (a'_{ij}) $n \times m$-es mátrix, amelyre $a'_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $(i = 1, \dots n, j = 1, \dots m)$. Ha A egy $m \times n$-es mátrix, B pedig egy $n \times k$-as mátrix, akkor $(AB)^* = B^* A^*$.

Példa:. Legyen A egy tetszőleges $n \times n$-es komplex mátrix. Ekkor $\langle u, v\rangle_A = u^* A v = (u, Av)$ egy másfél-lineáris bilineáris függvény $\mathbb{C}^n$-en, amelynek Gram-mátrixa a standard bázisban éppen A.

Megj.:. $(A^* u, v) = (A^* u)^* v = u^* A v = (u, Av)$.

Báziscsere hatása a Gram-mátrixra:. Legyen $v_1, \dots, v_n$ és $v'_1, \dots, v'_n$ két bázis V-ben, amelyekben az $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ hermitikus függvény Gram-mátrixa A, illetve A'. Ha az első bázist a másodikba vivő báziscsere mátrixa C, akkor $A' = C^* A C$.
Biz.: Legyen $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Ekkor

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \langle v'_i, v'_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} v_k, \sum_{\ell=1}^{n} c_{\ell j} v_\ell \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{ki}} \sum_{\ell=1}^{n} c_{\ell j} a_{k\ell} \end{aligned}$$

Itt adott k-ra a belső összegben az AC mátrix k-adik sorának j-edik eleme áll, majd ez a C^* mátrix i-edik sorának k-adik elemével van megszorozva. Ezért a végső összeg a $C^* AC$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

Megj:. Hermitikus függvényre $\langle u, u\rangle = \overline{\langle u, u\rangle}$, tehát $\langle u, u\rangle$ mindig valós.

Definitség:. A valós szimmetrikus esetekkel analóg fogalmak: A $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ hermitikus bilineáris függvény

- pozitív definit, ha $\forall 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v\rangle > 0$
- pozitív szemidefinit, ha $\forall 0 \neq v \in V$ vektorra $\langle v, v\rangle \geq 0$
- negatív definit, negatív szemidefinit hasonlóan definiálható
- indefinit, ha $\exists u, v \in V$, amelyekre $\langle u, u\rangle > 0$, $\langle v, v\rangle < 0$

Komplex euklideszi tér:. Komplex vektortér egy pozitív definit $\langle , \rangle$ hermitikus függvénnyel. Euklideszi térben a v vektor **hossza** a $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ szám.
Példa: $\mathbb{C}^n$ a standard skalárszorzattal

Euklideszi tér altere is euklideszi tér.

Ortogonális, ortonormált bázis. A valós szimmetrikus esettel megegyező definíció

Merőlegesség, merőleges altér:. A valós szimmetrikus esettel analóg reláció.

Ortonormált bázis létezése:. A valós esetre bemutatott Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik.

Izometria:. A valós esettel azonos definíció.

Azonos dimenziójú euklideszi terek izometrikusak:. Ha $v_1, \dots, v_n$ a $V, \langle , \rangle$ euklideszi tér egy ortonormált bázisa, akkor a $v_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $v_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_n \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ leképezés lineáris kiterjesztése izometria $V, \langle , \rangle$ és $\mathbb{C}^n, (,)$ között.

Ezután:. Valós vagy komplex euklideszi terekben a $(,)$ jelölést használjuk $\langle , \rangle$-ra.

Vektorok hossza:. (valós vagy komplex) euklideszi terekben $|v| = \sqrt{(v,v)}$

Valós → komplex áttérés. : Legyen $v_1, \dots, v_n$ egy ortonormált bázis egy V valós euklideszi térben. Ekkor V mint valós vektortér izometrikus módon beágyazható egy V' n dimenziós komplex euklideszi térbe (ami a valós test felett $2n$ dimenziós) úgy, hogy a $v_1, \dots, v_n$ báziselemeknek V' egy $v_1' \dots, v_n'$ ortonormált bázisa felel meg.
konstrukció: $v_1, \dots, v_n \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ standard bázisa: $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ izometria. A beágyazás második része: $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{C}^n$ (valós koordinátájú vektorok), és $\mathbb{R}^n$ standard skalárszorosa a $\mathbb{C}^n$ skalárszorzásának megszorítása.

Metaköv.:. Fenti beágyazást használva sokszor elég valós euklideszi terekre vonatkozó tételeket a komplex esetre igazolni.

Alkalmazás: a Cauchy-Schwarz–egyenlőtlenség:.

- Komplex (vagy valós) euklideszi térben
$$|(u,v)| \leq |u||v|.$$

  Biz.: Az ekvivalens $|(u,v)|^2 \leq (u,u)(v,v)$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Ha $u = 0$, akkor mindkét oldal 0. Az $u \neq 0$ esetben bontsuk fel v-t u-val párhuzamos és u-ra merőleges vektorok összegére: $v = \mu u + v'$, ahol $\mu = \frac{(u,v)}{(u,u)}$ és $v' = v - \mu u$. Ekkor $(v,v) = |\mu|^2(u,u) + (v',v')$ és $|(u,v)|^2 = |\mu|^2(u,u)^2$. A baloldalon tehát $|\mu|^2(u,u)^2$ áll, míg a jobboldalon $|\mu|^2(u,u)^2 + (u,u)(v',v')$. A két oldal különbsége $(u,u)(v',v')$ a jobboldal javára.
  Megj. A bizonyítás során végül is az u és v vektorokat tartalmazó síkban (vagy egyenesen) dolgoztunk.

- Kifejtett alak:
$$\left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i \overline{y_i}\right).$$

- Négyzetesen integrálható függvényekre
$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int |f(x)|^2\,dx \int |g(x)|^2\,dx.$$

  (Itt $(h_1(x), h_2(x)) = \int \overline{h_1(x)} h_2(x)$ és a Cauchy-Schwarz–egyenlőtlenséget az $\overline{f(x)}, g(x)$ párra alkalmazzuk.)

1.10.4. Normális mátrixok

Ebben részben a $V = \mathbb{C}^n$ vektortérben dolgozunk, a standard skalárszorzattal és a mátrixok (hacsak mást nem mondunk) $n \times n$-es komplex mátrixok. Diagonalizálható mátrixok egy széles körét definiáljuk.

Emlékeztető (alterek direkt összege):. A V vektortér direkt összege a $0 < V_1, \dots, V_\ell \leq V$ altereknek, ha minden $v \in V$ vektor egyértelműen előáll $v = v_1 + \dots + v_\ell$ alakban, ahol $v_1 \in V_1, \dots, v_\ell \in V_\ell$. Más szavakkal: $V = \langle V_1, \dots, V_\ell$ és a $V_1, \dots, V_\ell$ alterek lineárisan függetlenek.

Páronként mérőleges alterek lineárisan függetlenek. . Legyenek $V_1, \ldots, V_r$ alterek, amelyek páronként merőleges egymásra. Tegyük fel, hogy $0 = v_1 + \ldots + v_r$, ahol $v_i \in V_i$. Ekkor $(v_i, v_j) = 0$ és így

$$0 = (0,0) = (v_1, v_1) + \ldots + (v_r, v_r).$$

Mivel $v_i \neq 0$ esetén $(v_i, v_i) > 0$, fenti összeg csak úgy lehet 0, ha $v_i = 0$ minden i-re.

Köv.. Ha $V_1, \ldots, V_r$ páronként merőlegesek, akkor $\langle V_1, \ldots, V_r \rangle$ a $V_1, \ldots, V_r$ alterek direkt összege. Következésképpen

$$\dim\langle V_1, \ldots, V_r \rangle = \dim V_1 + \ldots + \dim V_r.$$

Ortokomplementer altér:. $W \leq V$ esetén V a W és $W^\perp$ alterek direkt összege. Következésképpen $W = (W^\perp)^\perp$.
Biz. W és $W^\perp$ nyilván merőleges egymásra, ezért lineárisan függetlenek. Legyen $k = \dim W$. Ahhoz, hogy W és $W^\perp$ együtt kifeszítik V-t az előző következmény miatt elég megmutatni, hogy $\dim W^\perp \geq n - k$. Legyen $w_1, w_2, \ldots, w_k$ a W altér egy bázisa. Legyen ϕ a

$$\phi : v \mapsto \begin{pmatrix} (w_1, v) \\ (w_2, v) \\ \vdots \\ (w_k, v) \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés V-ből a $\mathbb{C}^k$ térbe. Világos, hogy $v \in \ker\phi \Leftrightarrow (v, w) = 0$ minden $w \in W$ vektorra. Ezért $\ker\phi = W^\perp$ és így a dimenziótétel miatt $n - k \leq n - \dim(\phi V) = \dim\ker\phi = \dim W^\perp$.

Az adjungált mátrix néhány tulajdonsága:. Legyen $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$ és A egy $m \times n$-es komplex mátrix. Ekkor

- $\ker A = (A^*W)^\perp$
  Biz.: $v \in \ker A;\ \Leftrightarrow\ (w, Av) = 0\ (\forall w \in w) \Leftrightarrow\ (A^*w, Av) = 0\ (\forall w \in W)$
- $\ker A^* = (AV)^\perp$
  Biz.: Az előző egyenlőség A helyett az A^* adjungált mátrixszal.
- $AV = (\ker A^*)^\perp$
  Biz: Az előző egyenlőségnél a mindkét oldalra merőleges alteret vesszük.
- $A^*W = (\ker A)^\perp$
  Biz.: Az előző egyenlőség A helyett az A^* adjungált mátrixszal.
- **Köv.** $\mathbb{C}^n$ az A mátrix magjának ($\ker A$) és az A^* mátrix képterének (A^*V) direkt összege.
- **Köv.** $\mathbb{C}^m$ az A^* mátrix magjának ($\ker A^*$) és az A mátrix képterének (A^*W) direkt összege.

Unitér mátrixok. Az U $n \times n$-es mátrix unitér, ha $U^*U = I$.

Áll.:. U unitér $\Leftrightarrow$ U^* unitér.
Biz.: $\Rightarrow$: Ha U unitér, akkor $U^* = U^{-1}$, így $(U^*)^*U^* = UU^* = I$.

Áll.:. U, U' unitér $\Rightarrow$ UU' unitér.

Áll.:. U unitér $\Leftrightarrow$ U oszlopai egy ortonormált rendszert alkotnak $\Leftrightarrow$ U sorai ortonormált rendszert alkotnak.

Átfogalmazva.:. Ekvivalensek:

- U unitér
- U a standard bázist egy ortonormált bázisba viszi
- $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ izometria
- U $\mathbb{C}^n$ valamely ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi
- U $\mathbb{C}^n$ bármely ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi

Def.:. A **normális**, ha felcserélhető az adjungáltjával: $AA^* = A^*A$. (Valósra: $AA^T = A^TA$.)

HF:. Mutassuk meg, hogy egy felső háromszögmátrix akkor és csak akkor normális, ha diagonális.

Példák:.

- Diagonális mátrixok
- Önadjungált vagy hermitikus (valósra: szimmetrikus) mátrixok: $A^* = A$ (valósra $A^T = A$)
  Megj.: ugyanaz, mintha az $\langle u, v\rangle := (u, Av)$ hermitikus (valósra szimmetrikus)
- Unitér (valósra ortogonális) mátrixok: $U^*U = I$ (valósra $U^T = U$)
- Ferdén hermitikus (valósra ferdén szimmetrikus) mátrixok: $A^* = -A$ ($A^T = -A$).

Áll.:. Ha U unitér és A normális, akkor $U^{-1}AU$ is normális.

Áll.:. Ha A normális, akkor $\ker A = \ker A^*$ és $AV = A^*V$. Következésképpen V a $\ker A$ és az AV alterek direkt összege.
Biz.: Tegyük fel hogy $v \in \ker A$. Ekkor $(A^*v, A^*v) = (v, AA^*v) = (v, A^*Av) = 0$, így $\ker A \leq \ker A^*$. A fordított irányú tartalmazás ugyanezen gondolatmenet A^*-ra való alkalmazásával igazolható. Így $\ker A = \ker A^*$. A képterek egyenlősége ebből az $AV = (\ker A^*)^\perp$ és az $A^*V = (\ker A)^\perp$ egyenlőségek felhasználásával adódik.

Köv.:. Ha v általánosított sajátvektora az A normális mátrixnak (azaz $(A - \lambda I)^k v = 0$ valamely λ skalárra és k pozitív egész számra), akkor v egyben sajátvektora is A-nak.
Biz.: Legyen λ a megfelelő skalár és legyen $B = A - \lambda I$. Ekkor B is normális, így $BV \cap \ker B = (0)$. Tegyük fel, hogy az legkisebb k, amelyre $B^k v = 0$, egy 1-nél nagyobb szám. Ekkor a $w = B^{k-1}v$ vektorra $w \in BV \cap \ker B = (0)$, ellentmondás. Tehát $Bv = 0$, azaz $Av = \lambda v$.

