



Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)



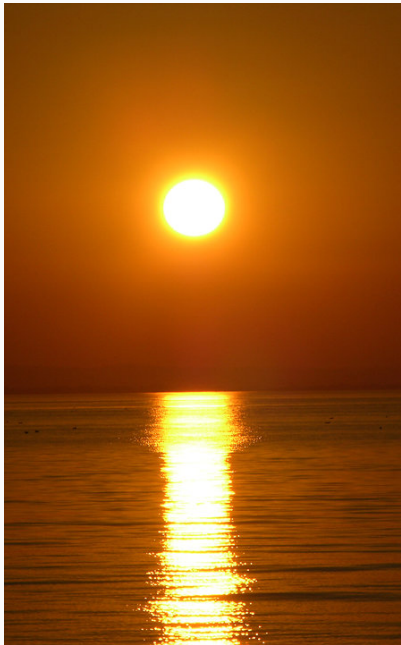
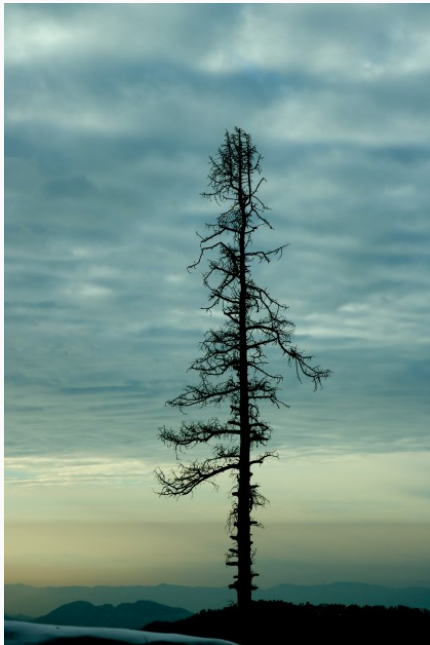
Merőlegesség

ORTOGONALIZÁCIÓ, MERŐLEGES VETÍTÉS, LEGKISEBB NÉGYZETEK



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK



Merőleges vetítés

Legjobb közelítés

Pszéudoinverz

Ortogonalizáció

QR-felbontás

Ortogonalis mátrixok

Speciális komplex mátrixok

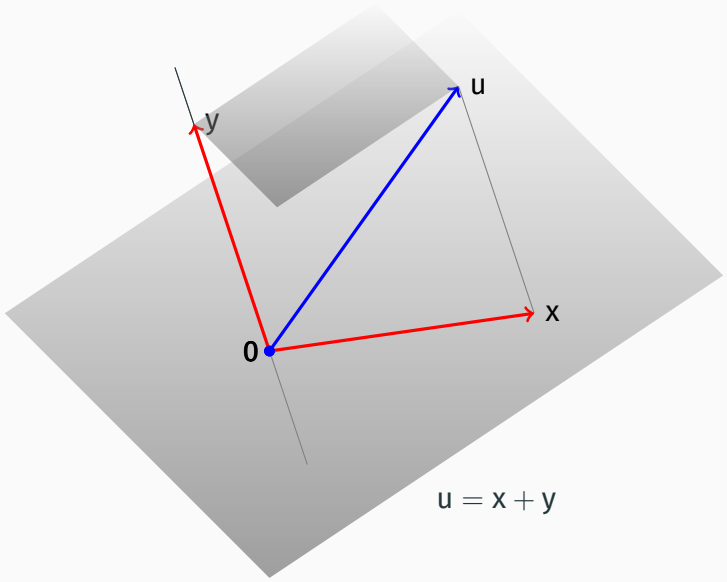
Ismeretek, képességek, célok

- fel tudja írni egy független vektorrendszer Gram-mátrixát,
- ki tudja számítani vektor altérre eső merőleges vetületét az altér tetszőleges vagy ortonormált bázisa segítségével is,
- felismeri a vetítőmátrixot, és a merőleges vetítés mátrixát,
- ki tudja számítani egyenletrendszer optimális megoldásait és minimális abszolút értékű optimális megoldását,
- ki tudja számítani mátrix pszeudoinverzét, és azzal lineáris egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását,
- bázisával megadott altérben talál ortonormált bázist,
- felismeri a szemiorthonális, ortogonális, unitér mátrixokat, és az ortogonális trafókat geometriai tulajdonságaik alapján,
- jellemezni tudja a 2- és 3-D terek ortogonális transzformációit,
- ki tudja számítani mátrix QR-felbontását, és annak segítségével lineáris egyenletrendszer optimális megoldását.

Merőleges vetítés

Alterek direkt összege

- D $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ és $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ **kiegészítő alterek** (komplementer alterek), azaz \mathcal{U} minden vektora egyértelműen előáll egy \mathcal{V} és egy \mathcal{W} -beli vektor összegeként, akkor azt mondjuk, hogy \mathcal{U} a \mathcal{V} és \mathcal{W} alterek **direkt összege**, amit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.
- T \mathcal{U} véges dimenziós. Ekkor ekvivalensek a következők:
- $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$
 - \mathcal{U} minden vektora egyértelműen áll elő egy \mathcal{V} - és egy \mathcal{W} -beli vektor összegeként,
 - $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U}$,
 - $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U}$.
- P ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \mathbb{R}^m$.



