Villamosmérnök A3 (2017 ősz) — 1. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg a $2\sin y + y'x\cos y = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. $y = k\pi$ szinguláris megoldások. $y' = -\frac{2\sin y}{x\cos y} = -\frac{2}{x}\operatorname{tg} y$ szétválasztható: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}\operatorname{tg} y \rightsquigarrow \int \operatorname{ctg} y\, dy = -\int \frac{2}{x}\, dx \rightsquigarrow \ln(|\sin y|) = -2\ln|x| + c = \ln x^{-2} + c \rightsquigarrow |\sin y| = \frac{c_1}{x^2}$ $(c_1 > 0)$, amiből Bolzano miatt $\sin y = \frac{c}{x^2}$ $(c \neq 0)$. 2

VAGY: egzaktra visszavezethető. Nem egzakt, mert $P(x,y) = 2\sin y$, $Q(x,y) = x\cos y$-nal $P_y = 2\cos y \neq \cos y = Q_x$, de $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{\cos y}{x\cos y} = \frac{1}{x}$, tehát az $e^{\int 1/x\, dx} = e^{\ln|x|} = |x|$. Elég az x multiplikátort figyelembe venni; az x-el való szorzással kapott $2x\sin y + y'x^2\cos y = 0$ már egzakt. Kell $u(x,y)$, amire $u_x(x,y) = 2x\sin y$ és $u_y(x,y) = x^2\cos y$. 2

Az elsőből $u(x,y) = \int 2x\sin y\, dx = x^2\sin y + c(y)$; ebből és a másodikból $x^2\cos y = u_y(x,y) = x^2\cos y + c'(y) \rightsquigarrow c'(y) = 0 \rightsquigarrow c(y) = c \rightsquigarrow u(x,y) = x^2\sin y + c$, vagyis az implicit általános megoldás $x^2\sin y = c$, amiből $\sin y = \frac{c}{x^2}$.

2. Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = 8x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével!

Megoldásvázlat. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformálva és a kezdetiértékeket is figyelembe véve

$$\frac{8}{s^2} = \mathfrak{L}\{y''\} + 4\mathfrak{L}\{y'\} + 4\mathfrak{L}\{y\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4(sY - y(0)) + 4Y = Y(s^2+4s+4) + 1$$

8 − 8

$$\rightsquigarrow Y = \frac{8}{s^2(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{-2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} \quad (*)$$

4

mert

$$\frac{8}{s^2(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} = \frac{As(s+2)^2 + B(s+2)^2 + C(s+2)s^2 + Ds^2}{s^2(s+2)^2},$$

vagyis

$$8 = As(s+2)^2 + B(s+2)^2 + C(s+2)s^2 + Ds^2,$$

amiből $s = 0$ választással $B = 2$, $s = -2$ választással $D = 1$-t kapjuk. Így

$$\begin{aligned} 8 &= As(s+2)^2 + 2(s+2)^2 + C(s+2)s^2 + 2s^2 \\ &= A(s^3 + 4s^2 + 4s) + 2s^2 + 8s + 8 + C(s^3 + 2s^2) + 2s^2 \\ &= (A+C)s^3 + \ldots + (4A+8)s \ldots, \end{aligned}$$

4

amiből $C = -A$ és $A = -2$.

$(*)$-ot visszatranszformálva, használva, hogy $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = e^{-2x}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = xe^{-2x}$ (vagy $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{-1}{s+2}\right\} = (-1)x\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2}\right\} = xe^{-2x}$) kapjuk, hogy

$$y = \mathfrak{L}^{-1}\{Y\} = -2 + 2x + 2e^{-2x} + xe^{-2x} = (2+x)e^{-2x} + 2x - 2.$$

3. Számítsa ki az $f(x,y) = (\frac{1}{2}xy^2, x^2y)$ vektorfüggvény vonalintegrálját a síkbeli $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$ pozitívan irányított háromszögvonalon!

Megoldásvázlat. $\operatorname{rot}(\frac{1}{2}xy^2, x^2y) = 2xy - xy = xy$, így a Stokes-tétel szerint 4

$$\begin{aligned} \int_L f\, dr = \int_H \operatorname{rot} f\, dV = \int_0^2\int_0^{4-2x} xy\, dy\, dx &= \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_0^{4-2x} dx \\ &= \int_0^2 8x - 8x^2 + 2x^3\, dx = \left[4x^2 - \tfrac{8}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

4

ahol H a háromszög, L pedig az azt határoló, pozitívan irányított görbe.