Köv.:. Ha v sajátvektora a normális A mátrixnak λ sajátértékkel, akkor sajátvektora A^*-nak is $\overline{\lambda}$ sajátértékkel
Biz.: Legyen megint $B = A - \lambda I$. Ekkor $B^* = A^* - \overline{\lambda} I$ és így B is normális. $v \in \ker B = \ker B^*$.

Normális mátrixok jellemzése:. A normális $\Leftrightarrow$ létezik U unitér, hogy $U^{-1}AU$ diagonális.
(Megj.: a diagonális elemek A sajátértékei.)
Biz.: $\Leftarrow$: Legyen $D = U^{-1}AU$ diagonális. Ekkor D normális és így $A = UDU^{-1}$ is az.
$\Rightarrow$: Az n dimenzió szerinti indukcióval. Legyen λ egy sajátérték és V_λ a megfelelő sajátaltér. Ekkor $A - \lambda I$ is normális és így V a $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ és a $(A - \lambda I)V$ alterek direkt összege. Továbbá ezek az alterek merőlegesek is egymásra. Az is igaz, hogy az $(A - \lambda I)V$ altér A-invariáns, azaz A alkalmazása nem vezet ki belőle: ha $u = (A - \lambda I)v$, akkor $Au = (A-\lambda I)(Av) \in (A-\lambda I)V$. Legyen U_0 egy olyan unitér mátrix, amelynek első néhány oszlopa a V_λ egy ortonormált bázisát alkotja, a többi pedig a $V_\lambda^\perp$ altér egy ortonormált bázisát adja. Ekkor az $U_0^{-1}AU_0$ mátrix a következő alakú:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \boxed{A'} \end{pmatrix}.$$

Az $U_0^{-1}AU_0$ normalitásából egyszerűen következik az A' mátrix normalitása. Az indukciós feltevés miatt létezik egy olyan A' méretével azonos méretű U' mátrix, amelyre $D' = U'^{-1}A'U'$ diagonális. Legyen

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \boxed{U'} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $U = U_0U_1$ mátrixszal

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \boxed{D'} \end{pmatrix},$$

diagonális alakú.

Normalitás-jellemzés átfogalmazása:. A normális $\Leftrightarrow$ létezik A-nak sajátvektoraiból álló bázis.
Biz. $\Leftarrow$: Legyenek $u_1, \dots, u_n$ olyan sajátvektorai A-nak, amelyek a $\mathbb{C}^n$ tér egy ortonormált bázisát adják. Legyen U az a mátrix, amelynek j-edik oszlopa u_j. Ekkor U unitér, és mivel a standard bázist az $u_1, \dots, u_n$ sajátvektor-bázisba viszi, $U^{-1}AU$ diagonális mátrix, ahol a főátlóban A sajátértékei állnak.
$\Rightarrow$: Legyen U egy olyan unitér mátrix, amire $U^{-1}AU$ diagonális. Ekkor U a standard bázist az U oszlopaiból álló ortonormált bázisba viszi, és mivel $U^{-1}AU$ diagonális, ezek a vektorok sajátvektorok is.

Valós ortogonális mátrixok:. O valós mátrix ortogonális, ha komplex mátrixként tekintve unitér: $O^TO = I$.

Példa: Hipersíkra való tükrözés. Legyen $0 \neq u \in \mathbb{C}^n$, $\tau : v \mapsto v - 2\frac{(u,v)}{(u,u)}v$. Sajátértékei 1 és -1, a megfelelő sajátalterek $v^\perp$, illetve $\langle v \rangle$.

Példa:. minden permutációs mátrix ortogonális.

Alkalmazás: DFT és inverz DFT kapcsolata:. Legyen $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ az a lineáris transzformáció, amely a (standard) bázis elemeit ciklikusan permutálja: $\phi v_i = v_{i+1}$ (ahol $v_{n+1} := v_1$). Legyen $\omega = e^{2\pi i/n}$. A ϕ transzformáció (mátrixa a standard bázisban) ortogonális, így ϕ normális. Tudjuk, ϕ sajátértékei $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ és az ω^{-j} sajátértékhez tartozó 1 hosszú sajátvektor $w_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \vdots \\ \omega^{j(n-1)} \end{pmatrix}$. Ezért az

$$M = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

mátrix unitér, tehát $M^{-1} = M^*$ Mivel $M^* = \overline{M}$: az a mátrix, amelyben ω-t kicseréltük $\overline{\omega}$-ra. Tehát az $\omega \leftrightarrow \overline{\omega}$ csere erejéig az inverz DFT ugyanolyan, mint a DFT.

Mátrixok definitsége:. A önadjungált mátrix pozitív szemidefinit (pozitív definit), ha $v^*Av \geq 0$ ($v^*Av \geq 0$) minden $v \in \mathbb{C}^n$ vektorra.
Megj.: Ekvivalens a $\langle u, v \rangle := (u, Av)$ hermitikus függvény megfelelő definitségével.

Példa:. Ha A tetszőleges $m \times n$-es mátrix, akkor A^*A pozitív szemidefinit. A^*A pontosan akkor pozitív definit, ha oszlopai lineárisan függetlenek.
Biz.: HF

Áll.:. Legyen U unitér. Ekkor A normális $\Leftrightarrow$ U^*AU normális. Hasonló ekvivalenciák unitér, önadjungált, pozitív definit, pozitív szemidefinit, ferdén hermitikus mátrixokra.
Biz.: HF

Fontos típusok spektruma:. Legyen A komplex normális. Ekkor:

- A unitér $\Leftrightarrow$ A sajátértékei 1 abszolút értékűek
- A önadjungált $\Leftrightarrow$ A sajátértékei valósak
- A pozitív szemidefinit $\Leftrightarrow$ A sajátértékei nemnegatív valós számok
- A pozitív definit $\Leftrightarrow$ A sajátértékei pozitív valós számok
- A ferdén hermitikus $\Leftrightarrow$ A sajátértékei tiszta képzetesek

(Az $a + bi$ komplex szám tiszta képzetes, ha $a = 0$.)

Áll.:. Ha A valós szimmetrikus akkor létezik $\mathbb{R}^n$-ben is A sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Másképpen: létezik O valós ortogonális mátrix, hogy O^TAO diagonális.
Biz.: Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke A-nak. Az $(A-\lambda I)\underline{x} = 0$ lineáris egyenletrendszer valós megoldásai ugyanannyi dimenziós teret alkotnak, mint a komplexek. Válasszunk a valós sajátaltereken egy-egy ortonormált bázist. Ezek az előbbi dimenzió-megfontolás alapján összesen n elemet tartalmaznak. Másrészt páronként merőlegesek is egymásra, hiszen $\lambda \neq \mu$, $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$ esetén $\lambda(v,w) = (Av,w) = (v,Aw) = \mu(v,w)$ miatt $(v,w) = 0$.

1.10.5. Projekciók

Projekciók (vetítések):. A $\pi : V \to V$ lineáris transzformáció **projekció** a W altérre, ha $W = \pi V$ és π megszorítása W-re az identitás mátrix. Ekkor V nyilván a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltér és az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér (direkt) összege. (Ebben az állításban megengedjük, hogy ezen alterek valamelyike a (0) altér legyen, ebben az esetben 0 vagy 1 a szigorú értelemben nem sajátérték.) Fordítva, ha V előáll a π $\pi : V \to V$ lineáris transzformáció 0 és 1 sajátértékekhez tartozó sajátalterek (direkt) összegeként, akkor π projekció az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltérre.

HF:. Igazoljuk, hogy $\pi : V \to V$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor projekció, ha $\pi^2 = \pi$.

Ortogonális projekciók (merőleges vetítések):. Euklideszi térben egy ortogonális projekció egy olyan projekció, amely normális lineáris transzformáció, azaz olyan, aminek a mátrixa normális egy ($\Leftrightarrow$ bármely) ortonormált bázisban. Mivel a sajátértékek nemnegatív valós számok, szükségképpen önadjungált (valósra szimmetrikus) és **pozitív szemidefinit**. Egy normális transzformáció projekció $\Leftrightarrow$ (komplex) sajátértékei a $\{0,1\}$ halmazból kerülnek ki.
Pl. a Gram-Schmidt eljárásnál használtunk projekciókat.

Ortogonális projekció $\mathbb{C}^n$ alterére:. Legyen a W altér egy ortonormált bázisa $w_1, \ldots, w_k$. Legyen π egy olyan merőleges vetítés, aminek a képtere W. Ekkor π mátrixa

$$w_1 w_1^* + \ldots + w_k w_k^*,$$

illetve $\mathbb{R}^n$-ben

$$w_1 w_1^T + \ldots + w_k w_k^T.$$

Következésképpen π a W altér által egyértelműen meghatározott.
Biz.: A W képtér az 1 sajátvektorhoz tartozó sajátaltér, a magtér pedig $W^\perp$. Egészítsük ki a $w_1, \ldots, w_k$ rendszert egy $w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n$ ortonormált bázissá. Ekkor $w_{k+1}, \ldots, w_n$ a $W^\perp$ magtér bázisa. Legyen $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$. Ekkor $(w_i, v) = \alpha_i$ és így

$$\begin{aligned} \pi v &= \pi \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i \\ &= \sum_{i=1}^k (w_i, v) w_i = \sum_{i=1}^k (w_i^* v) w_i \\ &= \sum_{i=1}^k (w_i^* w_i) v. \end{aligned}$$

Itt az utolsó egyenlőségnél az azonos hosszú vektorokra vonatkozó

$$(u^*v)u = (uu^*)v$$

azonosságot használtuk. Ennek igazolása: $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ akkor az $(u^*v)u$ vektor i-edik eleme $\sum_{j=0}^n \overline{\alpha}_j \beta_j \alpha_i$, míg az uu^* mátrix i-edik sorának j-edik eleme $\alpha_i \overline{\alpha}_j$, így az $(u^*u)v$ mátrix i-edik eleme $\sum_{j=0}^n \alpha_i \overline{\alpha}_j \beta_j$, ami ugyanaz, mint az előbbi összeg.

Megj.:. Ha $\pi : \mathbb{C}^n \to W$ a W altérre való merőleges vetítés (azaz az az ortogonális projekció, aminek a képtere W), akkor tetszőleges $u \in \mathbb{C}^n$ esetén πu a W altérnek az u vektorhoz legközelebbi eleme:

$$w \in W \text{ esetén } |u - w| \geq |u - \pi u|$$

és egyenlőség csak $w = \pi u$-ra áll fenn.
Biz.: Legyen $w \in W$ és $w' = w - (u - \pi u)$. Ekkor, mivel $u - \pi u \in \ker \pi = W^\perp$,

$$(u-w, u-w) = ((u-\pi u) - w', (u-\pi u) - w') = (u - \pi u, u - \pi u) + (w', w') \geq (u - \pi u, u - \pi u),$$

ahol egyenlőség csak a $w' = 0$ esetben áll.

Négyzetes mátrix nyoma (emlékeztető):. $\operatorname{tr} A$ az A mátrix főátlójában levő elemeinek összege. A karakterisztikus polinom $n-1$-ed fokú tagjának az együtthatója. Ezért tetszőleges C invertálható mátrixra $C^{-1}AC$ nyoma ugyanaz, mint A nyoma.

Ortogonális projekciók főátlója:. Legyen $A = (a_{ij})$ egy ortogonális projekció mátrixa. Ekkor

- $\operatorname{tr} A = A$ rangja,
  Biz.: A diagonális alakjában az egyesek száma, azaz a képtér dimenziója.
- $a_{ii} \geq 0$
  Biz.: Legyen $v_1, \ldots, v_n$ a standard bázis. $A^2 = A^*A = A$, így
  $$a_{ii} = (v_i, Av_i) = (v_i, A^*Av_i = (Av_i, Av_i) \geq 0.$$
- $a_{ii} \leq 1$:
  Biz.: $v_i - Av_i \in \ker A = (A\mathbb{C}^n)^\perp$, így $(Av_i, v_i - Av_i) = 0$, és ezért
  $$\begin{aligned} 1 &= (v_i, v_i) = (Av_i, Av_i) + (v_i - Av_i, v_i - Av_i) \\ &\geq (Av_i, Av_i) = (v_i, A^*Av_i) = (v_i, Av_i) \\ &= a_{ii}. \end{aligned}$$

Példák.