D $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, így bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. A \mathbf{v} vektor az \mathbf{u} vektornak a \mathcal{V} altérre \mathcal{W} mentén való (vele párhuzamosan vett) **vetülete**. E lineáris transzformációt **vetítésnek** (**projekciónak**) nevezzük.

m minden P vetítés az $\text{Im } P$ -re $\text{Ker } P$ mentén való vetítés.

Á Mátixa: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, \mathcal{V} bázisa $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$, \mathcal{W} bázisa $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$. Legyen

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V} | \mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ ($j = 1, 2, \dots, n - r$), ezért a P leképezés \mathbf{P} mátrixára

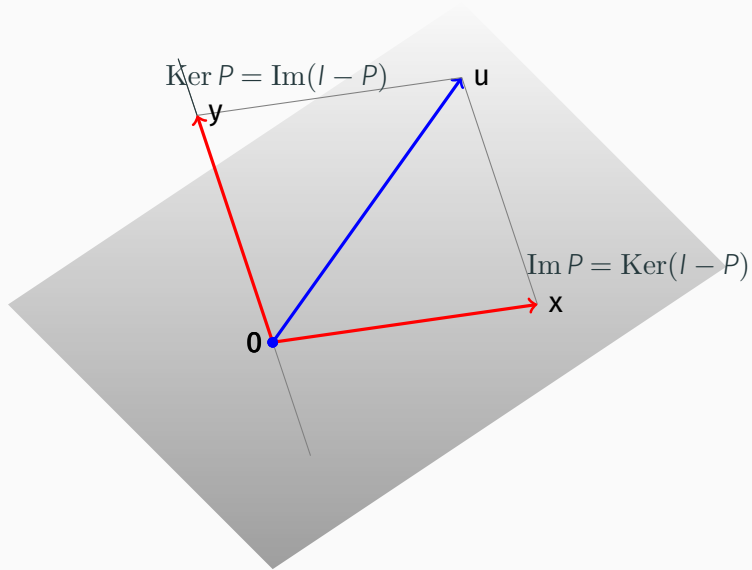
$$\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{P}[\mathbf{V} | \mathbf{W}] = [\mathbf{P}\mathbf{V} | \mathbf{P}\mathbf{W}] = [\mathbf{V} | \mathbf{0}].$$

\mathbf{U} invertálható, ezért

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V} | \mathbf{0}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V} | \mathbf{0}][\mathbf{V} | \mathbf{W}]^{-1}.$$

T **A projekció tulajdonságai:** Legyen $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy projekció.

1. \mathbb{R}^n -nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa $\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
2. $I - P$ is projekció: $\text{Ker}(I - P) = \text{Im } P$, $\text{Im}(I - P) = \text{Ker } P$,
3. $r(P) = \text{trace}(\mathbf{P})$.



Vetítőmátrix felírása

- P** Írjuk fel annak a P vetítésnek a \mathbf{P} mátrixát, mely az $\mathcal{V} = \text{span}(\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$ térre vetíti a $\mathcal{W} = \text{span}(\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{w}_2 = (0, 1, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$ tér mentén, és annak a \hat{P} vetítésnek a $\hat{\mathbf{P}}$ mátrixát, mely \mathcal{V} mentén \mathcal{W} -re vetíti!
- M** A négy vektor független (determinánsuk nem 0), és $P(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$, $P(\mathcal{W}) = \{\mathbf{0}\}$, így $\mathbf{P}[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2] = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{0}|\mathbf{0}] \rightsquigarrow$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóan megkapható $\hat{\mathbf{P}}$, de egyszerűbb:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés és tükrözés

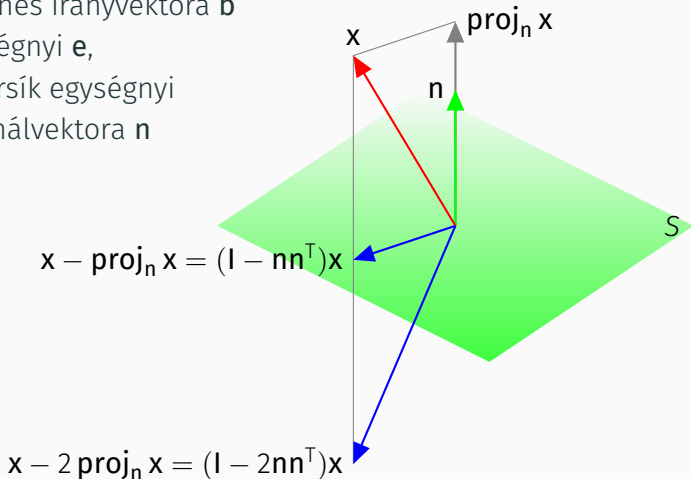
Á Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b} \mathbf{b}^T$ ($\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathbf{e}^T$).

Á (Hiper)síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T$.

Á (Hiper)síkra való tükrözés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n} \mathbf{n}^T$.