VAGY: A két befogón az integrandus, és így az integrál is 0. Az átfogó egyenlete: $r(t) = (2-t, 2t)$, amiből $\dot r(t) = (-1, 2)$, és így, mivel a vonalintegrál additív halmazfüggvény,

$$\int_L f\,dr = \int_{L'} f\,dr = \int_0^2 f(r(t))\dot r(t)\,dt = \int_0^2 (\tfrac{1}{2}(2-t)4t^2, (2-t)^2 2t)(-1,2)\,dt$$
$$= \int_0^2 6t^3 - 20t^2 + 16t\,dt = [\tfrac{3}{2}t^4 - \tfrac{20}{3}t^3 + 8t^2]_0^2 = \tfrac{8}{3},$$

ahol L' a megfelelően irányított átfogó.

4. Számítsa ki az $f(x,y,z) = (y, -x, 2z+1)$ vektorfüggvény felületi integrálját az origó középpontú, kifelé irányított, R sugarú felső, nyílt félgömb felületén!

Megoldásvázlat. Lezárva a felületet az xy síkbeli lefelé irányított R sugarú K körlappal $\int_F f\,df = \iint \operatorname{div}_G f\,dV - \int_K f\,df$, ahol G a felület határolta félgömb, a Gauss-Osztrogradszkij tétel miatt. $\iint \operatorname{div}_G f\,dV = \iint 2\,dV = \frac{4}{3}R^3\pi$ (mert a gömb térfogata $\frac{4}{3}R^3\pi$). $\int_K f\,df = \int_K f_n\,|df| = \int_K -1\,|df| = -R^2\pi$. Tehát $\int_F f\,df = \frac{4}{3}R^3\pi + R^2\pi = R^2\pi(1+\frac{4}{3}R)$.

VAGY: A félgömb felületének egyenlete

$$r(u,v) = R(\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u), \qquad u \in [0, \pi/2], v \in [0, 2\pi]$$

amiből $r_u \times r_v = Rr\sin u$, tehát

$$\int_F f(x,y,z)\,df$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (R\sin u\sin v, -R\sin u\cos v, 1+2R\cos u)R^2\sin u(\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u)\,du\,dv$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (1+2R\cos u)R^2\sin u\cos u\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2\sin u\cos u + 2R^3\cos^2 u\sin u\,du\,dv$$
$$= R^2 2\pi\left([\tfrac{1}{2}\sin^2 u]_0^{\pi/2} + [-\tfrac{2}{3}R\cos^3 u]_0^{\pi/2}\right) = R^2 2\pi(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}R) = R^2\pi(1+\tfrac{4}{3}R)$$

5. (a) Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ az F kifelé irányított zárt felület által határolt térrész, és V a H térfogata. Fejezze ki $\int_F r\,df$-et (az identitásfüggvény felületi integrálját F-en) V függvényeként!
Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $v : G \to \mathbb{R}^2$.
(b) Definiálja v potenciálfüggvényét!
(c) Melyek igazak a következő állítások közül? (c1) Ha v-nek van potenciálfüggvénye G-n, akkor $\operatorname{rot} v = 0$. (c2) Ha v folytonos, akkor van potenciálfüggvénye G-n.

Megoldásvázlat. (a)A Gauss-Osztrogradszkij tétel miatt $\int_F r\,df = \int_H \operatorname{div} r\,dV = \int_H 3\,dV = 3V$.
(b) $u : G \to \mathbb{R}$ potenciálfüggvénye v-nek, ha $\operatorname{grad} u = v$ G-n.
(c1) Igen, mert $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$.
(c2) Nem, pl. $\mathrm{CROSS}(r)$ folytonos, de nincs potenciálfüggvénye, mert $\operatorname{rot}\mathrm{CROSS}(r) = 2 \neq 0$.

IMSc-feladat. $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-ra és $m \in \mathbb{N}$-re fejezze ki $\frac{\operatorname{div}|r|^m r}{|r|^m}$ értékét n és m függvényében!

Megoldásvázlat. Ha $m > 0$, akkor használva, hogy ha u skalár-, v pedig vektorfüggvény, akkor $\operatorname{div} uv = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{div} v$,

$$\frac{\operatorname{div}|r|^m r}{|r|^m} = \frac{|r|^m\operatorname{div} r + r\operatorname{grad}|r|^m}{|r|^m} = \operatorname{div} r + \frac{rm|r|^{m-1}\frac{r}{|r|}}{|r|^m} = n + \frac{m|r|^{m-1}\frac{|r|^2}{|r|}}{|r|^m} = n + m.$$

$m = 0$-ra is $\frac{\operatorname{div}|r|^m r}{|r|^m} = \operatorname{div} r = n = n + m$.