- Az $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} \\ \frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} \end{pmatrix}$ leképezés merőleges vetítés az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ irányú egyenesre. Mátrixa
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$
- az első néhány standard bázisvektor által feszített altérre való merőleges vetítés:
  $$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$
- Ha π egy ortogonális projekció a W altérre, akkor $I - \pi$ egy ortogonális projekció a $W^\perp$ altérre. Például ha $u \in \mathbb{C}^n$ egy egységvektor, akkor uu^* az $\langle u \rangle$ altérre való merőleges vetítés, míg $I_n - uu^*$ az $u^\perp$ altérre vetít merőlegesen.

2. Szinguláris értékek szerinti felbontás

2.1. Mögöttes szemantikájú indexelés és alacsony rangú közelítés

Tegyük fel, hogy adott egy m dokumentumból álló gyűjtemény és egy n szóból álló szótár és $A = (a_{ij})$ egy olyan valós $m \times n$-es mátrix, amelyben az a_{ij} elem a j-edik szónak az i-edik dokumentumban való előfordulását jellemzi (valamilyen módszer szerint számított módon, pl. előfordulások súlyozott száma). Modellünkben azt tételezzük fel, hogy a szavak mögött (általunk nem ismert) fogalmak, jelentések állnak és minden szó jól közelíthető alapvető jelentések elegyeként. Formálisabban: azt tételezzük fel, hogy léteznek olyan

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{m1} \end{pmatrix}, \dots f_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

oszlopvektorok (az alapvető fogalmak "profiljai"), amelyekre az A mátrix oszlopai (a szavak "profiljai") jól közelíthetőek az $f_1, \dots, f_k$ vektorok lineáris kombinációival. Másképpen fogalmazva létezik olyan B $k \times n$-as mátrix, hogy ha F az az $m \times k$-as mátrix, aminek oszlopai az $f_1, \dots, f_k$ vektorok, akkor

$$A \approx FB.$$

Áll.:. Legyen M egy $m \times n$-es mátrix. Ekkor M rangja akkor és csak akkor legfeljebb k, ha léteznek olyan B $k \times n$-es és F $m \times k$-as mátrixok, amelyekre $M = FB$.
Biz.: A fenti gondolatmenet közelítés helyett egyenlőséggel.

Az elvi feladat tehát A minél jobb közelítése egy A' legfeljebb k rangú mátrixszal. A közelítés hibáját "zaj", illetve "kevésbé fontos" vagy "esetleges" jelentések fellépésének tudhatjuk be.

Ha $A' \approx A$, akkor persze ${A'}^T A' \approx A^T A$, ami egy pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, és ennek vizsgálatára már vannak eszközeink.

2.2. Szinguláris értékek

Emlékeztető:. A^*A pozitív szemidefinit.

Def.. Az A $m \times n$-es mátrix szinguláris értékei az A^*A sajátértékeinek a négyzetgyökei.

Terminológiai eltérés:. Szokás (és nem egészen indokolatlan) kizárólag a pozitív szinguláris értékeket tekinteni szinguláris értékeknek.

Áll.. A^*A rangja$=$ A rangja.
Biz.: Tegyük fel, hogy valamely $v \in A\mathbb{C}^n$ vektorra $v \in \ker A^*$. Ekkor $v = Au$ valamely $u \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $A^*Au = 0$. Innen $0 = (u, A^*Au) = (Au, Au) = (v, v)$, és ezért $v = 0$. A dimenziótételt alkalmazva A^*-nak az $A\mathbb{C}^n$-re való megszorítására $\dim A^*A\mathbb{C}^n = \dim A\mathbb{C}^n$. A baloldalon A^*A rangja áll, a jobboldalon pedig A rangja.

Köv.:. A pozitív szinguláris értékeinek multiplicitással tekintett száma megegyezik A rangjával.

Áll.. (A és A^* szinguláris értékei)
Ha σ pozitív szinguláris értéke A-nak, akkor A^*-nak is, és viszont. Részletesebben: Ha v sajátvektora A^*A-nak σ^2 sajátértékkel, akkor Av sajátvektora AA^*-nak szintén σ^2 sajátértékkel.
Biz.: Legyen v egy sajátvektora A^*A-nak σ^2 sajátértékkel Ekkor $v \neq 0$ és

$$(AA^*)(Av) = A(A^*A)v = A\sigma^2 v = \sigma^2 Av.$$

Azt kell még belátni, hogy $Av \neq 0$. Ehhez tegyük fel indirekte, hogy $Av = 0$. Ekkor $v = \frac{1}{\sigma^2}(A^*A)v = \frac{1}{\sigma^2}A^*(Av) = 0$, ellentmondás

Megj.. A fenti állításban a pozitív szinguláris értékek multiplicitásai is ugyanazok.
Biz.: Az $\frac{1}{\sigma}A$ leképezés az A^*A σ^2-sajátalterét az AA^* σ^2-sajátalterébe, az $\frac{1}{\sigma}A^*$ pedig az utóbbi teret az előbbi térbe viszi. A két leképezés megszorítása a σ^2-sajátalterekre inverzei egymásnak.

2.3. SVD

Nemnégyzetes mátrixok főátlója. Egy $m \times n$-es mátrix főátlója az $(1,1), \ldots, (k,k)$ pozíciókból áll (ebben a sorrendben), ahol $k = \min(m,n)$.

2.3.1. A fő lemma

Lemma:. Legyen A egy $m \times n$-es komplex (valós) mátrix. Ekkor léteznek olyan M' $m \times m$-es, illetve M $n \times n$-es unitér (valós ortogonális) mátrixok, amelyekre $M'^* AM$ az az $m \times n$-es Σ' mátrix, amelynek a főátlójában A szinguláris értékei helyezkednek el nem növekvő sorrendben, a többi helyén pedig 0 áll. Azaz ha A szinguláris értékei a $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ számok, akkor $M'^* AM$ vagy

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & \end{pmatrix}$$

alakú, aszerint, hogy $m < n$, $m = n$ vagy $m > n$.
Biz. Az $n \times n$-es pozitív szemidefinit A^*A mátrixnak sajátvektoraiból álló ortonormált bázist veszünk, a sajátértékek szerint nem növekvő sorrendben. Az erre a bázisra való áttérés mátrixa egy olyan M unitér (ortogonális) mátrix, amire M^*A^*AM az a D diagonális mátrix, amelynek a főátlójában a σ_j^2 elemek állnak. A $D = (AM)^*(AM)$ diagonalitásából következik, hogy az AM mátrix oszlopai ortogonális rendszert alkotnak. A diagonális elemek az oszlopvektorok hosszának négyzetét adják: a j-edik oszlop hossza $\sqrt{\sigma_j}$. Legyen r az A mátrix rangja, azaz a nem 0 szinguláris értékek száma (multiplicitással). Legyen M' egy olyan $m \times m$-es unitér (ortogonális) mátrix, amelynek első r oszlopa AM első r oszlopa 1 hosszúra normálva. Ekkor, mivel AM további ($r+1$-edik, stb.) oszlopai 0-k, $AM = M'\Sigma'$ és így $M'^* AM = \Sigma'$.

2.3.2. Redukált SVD

Tétel:. Legyen A egy $m \times n$-es komplex (valós), legyen A rangja r és legyen Σ az az $r \times r$-es diagonális mátrix, amelynek a főátlójában A pozitív szinguláris értékei vannak nem növekvő sorrendben. Ekkor léteznek olyan U' $m \times r$-es, illetve U $n \times r$-es hogy U' oszlopai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $U'^* U' = I_r$), U oszlopai is ortonormált rendszert alkotnak (azaz $U^* U = I_r$), és

$$A = U'\Sigma U^*.$$

Biz.: Legyen $\Sigma' = M'^* AM$ a lemma szerint. Ekkor $A = M'\Sigma' M^*$. Legyen U' az M' mátrix első r oszlopából álló $m \times r$-es mátrix, U pedig az M mátrix első r oszlopából $n \times r$-es mátrix. Legyen U' illetve U maradéka T', illetve T. Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} U' & | & T' \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} U^* \\ \hline T^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'\Sigma & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^* \\ \hline T^* \end{pmatrix} = U'\Sigma U^*.$$

2.3.3. Teljes SVD

$$A = M'\Sigma' M^*$$

a fő lemma szerint.

2.3.4. Egyértelműség kérdése

Legyen $A = U'\Sigma U^*$, ahol Σ $r \times r$-es diagonális mátrix pozitív átlós elemekkel nem növekvő sorrendben, U' $m \times r$-es U pedig $n \times r$-es, amelyekre $U'^* U' = I_r$, $U^* U = I_r$. Ekkor

$$A^* A = U\Sigma U'^* U'\Sigma U^* = U\Sigma^2 U^*,$$

így

$$\Sigma^2 = U^* A^* AU.$$

Ez csak úgy lehet, hogy U mátrix oszlopai az A^*A mátrix nem 0 sajátértékeihez tartozó sajátaltereinek báziselemeiből áll. (Egészítsük ki U-t egy $n \times n$-es unitér mátrixszá az A^*A magjából vett oszlopvektorokkal. Ez a mátrix diagonalizálja az A^*A mátrixot, így oszlopai A^*A sajátvektoraiból álló bázis $\mathbb{C}^n$-ben (illetve $\mathbb{R}^n$-ben).) Hasonlóan,

$$\Sigma^2 = U'^* AA^* U',$$

ezért az U' mátrix oszlopai az AA^* mátrix nem 0 sajátértékeihez tartozó sajátaltereinek báziselemeiből áll. Következésképpen, ha A pozitív szinguláris értékei különbözők, akkor U és U' az oszlopok egységszerese erejéig egyértelmű.

2.3.5. Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^TA^TAM = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} +\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$AM = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{12} & c_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{22} & c_{23} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \sqrt{6}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2.3.6. SVD önadjungált mátrixokra

$A^* = A$ esetén a szinguláris értékek A sajátértékeinek abszolút értékei multiplicitással). Ha

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*,$$

ahol U egy $n \times n$-es unitér mátrix és $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, akkor A egy lehetséges SVD-je

$$A = U' \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & & \\ & |\lambda_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n| \end{pmatrix} U^*,$$

ahol U' i-edik oszlopa U i-edik oszlopának ± 1-szerese, aszerint, hogy $\lambda_i \geq 0$ vagy $\lambda_i < 0$.

2.4. Kapcsolat a poláris felbontással

2.4.1. Négyzetgyök

Áll.:. Ha A egy $n \times n$-es pozitív szemidefinit mátrix, akkor $\exists!$ olyan B $n \times n$-es pozitív szemidefinit mátrix, amelyre $A = B^2$ (jel.: $B = \sqrt{A}$). Ha A valós, akkor B is valós. Ha A pozitív definit, akkor B is az.
Biz.: Legyen U egy olyan unitér (valós esetben ortogonális), mátrix, amelyre $D = U^*AU$ diagonális (nemnegatív elemekkel). Legyen továbbá B' az a diagonális mátrix, amelyre D-ből úgy kapható, hogy elemeit kicseréljük a nemnegatív négyzetgyökükre. Ekkor B' valós, pozitív szemidefinit és $B'^2 = D$. Így $B = UB'U^*$ is pozitív szemidefinit, továbbá

$$B^2 = UB'U^*UB'U^* = UB'^2U^* = UDU^* = A.$$

Az egyértelműséghez: Legyen $A = B^2$ és v az A mátrixnak egy sajátvektora λ sajátértékkel. Mivel V-nek van B sajátvektoraiból álló bázisa, v felírható B mátrix néhány lineárisan független sajátvektorának összegeként: $v = \sum_{i=1}^{\ell} v_i$, ahol $Bv_i = \lambda_i v_i$, Ekkor

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda v_i = \lambda v = Av = B^2 v = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^2 v_i.$$

Ez a $v_1, \ldots, v_\ell$ vektorok lineáris függetlensége miatt csak úgy lehet, hogy $\lambda_i^2 = \lambda$ $(i = 1, \ldots, \ell)$, ami viszont B szemidefinitsége miatt azt jelenti, hogy $\lambda_i = \sqrt{\lambda}$, és így $Bv = \sqrt{\lambda}v$. Legyen $u_1, \ldots, u_n$ az $\mathbb{R}^n$-nek egy olyan bázisa, ami az A mátrix sajátvektoraiból áll. A fenti gondolatmenetet alkalmazzuk $v = u_1, v + v_2, \ldots, v = u_n$ helyettesítéssel. Azt kapjuk, hogy ha $Au_i = \lambda_i u_i$, akkor $Bu_i = \sqrt{\lambda_i} u_i$, tehát B tényleg egyértelműen meghatározott.