J egyenes irányvektora \mathbf{b}
egységnyi \mathbf{e} ,

J hipersík egységnyi
normálvektora \mathbf{n}



Merőleges vetítés \mathbb{R}^n egy alterére

T Ha \mathcal{W} az \mathbb{R}^n egy altere, és az \mathbf{A} mátrix oszlopvektorai a \mathcal{W} egy bázisát alkotják (**A teljes oszloprangú**), akkor a \mathcal{W} alterre való merőleges $\text{proj}_{\mathcal{W}}$ vetítés mátrixa $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$.

B* Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor \mathcal{W} -re eső merőleges vetülete \mathbf{w} .
 \mathbf{A} oszloptere \mathcal{W} , ezért létezik olyan \mathbf{x} vektor, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$.
 $\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, így $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$, tehát $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van \mathbf{A}^T nullterében.

Eszerint $\mathbf{A}^T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}^T(\mathbf{v} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$, innen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}.$$

Az \mathbf{A} mátrix teljes oszloprangú, így $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v}$, amiből $\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v}$.

m Ha $\mathbf{A} = \mathbf{b}$ egy oszlopvektor ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), akkor

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{b}(\mathbf{b}^T\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^T = \frac{1}{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^T.$$

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa?

T Egy \mathbf{P} mátrix pontosan akkor **vetítés mátrixa**, ha

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad (\text{idempotens})$$

és pontosan akkor **merőleges vetítés mátrixa**, ha

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2. \quad (\text{szimmetrikus és idempotens})$$

$$\mathbf{B}^* \quad (\Rightarrow) \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^T = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A} \left((\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\right)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}.$$

(\Leftarrow) Tfh $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2$.

A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát

$\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^T)$.

Eszerint $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re, és ezt akartuk belátni.

Merőleges vetítés absztrakt tér egy alterére, Gram-mátrix

D A \mathcal{V} euklideszi tér független $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorainak

Gram-mátrixa: a

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = [\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle \end{bmatrix}$$

T Merőleges vetület kiszámítása L! \mathcal{V} egy euklideszi tér, \mathcal{W} egy végesdimenziós altere, melynek $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ egy bázisa, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Ekkor

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k,$$

ahol $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ a $\mathbf{G}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása, \mathbf{G} a \mathcal{B} vektoraihoz tartozó Gram-mátrix, és $[\mathbf{b}]_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v} \rangle$.

m Ha $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, akkor L! $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k] \rightsquigarrow \mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}$, $\mathbf{G}\mathbf{c} = \mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{c} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}$, $\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}$.

Merőleges vetület kiszámítása Gram-mátrixszal

P $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]$ a valós együtthatós polinomok euklideszi tere a

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx,$$

skaláris szorzással és $\mathcal{W} = \text{span}(1, x, x^2) \subseteq \mathcal{V}$. Kérdés:

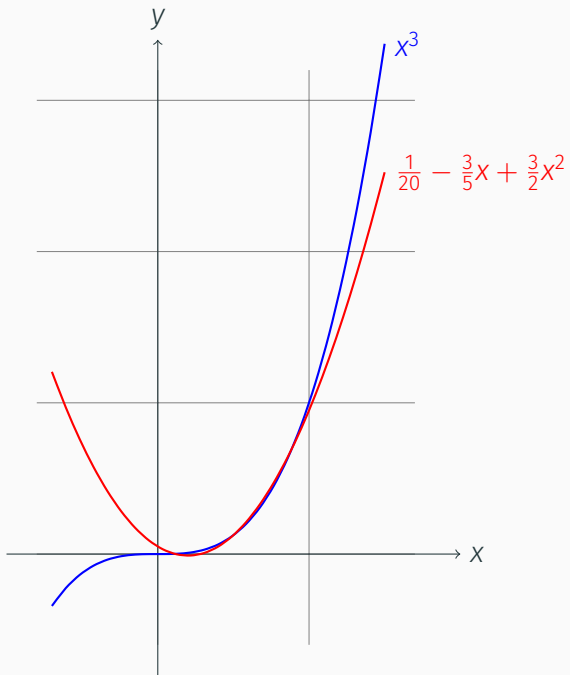
$$\text{proj}_{\mathcal{W}} x^3 = ?$$

M Az x^3 polinom vetülete \mathcal{W} -re $c_1 + c_2x + c_3x^2$ alakú. Az ismeretlen c_i együtthatókra

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, x^3 \rangle \\ \langle x, x^3 \rangle \\ \langle x^2, x^3 \rangle \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow (c_1, c_2, c_3) = (1/20, -3/5, 3/2)$, azaz x^3 merőleges vetülete

$$\frac{1}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x^2.$$



Legjobb közelítés

Altértől való távolság

- D** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leq \mathbb{R}^n$ altér. \mathbf{x} -nek a \mathcal{W} altértől való távolságán a \mathcal{W} altér \mathbf{x} -hez legközelebbi \mathbf{w} vektorának tőle való távolságát értjük.
- T** **Legjobb közelítés tétele:** Az \mathbf{x} vektornak egyetlen \mathcal{W} -beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$.
- B** $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) + (\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$.
első kifejezés \mathcal{W}^\perp , a második \mathcal{W} eleme!
 $(\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) \perp (\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$
Pithagorász: $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2 + |\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2$.
 $\rightsquigarrow |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2$
egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$
- K** $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$.

Altértől való távolság

P Bontsuk fel az $\mathbf{x} = (8, 4, 2, 1)$ vektort

$\mathcal{W} = \text{span}((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$ -be eső és \mathcal{W} -re merőleges vektorok összegére.