2.4.2. Poláris felbontás

Tétel:. Tetszőleges $n\times n$-es komplex (valós) A mátrix felírható PM alakban, ahol M egy $n\times n$-es unitér (ortogonális) mátrix, P pedig egy $n\times n$-es pozitív szemidefinit komplex (valós) mátrix. A felbontásbeli P mátrix egyértelmű, és ha A invertálható, akkor M is egyértelmű és P pozitív definit.
Megj: 1 dimenziós eset: komplex számok felbontása $re^{i\phi}$ alakban.
Biz. Létezés: szükség esetén "párnázzuk ki" A szinguláris érték szerinti felbontását: $A = U'\Sigma U^*$, ahol U és U' $n\times n$-es unitér (ortogonális) mátrixok, Σ pedig egy $n\times n$-es diagonális nemnegatív elemekkel. Legyen $P = U'\Sigma U'^*$ és $M = U'U^*$.
P egyértelműsége: $AA^* = PMM^*P = P^2$, így $P = \sqrt{AA^*}$. Ha A invertálható, akkor P is az és $M = P^{-1}A$.

Megj.:. Hasonlóan, A felírható $M'P'$ alakban, ahol M' unitér és P' pozitív szemidefinit. $P' = P$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A^*A = AA^*$, azaz ha A normális.

2.5. Alacsony rangú közelítések

2.5.1. Mátrixok Frobenius-normája

Def.. Legyen A egy $m\times n$-es komplex mátrix. Ekkor

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}.$$

Tulajdonképpen az $m\cdot n$ dimenziós tér euklideszi normája.

Hasznos megadás:. $\|A\|^2 = A^*A$ nyoma.

Áll.. A $m\times n$-es mátrix, B $m'\times m$-es amelynek az oszlopai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $B^*B = I_m$), C pedig $n\times n'$-es, amelynek a sorai ortonormált rendszert alkotnak (azaz $CC^* = I_n$), $\Rightarrow \|BA\| = \|A\| = \|AC\|$
Biz.: Ha A oszlopai $a^1,\dots,a^n$, akkor BA oszlopai $Ba^1,\dots,Ba^n$, és mivel B a $\mathbb{C}^m$ (vagy $\mathbb{R}^m$) standard bázisát B képterének egy ortonormált bázisába viszi, B egy izometria $\mathbb{C}^m$ ($\mathbb{R}^m$) és B képtere között, így $|Ba^j|^2 = |a^j|^2$. Ezért $\|BA\|^2 = \sum|Ba^j|^2 = \sum|a^j|^2 = \|A\|$. A második egyenlőség ebből $A\leftarrow A^T$, $B\leftarrow C^T$ helyettesítéssel adódik.
Másik biz.:

$$\|BA\|^2 = \operatorname{tr} A^*B^*BA = \operatorname{tr} A^*I_mA = \operatorname{tr} A^*A = \|A\|^2.$$

2.5.2. Az Eckart-Young–tétel

Tétel:. Legyen A egy $m\times n$-es komplex (valós) r rangú mátrix az $A = U'\Sigma U^*$ szinguláris érték szerinti felbontással. Ekkor tetszőleges $0\le k\le r$-re

$$U'^{(k)}\Sigma^{(k)}U^{(k)*}$$

a A-hoz a Frobenius-normában (az egyik) lehető legközelebbi olyan $m\times n$-es mátrix, amelynek a rangja legfeljebb k. Itt $U^{(k)}$, illetve $U'^{(k)}$ U, illetve U' első k oszlopából álló részmátrixa, $\Sigma^{(k)}$ pedig Σ bal felső $k\times k$-as része. A közelítés hibája

$$\sqrt{\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i^2},$$

ahol $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\ldots\ge\sigma_r$ az A mátrix szinguláris értékei.
Biz.: Legyen $\Sigma' = M'^*AM$, mint az SVD fő lemmájában. (Ezen belül M, illetve M' az U, illetve U' mátrixok kiegészítése négyzetes unitér mátrixra.) Tegyük fel, hogy B egy $m\times n$-es mátrix. Ekkor

$$\|B-A\| = \left\|M'^*(B-A)M\right\| = \left\|M'^*BM - M'^*AM\right\| = \left\|M'^*BM - \Sigma'\right\|.$$

Legyen $B_0 = U'^{(k)}\Sigma^{(k)}U^{(k)*}$. Az SVD-tétel befejező bizonyításához hasonló gondolatmenettel látható, hogy $B_0 = M'\Sigma'^{(k)}M^*$, ahol $\Sigma'^{(k)}$ az az $n\times n$-es mátrix, ami $\Sigma^{(k)}$-ból úgy kapható, hogy az utolsó $n-k$ diagonális eleme helyébe 0-t írunk. Innen $M'^*B_0M = \Sigma'^{(k)}$, és így

$$\begin{aligned}\|B_0-A\| &= \sqrt{\|M'^*B_0M-\Sigma'\|}\\ &= \sqrt{\|\Sigma_0-\Sigma'\|}\\ &= \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i^2}.\end{aligned}$$

Ha B rangja $\le k$, akkor, mivel M'^* és M invertálható mátrixok, M'^*BM rangja is $\le k$. Az M'^*BM helyébe C-t írva elég tehát belátni, hogy ha C rangja legfeljebb k, akkor $\|C-\Sigma'\|^2 \ge \sum_{i=k+1}^{r}\sigma_i^2$. Ha C rangja legfeljebb k, akkor C bal felső $r\times r$-es részének a rangja is legfeljebb k, továbbá $C-\Sigma$ normája legalább akkora, mint az bal felső $r\times r$-es részéé. Így elég a következő állítást igazolni:

Áll.. Legyen D az az $r\times r$-es diagonális mátrix, amelynek átlós elemei a $\mu_1\ge\ldots\ge\mu_r$ pozitív valós számok, legyen C egy $0\le k<r$ rangú $r\times r$-es (komplex) mátrix. Ekkor

$$\|C-D\|^2 \ge \sum_{i=k+1}^{r}\mu_i^2.$$

Biz.: Legyen $W=\ker C$ és legyen $w_1,\ldots,w_{r-k}$ a W altér egy ortonormált bázisa, míg $w_{r-k+1},\ldots,w_r$ a $W^\perp$ egy ortonormált bázisa. Legyen U_1 a $w_1,\ldots,w_{r-k}$ oszlopvektorokból álló mátrix, U_2 pedig a $w_{r-k+1},\ldots,w_r$ oszlopokból álló. Ekkor az $U=(U_1|U_2)$ $r\times r$-es mátrix unitér, így

$$\|C-D\|=\|U^*(C-D)U\|=\left\|\begin{pmatrix}U_1^*\\U_2^*\end{pmatrix}(C-D)\left(U_1|U_2\right)\right\|=\left\|\begin{pmatrix}U_1^*(C-D)\\U_2^*(C-D)\end{pmatrix}\left(U_1|U_2\right)\right\|=\left\|\begin{pmatrix}U_1^*(C-D)U_1|U_1^*(C-D)U_2\\U_2^*(C-D)U_1|U_2^*(C-D)U_2^*\end{pmatrix}\right\|,$$

Így az a norma legalább akkora, mint a bal felső $U_1^*(C-D)U_1$ részmátrix normája. Mivel a W altéren C megszorítása 0 így $CU_1=0$, ezért $U_1^*(C-D)U_1=U_1^*DU_1$, tehát

$$\|C-D\|\ge\|U_1^*DU_1\|.$$

Belátjuk, hogy $\|U_1^*DU_1\|^2\ge\sum_{i=k+1}^{r}\mu_i^2$. Ehhez a Frobenius-norma nyomos megadását és a nyom tulajdonságait használjuk.

$$\|U_1^*DU_1\|^2=\operatorname{tr}(U_1^*DU_1)(U_1^*DU_1)^*=\operatorname{tr}U_1^*D^2U_1=\operatorname{tr}U_1U_1^*D^2=\sum_{i=1}^{r}\beta_{ii}\mu_i^2,$$

ahol a $(\beta_{ij})=B=U_1U_1^*$. Itt $B^*=B$ és $B^2=I$, így B egy ortogonális projekció. B rangja $=U_1$ rangja $=n-k$. Tehát $0\le\beta_{ii}\le1$ és $\sum_{i=1}^{r}\beta_{ii}=1$. Ezek mellett a feltételek mellett a $\sum_{i=1}^{r}\beta_{ii}\mu_i^2$ akkor lesz a legkisebb, ha a $\beta_{11}=\ldots=\beta_{kk}=0$, a többi 1.

2.5.3. LSI alapú keresés

Keresőkérdés $\sim$ dokumentum $\sim A$ sorai. Ha w A egy sora, a legjobb Frobenius-normában közelítő A' mátrixnak a megfelelő sora nem más, mint w merőleges vetülete az A' sorai által generált altérre.

Ennek megfelelő eljárás az, hogy a keresőkérdéshez tartozó (dokumentum-típusú) sorvektort levetítjük az A' mátrix sorai által generált altérre.

2.6. A QR-felbontás

Felbontás $A=QR$ alakban, ahol Q $m\times m$-es unitér (ortogonális) és R $m\times n$-es felső háromszög alakú: $R=(r_{ij})$, ahol $r_{ij}=0$, ha $i>j$.

2.6.1. Gram-Schmidt ortogonalizációval

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy A négyzetes ($n\times n$-es) nemelfajuló mátrix. Alkalmazzuk a Gram-Schmidt–eljárást az A^*A (pozitív definit) $n\times n$-es mátrixra, mint Gram-mátrixra: $G^*A^*AG=I$, ahol G a Gram-Schmidt báziscsere mátrixa. Emlékeztetőül: az eljárás első fázisban egy eredeti báziselemet nála kisebb indexű báziselemek lineáris kombinációjának hozzáadásával módosítjuk, majd a második menetben normáljuk. Ezért G egy $n\times n$-es felső háromszögmátrix: egy j indexű új báziselem az $i\le j$ indexű régi báziselemek lineáris kombinációja. Az $G^*A^*AG=I$ egyenlőség azt jelenti, hogy az AG $n\times n$-es mátrix oszlopai egy ortonormált rendszert alkotnak, ezért a $Q=AG$ mátrix unitér. Legyen $R=G^{-1}$ az inverz bázistranszformáció. Ekkor R is felső háromszögmátrix alakú: Ha $v_1,\ldots,v_n$ a standard bázis és $w_1,\ldots,w_n$ a Gram-Schmidt–féle ortonormált bázis az $\langle u,v\rangle=(Au,Av)$ formára vonatkozóan, akkor $r_{ij}=\langle w_i,v_j\rangle=(w_i,Av_j)=(w_i,a^j)$, ahol a^j az A mátrix j-edik oszlopa.

2.6.2. Householder-tükrözésekkel

Hipersíkra tükrözés:. $0\ne u$ rögzített,

$$\tau_u:v\mapsto v-2\frac{(u,v)}{(u,u)}u=v-2\frac{u^*v}{u^*u}u.$$

Azaz τ_u mátrixa a standard bázisban: $I-\frac{2}{u^*u}uu^*$. Ez egy unitér (valós esetben ortogonális) mátrix.

Alkalmas tükrözés. Legyen v, w két nem 0 vektor. Ekkor van olyan tükrözés, amely v-t w egy skalárszorosába viszi: legyen $u = \frac{|v|}{|w|}w - v$, ez merőleges v és w szögfelező hipersíkjára, így $\tau_u v = \frac{|v|}{|w|}w$.

Első oszlop. Legyenek A első oszlopa a^1. Ekkor ha $a^1 \neq 0$, akkor a $v = a^1$ és a $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorok szögfelező hipersíkjára való τ_1 tükrözés az a^1 vektort egy $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ alakú vektorba viszi. Tehát a τ_1 tükrözés T_1 unitér mátrixával balról szorzás A első oszlopában kinullázza a főátló alatti elemeket:

$$T_1 A = \begin{pmatrix} * & * \\ & \boxed{A'} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol A'-nek eggyel kevesebb sora és oszlopa van. (Ha $a^1 = 0$, akkor $T_i = I$.)

Rekurzió. A jobb alsó A' blokkrája. A rekurzióban során fellépő T_i' $(n-1) \times (n-1)$-szeres unitér szorzómátrixokat $(i = 2, \ldots)$ blokk-diagonálisan kiegészítjük egy bal felső 1-essel:

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{T_i'} \end{pmatrix}.$$

Végeredmény:. $T_n \cdots T_2 T_1 A = R$, $A = QR$, ahol $Q = T_1 T_2 \cdots T_n$

Egyértelműség:. Akkor, ha A oszlopai lineárisan függetlenek, és amellett a megszorítás mellett, hogy R diagonális elemei pozitív valós számok.