M A \mathcal{W} -re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T$, ahol \mathbf{W} két oszlopa a megadott két bázisvektor:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

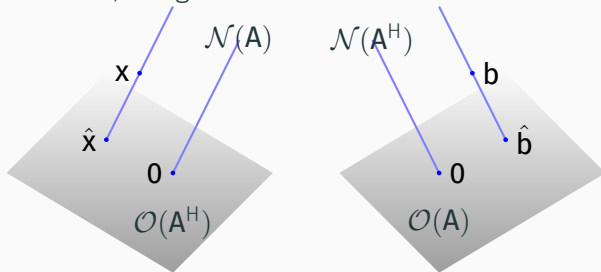
$\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = \mathbf{Px} = (8, 1, -1, 0)$ és $\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = (0, 3, 3, 1)$.

Egyenletrendszer optimális megoldása

Á $Ax = b$ konzisztens $\iff b \in \mathcal{O}(A)$.

D Az $Ax = b$ optimális megoldásain az $Ax = \text{proj}_{\mathcal{O}(A)} b$ megoldásait értjük.

T Az $Ax = b$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $A^T A \hat{x} = A^T b$ egyenletrendszer megoldásaival (normálegyenlet-rendszer). Ezek közül egyetlen egy esik az A mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.



Lineáris és polinomiális regresszió

T Az (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az alábbi egyenletet, mely egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

B Megoldandó:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

D **Polinomiális regresszióról** beszélünk, ha az

$y = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ egyenlet a_i együtthatóira keresünk optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ismert (x_i, y_i) párok sorozata mellett, ahol $i = 1, 2, \dots, n$.

m Keresendő az n egyenletből álló $k + 1$ -ismeretlenes

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_1^k = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + \dots + a_kx_2^k = y_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + \dots + a_kx_n^k = y_n$$

egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1, \dots, a_k ismeretlenekre.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Optimális megoldása a normálegyenletből megkapható.

P **Másodfokú regresszió:** Az x, y változók között egy $y = a + bx + cx^2$ összefüggés együtthatóit keressük, illetve azok legkisebb négyzetek elve szerinti legjobb becslését. $n = 4$ mérést végzünk, a mért adatok

k	x_k	y_k
1	-1	3
2	0	0
3	1	1
4	2	1

M A megadott adatok közti összefüggés mátrixszorzat alakja: $a + bx + cx^2 = y \rightsquigarrow$ az együtthatómátrix k -adik sorvektora $(1, x_k, x_k^2)$:

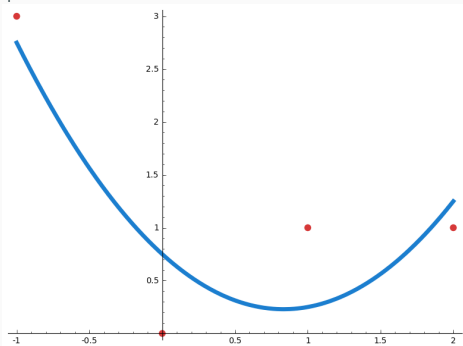
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- A normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A megoldás $(a, b, c) = \frac{1}{4}(3, -5, 3)$, így a megadott (x_k, y_k) pontokra legjobban illeszkedő másodfokú polinom:

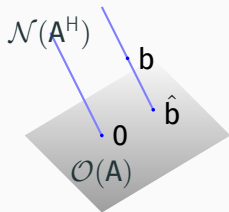
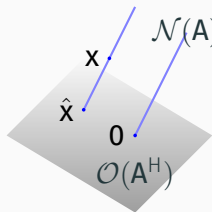
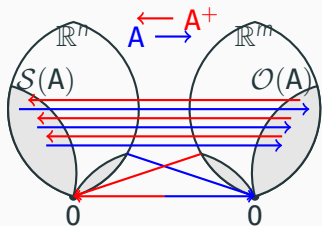
$$y = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}x^2.$$



Pszeudoinverz

A pszeudo inverz fogalma

Á A sortér és az oszloptér közt létezik természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyetlen sortérbe eső mo-a).



D Az \mathbf{A} mátrix (Moore–Penrose-féle) pszeudo inverze az az \mathbf{A}^+ mátrix, melyre tetszőleges \mathbf{b} esetén az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$.

T A pszeudo inverz létezése

Jelölje az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldását $\hat{\mathbf{x}}$. Az $\mathbf{A}^+ : \mathbf{b} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$ függvény lineáris leképezés, így van mátrixa, melyet \mathbf{A}^+ jelöl.

T Pszeudo inverz hatása a kitüntetett altereken

Legyen \mathbf{A} valós vagy komplex mátrix.

1. Az \mathbf{X} mátrix pontosan akkor pszeudo inverze \mathbf{A} -nak,
 - (a) ha $\mathbf{x} \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$ esetén $\mathbf{X}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$, és
 - (b) ha $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ esetén $\mathbf{Xz} = \mathbf{0}$.
2. Ha \mathbf{A}^+ az \mathbf{A} pszeudo inverze, akkor

$$\mathbf{AA}^+ = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A}^H)}.$$

Tehát \mathbf{AA}^+ , illetve $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ merőlegesen vetíti az \mathbf{A} , illetve az \mathbf{A}^H oszlopterére.