Változat:. $AP = QR$, ahol P permutációs mátrix és R felső delta alakú: valamely k indexre $r_{jj} \neq 0$, ha $j \leq k$; $r_{ij} = 0$ ha $i > j$ vagy ha $i > k$. Az eredeti módszer azzal, hogy amint csupa 0 maradékú oszlopra bukkanunk, kicseréljük egy olyannal, aminek a maradéka nem csupa 0 (ha van ilyen oszlop).

Alkalmazás:. A determinánsa, rangja, képtere meghatározása. Numerikusan stabilabb, mint a Gauss-elimináció vagy a Gram-Schmidt–ortogonalizáció. LSI-ben is használható, SVD-típusú közelítések helyett bizonyos esetekben viszonylag tűrhető, gyorsan számolható alacsony rangú közelítést tesz lehetővé.

QR-algoritmus:.

$$\begin{aligned}
A_1 &:= A \\
A_1 &= Q_1 R_1, \text{ ahol } Q_1 \text{ unitér (ortogonális), } R_1 \text{ felső háromszög.} \\
&\vdots \\
A_i &= Q_i R_i, \text{ ahol } Q_i \text{ unitér (ortogonális), } R_i \text{ felső háromszög.} \\
A_{i+1} &:= R_i Q_i \\
A_{i+1} &= Q_{i+1} R_{i+1}, \text{ ahol } Q_{i+1} \text{ unitér (ortogonális), } R_{i+1} \text{ felső háromszög.} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Észrevétel:

$$A_{i+1} = Q_i^* A_i Q_i,$$

az $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots$ mátrixoknak ugyanazok a sajátértékei. Alkalmas feltételek mellett felső háromszögmátrixhoz konvergál, az átlóban a sajátértékekkel. Pl. ha A pozitív definit valós szimmetrikus, a határérték diagonális, sőt, a Q_i-k szorzatának határértéke diagonalizálja A-t. Az eljárásnak több javított változata van.

Kézenfekvő diagonalizáló módszer:. A sajátértékei a karakterisztikus polinomból, sajátvektorok lineáris egyenletrendszerekkel: nem elég gyors és nagyon érzékeny a numerikus hibákra.

2.7. Az SVD közelítő kiszámításáról

Alapvető észrevétel:. A $m \times n$-es, T $m \times m$-es unitér, T' $n \times n$-es unitér:

SVD A-ra $\longleftrightarrow$ SVD TAT'-re

Általános módszer

Első menetben A-t Householder-tükrözésekkel balról-jobbról szorozva bidiagonális alakra hozzuk: Legelőször egy tükrözés mátrixával való balról szorzással elintézzük, hogy az első oszlop főátló alatti elemei 0-k legyenek, majd jobbról egy

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{T'} \end{pmatrix}.$$

alakú mátrixszal szorozzuk, ahol T' egy olyan alkalmas tükrözés mátrixa, amely az első sor második, harmadik, stb. koordinátáiból álló $n-1$ hosszú sorvektort az $(1, 0, \ldots, 0)$, szintén $n-1$ hosszú vektorba képezi. Ezzel elérjük, hogy az első oszlopban harmadik elemtől kezdve csupa 0 álljon:

$$\begin{pmatrix} * & * & & & \\ & * & \ldots & * & * \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & * & \ldots & * & * \end{pmatrix}$$

Ezután a második oszlopot, majd a második sor vesszük hasonló módon kezelésbe, és így tovább. Végeredményül egy bidiagonális – szintén $A = (a_{ij})$-vel jelölt – mátrixot kapunk:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & & & & \\ & * & * & & & & \\ & & * & * & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & * & * & \\ & & & & & * & \end{pmatrix}.$$

(A bidiagonalitás azzal jellemezhető, hogy $a_{ij} = 0$, ha $j \notin \{i, i+1\}$.) Ekkor $B = A^*A$ tridiagonális alakú:

$$B = \begin{pmatrix} * & * & & & & & \\ * & * & * & & & & \\ & * & * & * & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & * & * & * & \\ & & & & * & * & \end{pmatrix},$$

azaz $b_{ij} = 0$, ha $|i-j| > 1$. Második menetben a QR-algoritmus alkalmas változatát használják A^*A sajátértékeinek meghatározására. Az algoritmus során vigyázni kell a tridiagonalitás megőrzésére, így tükrözések helyett bizonyos forgatásokat használnak.

Lánczos-típusú módszerek ritka mátrixokra

Lánczos-eljárás:. Szimmetrikus (önadjungált) mátrix tridiagonalizálása n-darab mátrix×vektor szorzással. Ha a mátrix ritka vagy két ritka szorzata (mint pl. A^*A, ha A ritka), akkor nagyon megéri.

Lánczos-típusú módszerek:. Ritka A-ra (ilyenek merülnek fel LSI esetén) A^*A tridiagonalizálására a Lánczos-eljárás változatai. Aztán a tridiagonális mátrix sajátértékeire/sajátvektoraira QR-algoritmus valamely változata.

2.8. Az SVD néhány további alkalmazása

2.8.1. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$Ax = 0$ megoldása, azaz $\ker A$ számítása.

Emlékeztető:. A^*A rangja ugyanaz, mint A rangja, így $\ker A^*A = \ker A$.

Teljes SVD:.

$$A = M'\Sigma' M^*,$$

itt M azon oszlopai, amelyekre Σ' megfelelő sora 0, a $\ker A^*A = \ker A$ egy ortonormált bázisát adják.

2.8.2. Pszeudoinverz

Moore-Penrose–féle pszeudoinverz:. Az A egy $m \times n$-es komplex (valós) mátrix pszeudoinverze egy olyan A^+ $n \times m$-es komplex mátrix, amelyre

- $AA^+A = A$,
- $A^+AA^+ = A^+$,
- AA^+ önadjungált,
- A^+A önadjungált.

Áll. (pszeudoinverz az SVD-ből):. Ha A (redukált) SVD-je

$$A = U'\Sigma U^*,$$

akkor

$$A' = U\Sigma^{-1}U'^*$$

egy pszeudoinverze A-nak.
Biz.: Felhasználjuk, hogy $U^*U = U'^*U' = I_r$. Innen

$$AA' = U'\Sigma U^* U\Sigma^{-1}U'^* = U'U'^*$$

és

$$A'A = U\Sigma^{-1}U'^*U'\Sigma U^* = UU^*.$$

(Vigyázat, általában ha pl. $r < n$, akkor $UU^* \neq I_n$.)

- $AA'A = U'U'^*A = U'U'^*U'\Sigma U^* = U'\Sigma U^* = A$.
- $A'AA' = A'U'U'^* = U\Sigma^{-1}U'^*U'U'^* = U\Sigma^{-1}U'^* = A'$
- $(AA')^* = (U'U'^*)^* = U'U'^* = AA'$.
- $(A'A)^* = (UU^*)^* = UU^* = A'A$.

Lemma. Legyen A^+ egy pszeudoinverze A-nak. Ekkor AA^+ a $\mathbb{C}^m$ tér merőleges vetítése A képterére, A^+A pedig a $\mathbb{C}^n$ tér merőleges vetítése A^* képterére.
Biz.: (1) AA^+ önadjungált és $(AA^+)^2 = AA^+$, így AA^+ ortogonális projekció. AA^+ képtere nyilván benne van A képterében. A fordított tartalmazás az $A = (AA^+)A$ egyenlőségből látható.
(2) Hasonlóan, A^+A is merőleges vetítés. A^+A önadjungáltsága miatt $A^+A = A^*(A^+)^*$, így A^+A képtere benne van A^* képterében. Mivel $A = AA^+A$, A^+A rangja legalább akkora, mint A rangja, ami egyben A^* rangja is, tehát a két képtér megegyezik.

Áll. (pszeudoinverz egyértelműsége):. A^+ és A' két pszeudoinverze A-nak $\Rightarrow A' = A^+$.
Biz.: A lemma miatt AA^+, akárcsak AA' az ortogonális projekció A képterére, tehát $AA' = AA^+$. Hasonlóan, $A'A = A^+A$. Ezért $A' = A'AA' = A'AA^+ = A^+AA^+ = A^+$.

Köv.:. Ha $A = U'\Sigma U^*$ az A mátrix (redukált) SVD-je, akkor A pszeudoinverze $A^+ = U\Sigma^{-1}U'^*$. Ha A valós, a pszeudoinverze is valós.

Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ekkor A SVD-je $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, ezért

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} A^T.$$

Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor $A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, így A SVD-je $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, ezért

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^*.$$

HF. $(A^+)^+ = A$.

HF. $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

HF. A^+ rangja $=$ A rangja.

HF. Ha A invertálható négyzetes mátrix, akkor $A^+ = A^{-1}$.

HF. Ha A egy merőleges vetítés (négyzetes) mátrixa, akkor $A^+ = A$.

Példa. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ekkor A, B merőleges vetítés, így $A^+ = A$, $B^+ = B$.

$$(AB)(BA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A,$$

nem vetítés, így $(AB)^+ \neq BA = B^+A^+$. Valójában AB szinguláris érték szerinti felbontása:

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

így

$$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2BA.$$

Magtér meghatározása. A^+A merőleges vetítés A^* képterére, $I - A^+A$ merőleges vetítés A magjára. Így $I - A^+A$ oszlopai $\ker A$ egy ortonormált bázisát adják. Ez is használható homogén lineáris egyenletrendszerek megoldására.
Biz.: Az $I - A^+A$ az ortokomplementer altérre való vetítés, tehát a bizonyításhoz az hiányzik még, hogy A^* képtere A magjának ortokomplementere. Az $(A^*v, w) = v^*Aw = (v, Aw$ egyenlőségekből azonban ez könnyen adódik.

2.8.3. Legkisebb négyzetek

$Ax = b$ közelítő megoldása a legkisebb hibával (négyzetösszeg-értelemben):

$$|Ax - b|^2 \longrightarrow \min$$

Tétel:. Ha A pszeudoinverze A^+, akkor $x = A^+b$ minimalizálja az $|Ax - b|^2$-t.
Biz.: Legyen $W = A$ képtere. Bontsuk fel b-t $b_0 + b_1$ alakban, ahol $b_0 \in W$, $b_1 \in (A\mathbb{C}^n)^\perp$ Ekkor b_0 a b vektor merőleges vetülete W-n. Létezik olyan x_0, amelyre $b_0 = Ax_0$. Ekkor

$$|Ax - b|^2 = |Ax - Ax_0 + Ax_0 - b|^2 = |A(x - x_0) - b_1|^2 = |A(x - x_0)|^2 + |b_1|^2.$$

Itt az utolsó egyenlőség abból következik, hogy $A(x - x_0) \in W$ és $b_1 \in W^\perp$, tehát a két vektor merőleges egymásra. Ezért az $|Ax - b|^2$ mennyiséget pontosan azok az x vektorok minimalizálják, amelyekre $Ax = b_0$. Az általános inverznél bizonyított lemma miatt AA^+ a W térre való merőleges vetítés, így $b_0 = AA^+b$, tehát az optimumot megvalósító x vektorok az $Ax = AA^+b$ egyenlettel jellemezhetők, és így $x = A^+b$ tényleg optimumot ad.

HF. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor egyértelmű az optimális x, ha A oszlopai lineárisan függetlenek.

2.8.4. Képvektorhossz-minimalizálás ("total least squares")

$Ax = 0$ közelítő megoldása a legkisebb hibával $|x| = 1$ mellett:

$$|Ax|^2 \longrightarrow \min, \text{feltéve } |x| = 1.$$

Legyen $v_1, \ldots, v_n$ $A^T A$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, a megfelelő sajátértékek (tehát A szinguláris értékeinek négyzetei) $\sigma_1^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2$. Legyen $x = \sum \alpha_i v_i$, ahol $\sum |\alpha_i|^2 = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= (Ax, Ax) \\ &= (x, A^T Ax) \\ &= (\sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i \sigma_i^2 v_i) \\ &= \sum \sigma_i^2 |\alpha_i|^2 \\ &\geq \sum |\alpha_i|^2 \sigma_n^2 \\ &= \sigma_n^2, \end{aligned}$$

tehát az elérhető optimum σ_n^2, ami az $x = v_n$ vektornál fel is vétetik. Amennyiben $\sigma_{n-1} > \sigma_n$, akkor az optimális x skalárszoros erejéig egyértelmű.

3. Nemnegatív mátrixok

3.1. Jelölések:

Legyen $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ és $v' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}$ valós vektorok, továbbá $A = (a_{ij})$ és $A' = (a'_{ij})$ $n \times n$-es valós mátrixok.