Néhány pszeudo inverz

Á $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, ha \mathbf{A} invertálható,

Á $\mathbf{O}_{m \times n}^+ = \mathbf{O}_{n \times m}$,

Á $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,

Á $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,

Á ha $a_{ij} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]_{m \times n}^+ = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]_{n \times m}$$

A pszeudo inverz létezése és kiszámítása

- T Ha a valós \mathbf{A} teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$, ha teljes sorrangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, ahol \mathbf{B} teljes oszlop-, \mathbf{C} teljes sorrangú (ld. bázisfelbontás), akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{C}^T(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{B}^T.$$

- B Ha \mathbf{A} teljes oszloprangú, akkor $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$, és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$, vagyis ha $\mathbf{A}^T\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$: $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ha \mathbf{A} teljes sorrangú, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \forall \mathbf{y} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konziszt. Jelölje $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldást, így minden más \mathbf{x} megoldásra $\text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. \mathbf{A}^+ -ra fenn kell álljon $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\right) (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

P Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M \mathbf{B} teljes oszloprangú, így

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^+ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- A \mathbf{C} mátrix teljes sorrangú, így

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- **M** bázisfelbontása **BC**:

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{C}^+ \mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- vagy

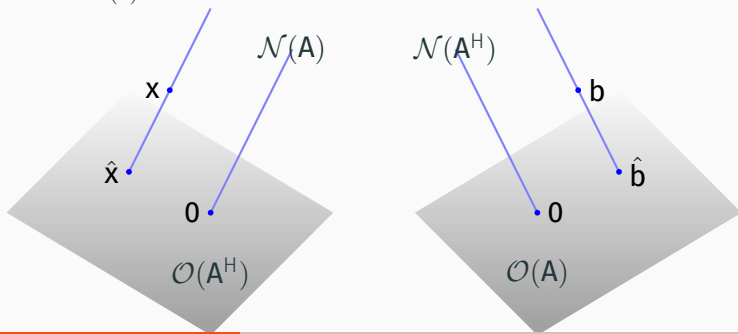
$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \mathbf{C}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A pszeudo inverz tulajdonságai

T Moore–Penrose-tétel: A valós vagy komplex \mathbf{A} mátrixnak \mathbf{X} pontosan akkor pszeudo inverze, ha az alábbi feltételek mind fennállnak:

$$a) \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b) \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c) (\mathbf{AX})^H = \mathbf{AX}, \quad d) (\mathbf{XA})^H = \mathbf{XA}.$$

m E tétel és ami innen is látható, hogy $\mathbf{XA} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A}^H)}$ és $\mathbf{AX} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}$ merőleges vetítések szemléltethető:



A pszeudo inverz és a min. absz. értékű opt. megoldás

P Keressük a minimális abszolút értékű optimális megoldást!

$$y + z = 3$$

$$x + y + 2z = 2$$

$$x + z = 2$$

M Inkonzisztens, ui.:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Pszeudo inverzzel $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ortogonalizáció

Ortogonalizáció

Ortonormált és ortogonális bázis

OR és ONR lineáris függetlensége

- D** A páronként merőleges vektorokból álló vektorrendszer **ortogonális** rendszernek (OR), az egységvektorokból álló OR-t **ortonormált** rendszernek (ONR) nevezzük.
- Á** Egy valós euklideszi térben ha a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer vektorai zérusvektortól különbözőek és OR-t alkotnak, akkor
1. függetlenek,
 2. $\{\mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|\}$ ONR.
- B** TFH valamely c_1, c_2, \dots, c_k konstansokra
- $$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$
- Mivel $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, ezért a \mathbf{v}_i vektorral beszorozva $c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, amiből $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$.
2.
$$\frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_j\|} = \left\langle \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \frac{\mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_j\|} \right\rangle$$
- K** Egy zérusvektort nem tartalmazó OR, vagy ONR mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. (Továbbiakban ONB)

Legjobb közelítés ONB esetén

T V valós euklideszi tér, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \subset V$ ONR és a $\mathbf{v} \in V$ vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_k \quad (1)$$

vektor az $\mathcal{A} = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ altér \mathbf{v} -hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B $\langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), tehát $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \perp \mathcal{A}$, azaz $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}^\perp$.

Így a merőleges vetület definíciója szerint $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

K ha V k -dimenziós (\mathcal{E} a V bázisa), akkor

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_k$$

K Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset V$ OR ($\mathbf{0}$ -t nem tartalmaz), akkor

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i, \text{ és ha } \mathcal{A} \text{ ortogonális bázis, akkor } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i. \quad 33$$

Legjobb közelítés ONB esetén 2

m Az $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$ skalárt a \mathbf{v} vektor \mathbf{e}_i -hez tartozó **Fourier-együtthatójának** is nevezik.

P Határozzuk meg a $(3, 1, 2)$ pontnak az $(2, 3, 6)$ és $(3, -6, 2)$ vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!

M E két vektor a síkban OR-t alkot! Normálás után $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ és $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ ONR.