- $v \geq 0$, ha $\gamma_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $v > 0$, ha $\gamma_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$
- $A \geq 0$, ha $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
- $A > 0$, ha $a_{ij} > 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$
- $v \geq v'$ (illetve $v > v'$), ha $v - v' \geq 0$ $(v - v' > 0)$
- $A \geq A'$ (illetve $A > A'$), ha $A - A' \geq 0$ $(A - A' > 0)$

3.2. Elemi észrevételek

- $A \geq 0 \Leftrightarrow Av \geq 0$ minden $v \geq 0$ vektorra.
- $A > 0 \Leftrightarrow Av > 0$ minden $0 \neq v \geq 0$ vektorra.
- $A \geq A'$, $v \geq v' \Rightarrow Av \geq A'v$.
- $A \geq A'$, $B \geq B' \Rightarrow AB \geq A'B'$.

3.3. Spektrálsugár

Def.:. Az $A = (a_{ij})$ négyzetes valós vagy komplex mátrix **spektrálsugara** (jel.: $\rho(A)$) A legnagyobb komplex sajátértékének abszolút értéke.

Def.:. Ha $A = (a_{ij}) \geq 0$, és $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq 0$, akkor legyen

$$\rho'_v(A) = \max\{r \mid r \in \mathbb{R}, Av \geq rv\} = \min\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\gamma_j}{\gamma_i} \mid i = 1, \ldots, n\right\},$$

ahol a 0 nevezőjű törtet $+\infty$-ként értelmezzük. Legyen végül

$$\rho'(A) = \sup\{\rho_v(A) \mid 0 \neq v \geq 0\} = \sup\{\rho_v(A) \mid v \geq 0, |v| = 1\} = \max\{\rho_v(A) \mid v \geq 0, |v| = 1\}.$$

Itt az első egyenlőség azért teljesül, mert $\rho'_v(A)$ ugyanaz marad, ha v-t kicseréljük egy pozitív skalárszorosával, a második pedig azért, mert a $\{v \mid v \geq 0, |v| = 1\}$ halmaz kompakt.

3.3.1. A két definíció egyenértékűsége

Áll.:. $0 \leq A \leq A'$ esetén $\rho'(A) \leq \rho'(A')$.
Biz.: Minden $v \geq 0$-ra $\rho'_v(A) \leq \rho'_v(A')$.

Áll.:. Legyen $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij})$ pedig nemnegatív valós $n \times n$-es mátrix, hogy $|b_{ij}| \leq a_{ij}$. Ekkor

$$\rho(B) \leq \rho'(A),$$

speciálisan $\rho(A) \leq \rho'(A)$.

Biz.: Legyen λ egy sajátértéke B-nek és legyen $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ egy megfelelő sajátvektor: $v \neq 0$ és $Bv = \lambda v$. Ekkor az i-edik koordinátát felírva $i = 1, \ldots, n$-re $\lambda\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j$, és innen

$$|\lambda||\gamma_i| = |\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}||\gamma_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

így

$$|\lambda| \leq \min\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|} \mid i = 1,\ldots,n\right\} = \rho'_w(A) \leq \rho'(A),$$

ahol $w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ |\gamma_2| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix}$.

Áll.:. Tegyük fel, hogy $A > 0$ és $0 \neq v \geq 0$ egy olyan vektor, amelyre $Av \geq \rho'(A)v$ (azaz $\rho'_v(A) = \rho'(A)$). Ekkor $Av = \rho'(A)v$.
Biz.: Legyen $\rho = \rho'(A)$. Tegyük fel, hogy $Av \neq \rho v$. Ekkor $w = Av - \rho v \geq 0$, $w \neq 0$, így $A > 0$ miatt $Aw > 0$, és ezért $0 < Aw = A(Av) - \rho \cdot (Av)$, azaz $A(Av) > \rho \cdot (Av)$. De ez azt jelenti, hogy $\rho'_{Av}(A) > \rho$, ellentmondás.

Köv.:. Ha $A > 0$, akkor van olyan $0 \neq v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A) = \rho'(A)$.
Biz.: Tudjuk, hogy $\rho = \rho'_v(A)$ valamely $0 \neq v \geq 0$ vektorra. Az előző állítás alkalmazható.

Áll.:. Ha $A \geq 0$, akkor van olyan $v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho'(A)v$. Következésképpen $\rho(A) = \rho'(A)$.
Biz.: Legyen $1 \geq \epsilon > 0$-ra $A_\epsilon = A + \begin{pmatrix} \epsilon & \ldots & \epsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon & \ldots & \epsilon \end{pmatrix}$.

Ekkor $A_\epsilon > 0$ és tetszőleges $0 \neq v \geq 0$ vektorra

$$\rho'_v(A) \leq \rho'_v(A_\epsilon) \leq \rho'_v(A_1),$$

ahol $A_1 = A + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. Így

$$\rho'(A) \leq \rho'(A_\epsilon) \leq \rho'(A_1).$$

Az előző állítás miatt van olyan v_ϵ vektor, amelyre $|v_\epsilon| = 1$, $v_\epsilon \geq 0$ és $A_\epsilon v_\epsilon = \rho'(A_\epsilon)v_\epsilon$. Mivel mind a v_ϵ vektorok, mind a $\rho'(A_\epsilon)$ számok egy-egy kompakt halmazból vannak, kiválasztható egy olyan ϵ_j $j = 1, 2, \ldots,$ sorozat, hogy $\epsilon_j \to 0$ és a v_{ϵ_j} sorozat is konvergál valamely v vektorhoz, továbbá ρ'_{ϵ_j} is konvergál valamely ρ' számhoz. Nyilván $v \geq 0$, $|v| = 1$ és $\rho' \geq \rho(A)$. Minden j-re

$$A_{\epsilon_j} v_{\epsilon_j} = \rho'(A_{\epsilon_j})v_{\epsilon_j},$$

igaz marad az egyenlőség a $A_{\epsilon_j} \to A$, $v_{\epsilon_j} \to v_j$, $\rho' A_{\epsilon_j} \to \rho'$ határátmenettel:

$$Av = \rho' v.$$

De ekkor $\rho' = |\rho'| \leq \rho(A) \leq \rho'(A)$.

3.3.2. Alsó és felső korlátok

Áll.:. Ha $A \geq 0$, akkor

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mid i = 1,\ldots,n\right\} \leq \rho(A) \leq \max\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mid i = 1,\ldots,n\right\}.$$

Biz.: Felső korlát: Legyen $0 \neq v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq 0$ olyan vektor, amelyre $\rho'_v(A) = \rho(A)$. Legyen i_0 olyan index, amelyre a γ_{i_0} az összes γ_j érték közül a legnagyobb. Ekkor

$$\rho(A) = \rho'_v(A) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\frac{\gamma_j}{\gamma_{i_0}} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \leq \max\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mid i = 1,\ldots,n\}.$$

Alsó korlát: Legyen $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\rho'_v(A) = \min\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mid i = 1, \ldots, n \right\},$$

és $\rho(A) = \rho'(A) \geq \rho'_v(A)$.

Köv.:. Ha $A \geq 0$, akkor

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mid j = 1, \ldots, n \right\} \leq \rho(A) \leq \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mid j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Biz.:$\rho(A^T) = \rho(A)$ (ugyanaz a karakterisztikus polinom).

HF. Legyen $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} > 0$. Mutassuk meg, hogy $A \geq 0$ esetén

$$\min\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} \mid i = 1, \ldots, n \right\} \leq \rho(A) \leq \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} \mid i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Javaslat: Legyen

$$D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n \end{pmatrix}$$

és $A' = D^{-1}AD$. Ekkor, mivel A és A' hasonló mátrixok, $\rho(A) = \rho(A')$. Akalmazzuk a fent bizonyított sorösszeg-becsléseket az A' mátrixra.

3.4. Pozitív mátrixok – Perron elmélete

Ebben a részben $A > 0$.

Áll:. $\rho(A) > 0$.
Biz.: A legkisebb sorösszeg alsó korlát.

Áll:. Létezik pozitív sajátvektor $\rho(A)$ sajátértékkel.
Biz.: Tudjuk már, hogy van $0 \neq v \geq 0$ vektor, amelyre $Av = \rho(A)v$. Mivel $A > 0$, Av is > 0, így $v = \frac{1}{\rho(A)}Av > 0$.

Áll:. A $\rho(A)$ sajátértékhez tartozó pozitív sajátvektor skalárszoros erejéig egyértelmű.
Biz.: Legyen $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} > 0$ és $v' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} > 0$ két sajátvektor. Legyen $\mu = \min\{\frac{\gamma'_i}{\gamma_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$. Ekkor $w = (v' - \mu v) \geq 0$, de $w \not> 0$, ugyanakkor $\rho(A)w = Aw$. Utóbbi > 0, ha $w \neq 0$, így csakis $w = 0$ lehetséges, azaz $v' = \mu v$.

HF. Mutassuk meg, hogy ha $0 \neq v' \geq 0$ egy nemnegatív sajátvektora A-nak $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex sajátértékkel, akkor $\lambda = \rho(A)$.
Javaslat: Először lássuk be, hogy $v' > 0$ és $\lambda > 0$, majd az előző gondolatmenethez hasonlóan járjunk el.

Áll.. Ha λ komplex sajátértéke A-nak, amelyre $|\lambda| = \rho(A)$ és $v = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$ egy λ sajátértékhez tartozó komplex sajátvektor, akkor $\lambda = \rho(A)$ és v egy pozitív vektor komplex skalárszorosa.
Biz.: Tetszőleges $i = 1, \dots, n$-re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

tehát a $0 \neq w = \begin{pmatrix}|\gamma_1|\\ \vdots \\ |\gamma_n|\end{pmatrix}$ nemnegatív elemű vektorral $Aw \geq \rho(A)w = \rho'(A)w$. Egy korábbi állítás miatt w egy nemnegatív sajátvektor $\rho(A)$ sajátértékkel, így szükségképpen pozitív is. Az abszolút értékekre vonatkozó egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha az összes γ_j egy irányba mutat: γ_i/γ_j pozitív valós számok.

Áll.:. Legyen B egy $n \times n$-es $n-1$ rangú valós mátrix. Legyen $v \in \ker B$, $u \in \ker B^T$. Ha $v^T u \neq 0$, akkor B-nek a $B\mathbb{R}^n$ képtérre vett megszorítása nemelfajuló. Következésképpen B karakterisztikus polinomjának 0 egyszíres gyöke.
Biz.: A rangra vonatkozó feltevés miatt B magját a v vektor generálja. Elég tehát azt belátni, hogy $v \notin B\mathbb{R}^n$. Tegyük fel indirekte, hogy létezik egy w vektor, amelyre $Bw = v$. Ekkor $v^T u = (Bw)^T u = w^T B^T u = 0$, ellentmondás. (Megj.: tulajdonképpen a már ismert $\ker B^* = (B\mathbb{C}^n)^\perp$ egyenlőséget használjuk.)
A karakterisztikus polinomra vonatkozó állítás úgy látható, hogy a v-ből és B képterének bázisvektoraiból álló bázisra való áttérés mutatja, hogy B hasonló egy

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & * & \dots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & * & \dots & *\end{pmatrix}$$

alakú blokk-diagonális mátrixhoz, ahol a jobb alsó $(n-1) \times (n-1)$-es blokk nemelfajuló, ezért a karakterisztikus polinomjának 0 nem gyöke. B karakterisztikus polinomja ezen blokk karakterisztikus polinomjának és az x polinomnak a szorzata.

Köv.:. A karakterisztikus polinomjának $\rho(A)$ egyszeres gyöke.
Biz.: Legyen $v > 0$, amelyre $Av = \rho(A)v$ és $u > 0$, amelyre $A^T u = \rho(A)u$. Ekkor $uv > 0$ és alkalmazzuk az előző állítást $B = A - \rho(A)I$-vel.

Tétel:. $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k$ egy egy rangú mátrixhoz konvergál. Következésképpen minden $u_0 = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$ vektorra az $u_{k+1} :=$ normált(Au_k) egy u_0-tól független vektorhoz konvergál, ahol normált$(v) := \frac{1}{|v|}v$.
Később bizonyítjuk, általánosabban.

3.5. Irreducibilis mátrixok – Frobenius elmélete

Def.. $A \geq 0$ $n \times n$-es mátrix reducibilis, ha léteznek $i_1, \dots, i_\ell$ indexek $(0 < \ell < n)$, hogy $a_{i_s j} = 0$ $j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$ esetén. Más szóval A reducibilis, ha a sorok és oszlopok szimultán permutációjával A felső blokk-háromszög alakra hozható:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix},$$

ahol valamely $0 < \ell < n$-re A_{11} egy $\ell \times \ell$-es A_{12} egy $\ell \times (n-\ell)$-es, A_{22} pedig egy $(n-\ell) \times (n-\ell)$-es mátrix.
Azt mondjuk, hogy A irreducibilis, ha nem reducibilis.