Behelyettesítés:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{b} \\ &= \left\langle \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right), (3, 1, 2) \right\rangle \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) + \left\langle \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7}\right), (3, 1, 2) \right\rangle \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7}\right) \\ &= 3\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) + 1\left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7}\right) \\ &= \left(\frac{9}{7}, \frac{3}{7}, \frac{20}{7}\right).\end{aligned}$$

Ortogonalizáció

Gram-Schmidt-ortogonalizáció

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

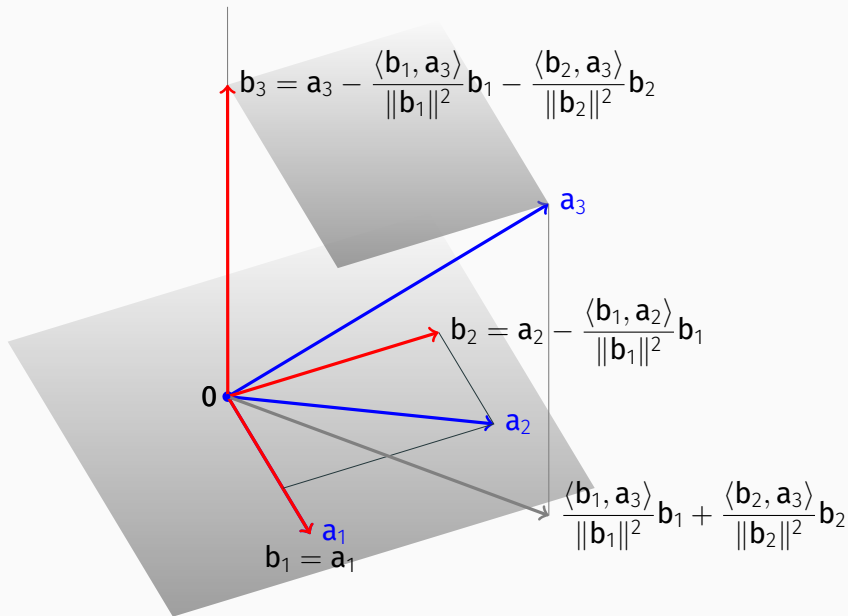
- T Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer egy \mathcal{V} euklideszi térben, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén

$$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i). \quad (2)$$

Ebből normálással ortonormált rendszert kapunk:

$$\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|} \right\}$$

- m Igazolható, hogy a Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik összefüggő vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy pontosan akkor lesz $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$, ha \mathbf{a}_i nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz \mathbf{a}_i benne van a $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$ altérben.



B A $\text{span}(\mathbf{a}_1) = \text{span}(\mathbf{b}_1)$ összefüggés teljesül, ha $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.

$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ és $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$ teljesül, ha \mathbf{b}_2 az \mathbf{a}_2 -nek a \mathbf{b}_1 által kifeszített altérre merőleges összetevője:

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{a}_2 - \left\langle \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \mathbf{a}_2 \right\rangle \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1$$

$\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, hisz $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{a}_1$ lenne, azaz \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 nem lenne független, ez ellentmondás.

$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \checkmark$

$\mathbf{b}_j \Rightarrow \mathbf{b}_{i+1}$: az \mathbf{a}_{i+1} vektornak a

$$\text{span}\left(\frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_j}{\|\mathbf{b}_j\|}\right)$$

altérre merőleges összetevője legyen \mathbf{b}_{i+1}

$$\mathbf{b}_{i+1} := \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^i \frac{\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_{i+1} \rangle}{\|\mathbf{b}_j\|^2} \mathbf{b}_j$$

$\mathbf{b}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben \mathbf{a}_{i+1} nem volna független az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i\}$ vektorrendszerétől, azaz \mathcal{A} nem volna független.

$\mathbf{b}_{i+1} \in \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1})$, $\mathbf{a}_{i+1} \in \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}) \rightsquigarrow (2)$

✓

Gram-Schmidt-ortogonalizáció: 1. példa

P Ortogonalizáljuk a $\{(3, 6, 2), (1, 9, -4), (1, 2, 3)\}$ vektorrendszert!
Adjuk meg a tér ortonormált bázisát is!

M $\mathbf{b}_1 = (3, 6, 2)$

$$\mathbf{b}_2 = (1, 9, -4) - \frac{(3, 6, 2) \cdot (1, 9, -4)}{(3, 6, 2) \cdot (3, 6, 2)}(3, 6, 2) = (-2, 3, -6)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= (1, 2, 3) - \frac{(3, 6, 2) \cdot (1, 2, 3)}{(3, 6, 2) \cdot (3, 6, 2)}(3, 6, 2) \\ &\quad - \frac{(-2, 3, -6) \cdot (1, 2, 3)}{(-2, 3, -6) \cdot (-2, 3, -6)}(-2, 3, -6) = \frac{1}{7}(-6, 2, 3)\end{aligned}$$

- Az ONR:

$$\left\{ \frac{1}{7}(3, 6, 2), \frac{1}{7}(-2, 3, -6), \frac{1}{7}(-6, 2, 3) \right\}$$

Gram-Schmidt-ortogonalizáció: 2. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (3, -1, 3, -1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= (6, 2, 2, -2) - \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (6, 2, 2, -2)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(2, -2, 2, -2) \cdot (6, 2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2) \end{aligned}$$

Az ONR (ONB):

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Gram-Schmidt-ortogonalizáció: 3. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(4, 0, 4, 0)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (3, -1, 3, -1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= (4, 0, 4, 0) - \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (4, 0, 4, 0)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(2, -2, 2, -2) \cdot (4, 0, 4, 0)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= (6, 2, 2, -2) - \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (6, 2, 2, -2)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(2, -2, 2, -2) \cdot (6, 2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2)\end{aligned}$$

ONR, mint az előző példában.