Gráfos átfogalmazás.. Legyen $A \geq 0$ $n \times n$-es mátrixhoz G_A az az n pontú irányított gráf az $\{1, \dots, n\}$ csúcshalmazon, aminek az élei azon (j, i) párok, amelyekre $a_{ij} > 0$. Ekkor A reducibilitása azt jelenti, hogy a G_A csúcsainak felosztható két részre úgy, hogy az első részből a másodikba nem megy él (a második részből az elsőbe még mehet.)

Példák.. Reducibilisek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Irreducibilisek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

HF. Mutassuk meg, hogy ha $A \geq 0$ irreducibilis, akkor A^T is irreducibilis.

HF. Ha egy $A \geq 0$ szimmetrikus mátrix reduciblis, akkor valamely P permutációs mátrixra $P^{-1}AP$ blokk-diagonális alakú.

HF. Minimum hány nulla eleme van egy $n \times n$-es reducibilis mátrixnak?

Áll:. Legyen $A \geq 0$ $n \times n$-es. Ekkor A irreducibilis $\Leftrightarrow (A+I)^n > 0$.
Biz. $\Leftarrow$:

$$\begin{pmatrix} A_{11}+I & * \\ 0 & A_{22}+I \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (A_{11}+I)^n & * \\ 0 & (A_{22}+I)^n \end{pmatrix} \not> 0.$$

$\Rightarrow$: Legyen $v \geq 0$ és A irreducibilis. $(A+I)v = v + Av$ pozitív azokon a helyeken, ahol v pozitív. Tegyük fel, hogy v az $i_1, \ldots, i_\ell$ helyeken pozitív és $1 < \ell < n$. Ha A nem reducibilis, akkor vannak olyan $i \in \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ és $j \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}$, amelyekre $a_{ij} > 0$. Ekkor $(A+I)v$ pozitív lesz a j-edik helyen. Tehát $(A+I)v$ több helyen pozitív, mint v. Így minden $0 \neq v \geq 0$ vektorra $(A+I)^{n-1}v > 0$, és ezt $A+I$ oszlopaira alkalmazva kapjuk, hogy $(A+I)^n = (A+I)^{n-1}(A+I) > 0$. (Ha A valamely oszlopa (sora) 0, akkor A nyilván reducibilis.)

Gráfos észrevétel. $A, B \geq 0$ $n \times n$-es mátrixokra G_{AB} csak G_A-tól és G_B-től függ: a (j,i) pár él G_{AB}-ben, ha van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$ szám, amelyre az (k,i) pár él A-ban és a (j,k) pár él B-ben.

Köv.. (j,i) él G_{A^ℓ}-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő ℓ hosszú irányított séta.

Köv.. (j,i) él $G_{(A+I)^n}$-ben $\Leftrightarrow$ van G_A-ban j-ből i-be menő irányított út.
Innen:

Irreducibilitás és erős összefüggőség. $A \geq 0$ irreducibilis $\Leftrightarrow$ G_A erősen összefüggő.

Áll.. Ha $A \geq 0$ irreducibilis, akkor $\rho(A) > 0$.
Biz. A-ban nincs csupa 0 sor és a legkisebb sorösszeg egy alsó korlát.

Észrevétel:. Ha v sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor v sajátvektora $(A+I)^n$-nek is, $(\lambda+1)^n$ sajátértékkel. Speciálisan: ha v sajátvektora A-nak $\rho(A)$ sajátértékkel (tudjuk, hogy van ilyen $v \geq 0$), akkor v sajátvektora $(A+I)^n$-nek is, $\rho((A+I)^n) = (\rho(A)+1)^n$ sajátértékkel. Ha A irreducibilis, akkor tehát alkalmazható $(A+I)^n$-re a Perron-elmélet. Ebből adódóan:

Tétel:. Tegyük fel, hogy $A \geq 0$ $n \times n$-es irreducibilis mátrix. Ekkor

- $\rho(A)$ sajátértéke A-nak;
- $\rho(A)$ egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának;
- létezik A-nak pozitív sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel.

Példa:. Az n hosszú ciklusoknak megfeleselő n-times n-es permutációs mátrixok irreducibilisek, mindegyik sajátértékük 1 abszolút értékű.

HF. Másmilyen permutációk mátrixa reducibilis.

3.6. Konvergencia primitív mátrixokra

Def.:. $A \geq 0$ primitív, ha irreducibilis és $\rho(A)$ az egyetlen $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke.

HF. Ha $A \geq 0$ irreducibilis, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor A primitív.

Lemma:. Ha $\rho(B) < 1$, akkor $B^k \to 0$.
Biz. Legyen C olyan invertálható, hogy $C^{-1}BC$ Jordan-normálalakú. Mivel $B^k = C(C^{-1}BC)^kC^{-1}$, elég tehát Jordan-normálalakú mátrixokra igazolni az állítást, sőt, elég egy szem Jordan-blokkra ezt megtenni. Legyen tehát $B = \lambda I + N$ alakú ahol N a főátló alatti egyesekből álló mátrix. Ekkor N hatványai $0-1$ mátrixok és $N^n = 0$ és így $B^k = \sum_{j=k-n}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j N^{k-j}$ és ezért B^k minden eleme legfeljebb $(k-n)\binom{k}{k-n-1}|\lambda|^{k-n-1}$ abszolút értékű, ha $k > 2n$. $|\lambda|^{k-n-1}$ exponenciálisan csökken k-val, míg a többi tag polinomiális k-ban, így ez 0-hoz tart.

Tétel:. Tegyük fel, hogy az $A \geq 0$ irreducibilis mátrix primitív. Ekkor

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k \to vu^T,$$

ahol v A-nak, u pedig A^T-nak egy sajátvektora $\rho(A)$ sajátértékkel, amelyekre $u^Tv = 1$ teljesül.
Biz.: Tudjuk, hogy $A - \rho(A)$ rangja $n-1$, továbbá azt is, hogy $v \notin (A - \rho(A)I)\mathbb{R}^n$, tehát van $\mathbb{R}^n$-nek egy olyan bázisa, amely v-ből és az $(A - \rho I)\mathbb{R}^n$ altér egy bázisából áll. C az a mátrix, amelynek az oszlopai ez a bázis (azaz standard bázist erre a bázisra cserélő báziscsere mátrixa. Ekkor

$$C^{-1}\frac{1}{\rho(A)}AC = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $\rho(B) < 1$. Az előző lemma alapján létezik $\lim(C^{-1}\frac{1}{\rho(A)}AC)^k$ és ez a határérték

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

alakú. Innen, mivel

$$(C^{-1}\frac{1}{\rho(A)}AC)^k = C^{-1}(\frac{1}{\rho(A)}A)^kC),$$

azt kapjuk, hogy $(\frac{A}{\rho(A)})^k$ egy, a v vektor által generált egy dimenziós altérre történő (nem feltétlenül merőleges) vetítés mátrixához konvergál: létezik $P = \lim(\frac{A}{\rho(A)})^k$, amely $P = vu'T$ alakú (azaz P oszlopai v skalárszorosai) valamely $u' \in \mathbb{R}^n$ vektorra és $P^2 = P$. Az A^T mátrixra alkalmazva azt kapjuk, hogy $P^T = Uv'^T$ alakú, tehát $P = v'u^T$ valamely v'-re. Így v' a P képterének egy generátora, tehát a v vektor egy skalárszorosa, és hasonlóan, u' az u egy skalárszorosa. Így P a vu^T mátrix egy skalárszorosa, Ez $P^2 = P$ és $vu^Tvu^T = vu^T$ miatt csakis úgy lehet, hogy $P = vu^T$.

Köv.. Legyen $A \geq 0$ irreducibilis Ekkor A primitív $\Leftrightarrow A^k > 0$ valamely $k > 0$ egész számra.

HF. Tegyük fel, hogy $A = (a_{ij}) \geq 0$ irreducibilis és $a_{ii} > 0$ valamely i-re. Mutassuk meg, hogy ekkor A primitív.

HF. Legyen A irreducibilis, de imprimitív. Ekkor A^k reduciblis valamely $k > 1$ egészre.

HF. Legyen A irreducibilis és primitív. Ekkor A^k irreducibilis és primitív minden $k \geq 1$ egészre.

Példák:. Imprimitívek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

primitívek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

3.7. Imprimitív irreducibilis mátrixok

Áll.:. Legyen $B = (b_{ij})$ komplex, $A = (a_{ij})$ pedig nemnegatív valós irreducibilis $n \times n$-es mátrix, hogy $|b_{ij}| \leq a_{ij}$. Tudjuk, hogy $\rho(B) \leq \rho(A) = \rho'(A)$. Tegyük fel, hogy $\rho(B) = \rho(A)$ és $\lambda = c\rho(A)$ egy komplex sajátértéke B-nek, ahol $|c| = 1$. Ekkor $B = cD^{-1}AD$ alakú, ahol D komplex diagonális mátrix 1 abszolút értékű elemekkel az átlóban.

Biz.: Legyen $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ egy λ-sajátvektor: $v \neq 0$ és $Bv = \lambda v$. Tetszőleges $i = 1, \dots n$-re

$$\rho(A)|\gamma_i| = |\lambda||\gamma_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

tehát a $0 \neq w = \begin{pmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_n| \end{pmatrix} \geq 0$ vektorral $Aw \geq \rho(A)w = \rho'(A)w$. Így w egy (a skalárszoros erejéig egyértelmű) pozitív sajátvektora A-nak $\rho(A)$ sajátértékkel. Legyen $\gamma_i = d_i|\gamma_i|$, ahol $|d_j| = 1$. A fenti képletben az egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek:

$$\rho(A)|d_i\gamma_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} b_{ij}d_j|\gamma_j| \right| = \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\gamma_j|,$$

ami csak úgy lehet, hogy $|b_{ij}| = a_{ij}$ és a nem-nulla komponensek mind a d_i irányba mutatnak: ha $a_{ij} \neq 0$, akkor $b_{ij}/a_{ij}d_j = d_i$. Ekkor $b_{ij} = d_i^{-1}a_{ij}d_j$, attól függetlenül, hogy $a_{ij} > 0$ vagy sem, és így $B = D^{-1}AD$, ahol D átlójában a d_i komplex számok állnak.

Köv.:. Legyen $A \geq 0$ irreducibilis, c komplex szám, amelyre $|c| = 1$. Ekkor $c\rho(a)$ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha a cA mátrix, mint komplex mátrix hasonló A-hoz. Ez esetben $c\rho(a)$ egyszeres gyöke A karakterisztikus polinomjának.
Biz.: $\Rightarrow$: előző állítás $B = A$-val.
$\Leftarrow$: Ha $cA = D^{-1}AD$, akkor $A = cDAD^{-1}$, és ha $Av = \rho(A)v$, akkor $w = Dv$-re $Aw = cDAD^{-1}Dv = cDAv = c\rho(A)Dv = c\rho(A)w$.
Egyszeresség: Ha $\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - A$-nak, akkor $c\rho(A)$ egyszeres gyöke $\det xI - cA$-nak.

Köv.:. Ha $|c| = 1, |c'| = 1$ és $c\rho(A)$ és $c'\rho(A)$ sajátértékei az $A \geq$ irreducibilis mátrixnak, akkor c^{-1} és cc' is sajátértéke A-nak.
Biz.: Ha $cA = D^{-1}AD$ és $c'A = D'^{-1}AD$, akkor $c^{-1}A = DAD^{-1}$ és $cc'A = (D'D)^{-1}AD'D$.

Köv.:. Ha az A irreducibilis mátrixnak s darab $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke van, akkor ezek $e^{2\ell\pi i/s}\rho(A)$, $\ell = 0, \dots, s-1$.