- m Nevezetesek az ortogonalis polinomok, melyek a polinomok terében adnak ortogonalis rendszert a

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x) dx,$$

skalárszorzattal, ahol $w(x)$ egy adott súlyfüggvény. Pl.:

	intervallum	$w(x)$	az első néhány polinom
Legendre-polinomok	$[-1, 1]$	1	$1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$
Csebisev-polinomok	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, \dots$
Hermite-polinomok	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$1, x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, \dots$

Gram-Schmidt-ortogonalizáció: 4. példa

- P** Az $\{x - 1/3, x - 3\}$ függvények által generált euklideszi térben keressünk **ortonormált** $\{f_1(x), f_2(x)\}$ bázist az $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ skaláris szorzás mellett Gram-Schmidt-ortogonalizációval!
- M** GS-ort., majd normálás: $a_1(x) = b_1(x) = x - 1/3$, $a_2(x) = x - 3$,

$$\begin{aligned} b_2(x) &= a_2(x) - \frac{\langle b_1(x), a_2(x) \rangle}{\langle b_1(x), b_1(x) \rangle} b_1(x) = x - 3 - \frac{\int_0^1 (x - \frac{1}{3})(x - 3) dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{3})^2 dx} (x - \frac{1}{3}) \\ &= x - 3 - \frac{-1/3}{1/9} (x - \frac{1}{3}) = x - 3 + 3(x - \frac{1}{3}) = 4x - 4 \end{aligned}$$

$$f_1(x) = \frac{b_1(x)}{\sqrt{\int_0^1 b_1^2(x) dx}} = \frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 3x - 1$$

$$f_2(x) = \frac{b_2(x)}{\sqrt{\int_0^1 b_2^2(x) dx}} = \frac{4x - 4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

QR-felbontás

QR-felbontás

Szemiortogonális mátrixok

Ortogonalis és szemiortogonalis mátrixok

- D** Egy valós négyzetes mátrix **ortogonalis**, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen, **szemiortogonalis** mátrixról beszélünk.
- P** Melyek ortogonalisak és melyek szemiortogonalisak?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

- M** Mindhárom mátrix szemiortogonalis, **C** ortogonalis.
- m** Szerencsétlen szóhasználat (ortogonalis – ortonormált).
 - m** Minden ortogonalis mátrix szemiortogonalis is.
 - m** Egy nem négyzetes mátrixnál vagy csak a sorai, vagy csak az oszlopai alkothatnak ONR-t, négyzetesnél mindkettő.
 - m** Az egységmátrix és minden permutáló mátrix ortogonalis.

Szemiortogonális mátrixok

T Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Az alábbi állítások **ekvivalensek**:

1. \mathbf{Q} szemiortogonális,
2. $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

m Ha $m \leq n$, \mathbf{Q} pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_m$.

m $m \geq n$ esetén \mathbf{Q}^T a \mathbf{Q} bal inverze, $m \leq n$ esetén a jobb inverze.
(később látni fogjuk, hogy $m = n$ esetén az inverze)

QR-felbontás

QR-felbontás és a GS-ortogonalizáció

QR-felbontás definíciója

m elemi sorműveletekkel háromszögalakra hozás \rightarrow LU-felbontás
- ortogonalizációs eljárás eredménye \rightarrow QR-felbontás

D Legyen \mathbf{A} teljes oszloprangú. AMH az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontás
QR-felbontás vagy **redukált QR-felbontás**, ha \mathbf{Q} az \mathbf{A} -val azonos méretű szemiorthonális mátrix, és \mathbf{R} négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.

m Ha a \mathbf{Q} -t új oszlopvektorok hozzávételével kiegészítjük ortogonális mátrixszá, az \mathbf{R} -et zérussorok hozzávételével egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrixszá, akkor ezek szorzata is \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}.$$

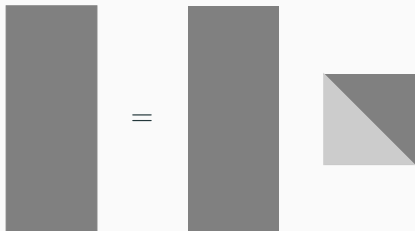
D **Teljes QR-felbontás** (másutt QR-felbontás): \mathbf{A} -t egy ortogonális és egy \mathbf{A} -val azonos méretű felső háromszögmátrix szorzatára bontjuk.

Teljes és redukált QR-felbontás

Teljes: Q ortogonális, R az A -val azonos méretű



Redukált: Q az A -val azonos méretű szemiortog., R négyzetes



A QR-felbontás létezése és egyértelműsége

T Bármely valós, teljes oszloprangú \mathbf{A} mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz **létezik** egy szemioronogonális \mathbf{Q} mátrix és egy \mathbf{R} felső háromszögmátrix **pozitív főátlóbeli elemekkel**, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Az így kapott felbontás **egyértelmű**.