Tétel.. Ha az A irreducibilis mátrixnak s darab $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke van, akkor alkalmas P permutációs mátrixszal

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & A_{s-2,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{s-1,s} \\ A_{s1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} illetve az ij helyen álló nulla egy $\mu_i \times \mu_j$ méretű blokk $(i, j = 1, \dots, s)$.
Biz.: Legyen $c = e^{2\pi i/s}$ és legyen $D = (d_{ij})$ olyan diagonális mátrix, amelyre $d_i = d_{ii}$ 1 abszolút értékű komplex számok és $D^{-1}AD = cA$. Ekkor $ca_{ij} = \frac{d_j}{d_i}a_{ij}$, tehát $a_{ij} = 0$, hacsak nem $d_j = cd_i$. Legyen $t_0 = 0$. A koordináták alkalmas permutációjával elérhető, hogy $d_1 = \dots = d_{t_1}$ és $d_j \neq d_1$, ha $j \notin \{1, \dots, t_1\}$. Mivel A primitív, létezik olyan $i \in \{1, \dots, t_1\}$, hogy $a_{ij} \neq 0$ valamely j-re. Ezért $d_j = cd_i = cd_1$. Alkalmas cserével elérhető, hogy $t_1 + 1$ ilyen j legyen. Elérhető az is, hogy $d_{t+1}, \dots, d_{t_2}$ a D-nek cd_1-gyel megegyező diagonális értékei. Megint A irreducibilitását használva található egy olyan i, j pár, amelyre $i \leq t_2 < j$ és $a_{ij} \neq 0$. Ekkor $cd_i = d_j \neq d_{t_1+1}$, így $t_1 < i \leq t_2$. Elérhető, hogy $t_2 + 1$ egy ilyen j és gyűjtsük össze egymás utánra D d_{t+2+1}-gyel megegyező elemeit. Ezt folytatva s lépésben elérjük, hogy $d_{t_i+1}, \dots, d_{t_{i+1}}$ éppen a D mátrix $c^i d_1$-gyel megegyező elemei $(i = 1, \dots, s-1)$.

3.8. Sztochasztikus mátrixok és Markov-láncok

3.8.1. Markov-láncok

Véges állapotú, homogén Markov-lánc:.
Állapotok: $\{1, \ldots, n\}$
$X_0, X_1, X_2, \ldots,$ $\Pr(X_{k+1} = i | X_k = j) = a_{ij}$
a_{ij} : az $j \to i$ átmenet valószínűsége
X_k eloszlása: $\sim v^k = \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \vdots \\ \gamma_n^k \end{pmatrix}$ - sztochasztikus vektor: $v^k \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \gamma_j^k = 1$
$A = (a_{ij})$ átmenet-mátrix (oszlop-)sztochasztikus: $A \geq 0$ és $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$
$v^{k+1} = Av^k$
$v^k = A^k v^0$, ahol v^0 a kezdeti eloszlás.

3.8.2. Sztochasztikus mátrixok elemi tulajdonságai

Ebben a részben A (oszlop)sztochasztikus

Áll.:. Ha A sztochasztikus, akkor $\rho(A) = 1$
Biz.: HF

Áll.:. $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ sajátvektora A^T-nak 1 sajátértékkel

Áll.:. u sztochasztikus vektor $\Rightarrow Au$ sztochasztikus
Biz.: $A = (a_{ij})$, $u = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.
Au elemeinek összege $= \sum_i \sum_j a_{ij}\gamma_j = \sum_j \gamma_j \sum_i a_{ij} = \sum_j \gamma_j = 1$.

Áll.:. Sztochasztikus mátrixok szorzata is sztochasztikus.
Biz.: HF

3.8.3. Irreducibilitás értelmezése:

Minden állapotból minden állapot elérhető pozitív valószínűséggel

3.8.4. Imprimitivitás értelmezése:

Ha A irreducibilis és s darab $\rho(A)$ abszolút értékű sajátértéke van, akkor A^k főátlója 0, ha k nem osztható s-sel. Tehát minden j-re a $j \to j$ átmenet csak s-sel osztható számú lépésben lehetséges: az állapotok periodikusak.

3.8.5. Konvergenciatétel értelmezése:

Ha A primitív, akkor $A^k \to v \cdot \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ ahol v A-nak sztochasztikusra normált sajátvektora $1 = \rho(A)$ sajátértékkel. Így tetszőleges v_0 sztochasztikus vektorra

$$A^k v_0 \to v.$$

A Markov-láncok nyelvén: ha tetszőleges kezdeti eloszlás esetén X_n eloszlása konvergál az úgynevezett stacionárius eloszláshoz, amennyiben a lánc irreducibilis és az állapotok aperiodikusak.

3.9. Duplán sztochasztikus mátrixok

Def.:. $A = (a_{ij}) \geq 0$ duplán sztochasztikus, ha A és A^T is (oszlop-)sztochasztikus.

HF.:. Igazoljuk, hogy ha A egy duplán sztochasztikus mátrix, akkor alkalmas P permutációval $P^{-1}AP$ blokk-diagonális alakra hozható, ahol a blokkok irreducibilisek.

Áll.:. Duplán sztochasztikus mátrixok konvex kombinációja is duplán sztochasztikus.

Példa.:. Permutációs mátrixok.

Tétel (Frobenius-König-Hall):. Legyen $G = (U, V, E)$ egy páros gráf. Akkor és csak akkor létezik olyan párosítás (független élrendszer) G-ben, amely U minden pontját lefedi, ha bármely $W \subseteq U$-ra a W-beli pontok szomszédjai legalább annyian vannak, mint W elemei:

$$\#\{v \in V | \exists w \in W : (w, v) \in E\} \geq \#W.$$

Birkhoff tétele:. Egy duplán sztochasztikus A mátrix permutációs mátrixok konvex kombinációja.
Biz.: Indukciót alkalmazunk A pozitív elemeinek a száma szerint. Legyen G az a páros gráf, melynek csúcsai az oszlopindexek, illetve a sorindexek, és legyen (i, j) él G-ben, ha $a_{ij} \neq 0$. Belátjuk, hogy G-re teljesül a Hall-feltétel. Tegyük fel, hogy van az oszlopoknak olyan m elemű W halmaza, amellyel a gráfban összekötött sorok m-nél kevesebben vannak. A W-be eső oszlopok elemeinek összege m. Mivel ezen oszlopok nem-nulla elemei m-nél kevesebb sorban helyezkednek el, az összeg m-nél kisebb, ellentmondás. Tehát van G-ben egy teljes párosítás, ami egy olyan P permutációs mátrixnak felel meg, amelynek megfelelő helyein az A mátrix elemei pozitívak. Legyen a a legkisebb ezen n elem közül. Ha $a = 1$, akkor $A = P$ és készen vagyunk. Ha $a < 1$, akkor legyen $B = \frac{1}{1-a}(A - aP)$. Ekkor A a B és a P mátrixok konvex kombinációja, B duplán sztochasztikus, és A-nál kevesebb pozitív eleme van. Indukció B-re.

3.10. Pagerank

Sergei Brin és Larry Page algoritmusa weblapok rangsorolására (1998)

Első megközelítés:.
Állapotok $\sim$ weblapok

$$a_{ij} = \frac{\#j \to i \text{ linkek}}{\#j \to \text{ linkek}}$$

$$v^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

$$v^{k+1} = Av_k$$

Azt modellezi, milyen valószínűséggel, merre jár egy, a linkek közül egy véletlenül kiválasztott mentén továbblépő szörfölő.

Probléma:. Még csak nem is reducibilis (vannak lapok, ahonnan nem lehet továbbmenni).

Módosított mátrix:. A helyett

$$A' = (1 - \alpha)A + \alpha\frac{1}{n}E,$$

ahol E a csupa 1-ből álló mátrix: $E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Ez az A' már pozitív elemű, így A'^k konvergens. A rangsor $A'^K v_0$ súlyai szerint, ahol K nagy.

Szemléletesen:. A türelmetlen szörfölő modellje: α valószínűséggel elunja a barangolást, és véletlenül választott lapra lép.

3.11. Gyűjtőlapok és tekintélyek

Jon Kleinberg 1998-ban publikált módszere.

Modell:. A lapok kétféle értéket kapnak: gyűjtő (g_i), illetve tekintély értéket (t_i). Az az értékesebb lap, amelyre minél több minél jobb gyűjtő mutat, és az a jó gyűjtő, amely minél több minél értékesebb lapra mutat:

$$t_i = c \cdot \sum_{j \to i} g_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

és

$$g_j = c' \cdot \sum_{i \leftarrow j} t_i \quad (j = 1, \ldots, n)$$

c és c' normáló tényezők, hogy pl. $\sum_{j=1}^{n} g_j^2 = 1$ és $\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 1$ teljesüljön. (Megfelelő lenne a $\sum_{j=1}^{n} g_j = \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ kikötés is.) Kezdetben $g_j = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $t_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Mátrixokkal és pontosabban:. Legyen $A = (a_{ij})$ a web adjacenciamátrixa: $a_{ij} = 1$, ha az i lap mutat a j lapra, különben $a_{ij} = 0$.

$$g^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix},$$

$$t^k = cA^T g^k,$$

$$g^{k+1} = c' A t^k.$$

Gyűjtőkre:.

$$g^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix},$$

$$g^{k+1} = c'cAA^T g^k.$$

Itt AA^T egy nemnegatív elemű pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, így sajátértékei nemnegatívek AA^T akkor reducibilis, ha a lapok olyan csoportokra bonthatók, amelyek diszjunkt laphalmazokra mutatnak. Ilyen esetben csoportonként lehet dolgozni. Ha AA^T irreducibilis, akkor AA^T mátrix legnagyobb sajátértéke 1-szeres, így $(AA^T)^k$ alkalmasan lenormálva konvergens, és a g^k sorozat is konvergál a megfelelő sajátvektorhoz.

Gyakorlatban:. Nem az egész webre, hanem egy viszonylag kicsi, de az adott témakörben reprezentatív mintára.

4. Egyebek

4.1. Hadamard-kódok

Hibajavító kódok

Kód:. Egy $\mathbb{F}$ ábécé feletti n hosszú kód egy $C \subseteq F^n$ halmaz.

Hamming-távolság:. Legyen $v = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T, v' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n)^T \in \mathbb{F}^n$. Ekkor

$$d(v, v') = \#\{i | \gamma'_i \neq \gamma_i).$$

Tényleg távolság:. $d(v, v') = d(v', v)$; $d(v, v') = 0 \Leftrightarrow v = v'$; és teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$d(v, v'') \leq d(v, v') + d(v', v'').$$

Kódtávolság:. C minimális távolsága vagy kódtávolsága

$$\min_{v \neq v' \in C} d(v, v').$$

Kódtávolság és hibajavítás:. Ha C távolsága d, akkor $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ hibát ki lehet javítani.

Lineáris kódok:. Legyen $\mathbb{F}$ test. Egy n hosszú lineáris kód egy $C \leq \mathbb{F}^n$ altér.

Hamming-súly:. Ha $v = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$, akkor $w(v) = d(0, v)$.

Kódtávolság lineáris kódokra:. $C \leq \mathbb{F}^n$ kód távolsága a minimális nem 0 súly C–beli szavakra:

$$\min_{v \in C} w(v).$$

Lineáris kódok paraméterei:. $C \leq \mathbb{F}^n$ egy $[n, k, d]$-kód, ahol:

- n a kódhossz
- $k = \dim_{\mathbb{F}} C$ a dimenzió
- d a kódtávolság

Kódsebesség:. $R = k/n$.

Hadamard-kódok

Más néven elsőrendű Reed-Muller–kódok.
$\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Paraméterek:. $[n = 2^m, k = m + 1, d = 2^{m-1}]$.

Kódolás:. Legyen $u = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^T$, $\beta \in \mathbb{F}$. Ekkor a (u, β) párhoz a

$$\left(u^T v + \beta | v \in \mathbb{F}^m\right)^T$$

2^m hosszú vektort rendeljük.

A kódszavak:. A $\mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ (homogén) lineáris függvények.

A súlyok:. az azonosan 0 függvény súlya 0, a többi magja $m - 1$ dimenziós altér, tehát a súly 2^{m-1}.

Mariner 9 Mars-szonda (1971):. $m = 5$-re Hadamard-kód

$$[32, 6, 16].$$

Hasonló sebességű ismétlő kód:. $b \mapsto (b, b, b, b, b)$
Távolság: 5.

Lokális dekódolhatóság:. Ha csak az v-"edik" bitre vagyunk kíváncsiak, vegyünk véletlenül egy v' vektort és legyen $v'' = v - v'$. Tegyük fel, hogy a 2^m bit közül legfeljebb $p2^m$ bit romlott meg, ahol $p < 1/4$: Ha a csatornára a bemenet az $f : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ lineáris függvény és a kimenet a g függvény, akkor $Prob_\nu(g(\nu) = f(\nu)) \geq 1 - p$. Ekkor $Prob_{v',v''}(g(v') = f(v') \text{és} g(v'') = f(v'')) \geq 1-2p > 1/2$, így $Prob_{v',v''}(f(v) = g(v')+g(v'')) \geq 1-2p > 1/2$. Néhányszor ($p$-től függő konstanssal $O(\log(1/\epsilon)$-szor) ismételve és a többséget véve tetszőleges konstans $\epsilon > 0$ hibavalószínűség elérhető.