B $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ (\mathbf{A} teljes oszloprangú $\rightsquigarrow k \leq n$).

Létezés: Az ortogonalizáció egységvektorait jelölje \mathbf{q}_i ($i = 1, 2, \dots, k$), tehát $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$. Így léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{a}_1 = r_{11}\mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_k = r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k.$$

(3)

- Ezt mátrixszorzat-alakba írva

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = QR.$$

A Gram-Schmidt-eljárásból látható, hogy $r_{ii} = \|\mathbf{b}_i\| \rightsquigarrow r_{ii} > 0$.

- **R kiszámolása:** $A = QR \rightsquigarrow Q^T A = Q^T QR = I_k R = R \rightsquigarrow R = Q^T A$.

- * **Egyértelműség***: Tfh $A = QR = \hat{Q}\hat{R}$, ahol $Q^T Q = \hat{Q}^T \hat{Q} = I$.

$$A^T A = (QR)^T QR = R^T Q^T QR = R^T R, \rightsquigarrow R^T R = \hat{R}^T \hat{R} \rightsquigarrow (\hat{R}^{-1})^T R^T = \hat{R} R^{-1}.$$

$$A^T A = (\hat{Q}\hat{R})^T \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^T \hat{Q}^T \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^T \hat{R}.$$

A bal oldal alsó, a jobb oldal felső háromszögmátrix \rightsquigarrow mindkét szorzat diagonális. Jelölje R (ill. \hat{R}) főátlója elemeit r_i (ill. \hat{r}_i).

$$\frac{r_i}{\hat{r}_i} = \frac{\hat{r}_i}{r_i} \rightsquigarrow r_i = \hat{r}_i \text{ (} r_i > 0 \text{ és } \hat{r}_i > 0 \text{ miatt)} \rightsquigarrow (\hat{R}^{-1})^T R^T = \hat{R} R^{-1} = I$$

$$\rightsquigarrow R = \hat{R} \rightsquigarrow A = QR = \hat{Q}\hat{R} \text{ miatt } Q = \hat{Q}.$$

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

M A GS második példájában a $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ bázisból az ONB: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valóban,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- m Szokás a QR-felbontást úgy is definiálni, hogy \mathbf{A} tetszőleges (nem kell, hogy teljes oszloprangú legyen) és \mathbf{R} főátlóbeli elemei lehetnek negatívak (sőt, ha \mathbf{A} nem teljes oszloprangú, akkor 0-k is).
- m A Matlab/Octave programok a fenti általánosabb feltételek szerint működnek.
- Á* Ha $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}'$, ahol \mathbf{Q}' szemiortogonális, de \mathbf{R}' főátlójában az i -edik elemek negatívak, ahol $i \in \mathcal{I}$ és \mathcal{I} egy indexhalmaz, akkor \mathbf{R}' i -edik sorát és \mathbf{Q}' i -edik oszlopát -1 -gyel szorozva minden $i \in \mathcal{I}$ -re az \mathbf{A} QR-felbontását kapjuk.
- B* $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}' = \mathbf{Q}'\mathbf{E}\mathbf{E}'\mathbf{R}'$, ahol \mathbf{E} az \mathbf{I} -ből az i -edik elem -1 -re változtatásával kapható ($i \in \mathcal{I}$).

QR-felbontás

Egyenletrendszer megoldása

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, ami megkapható az $\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B A normálegyenletből indulva

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{b} & \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után} \\ (\mathbf{QR})^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^T\mathbf{b} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} & \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \\ \mathbf{R}^T\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} & \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^T)^{-1} \text{ mátrixszal} \\ \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{b}. \end{aligned}$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$.

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

P Oldjuk meg az alábbi inkonzisztens egyrsz-t QR-felbontással:

$$x + 3y + 6z = 8$$

$$x - y + 2z = 2$$

$$x + 3y + 2z = 2$$

$$x - y - 2z = 0$$

$$\text{QR-felbontás: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}: \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás visszahelyettesítéssel: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, 0, 1)$.

Ortogonalis mátrixok

T Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. Q oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
2. $Q^T Q = I_n$.
3. $Q^{-1} = Q^T$.
4. $Q Q^T = I_n$.
5. Q sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

B $1 \Rightarrow 2$: az előző állításban láttuk.

$2 \Rightarrow 3$: Q négyzetes $\rightsquigarrow Q^T Q = I$ miatt Q invertálható $\rightsquigarrow Q^{-1} = Q^T$.

$3 \Rightarrow 4$: $Q^{-1} = Q^T \rightsquigarrow Q Q^T = I_n$.

$4 \Rightarrow 5$: $Q Q^T = I_n$ (sorvektorszor-oszlopvektor) $\rightsquigarrow Q$ sorvektorai ONB-t alkotnak.

$5 \Rightarrow 1$: Bizonyítottuk, hogy $1 \Rightarrow 5$. Alkalmazzuk ezt Q^T -ra.

Ortogonalis mátrix inverze a transzponáltja

P Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

mátrixok inverzét!

M Mindhárom mátrix ortogonalis, tehát az inverzek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonalis mátrixhoz tartozó mátrixleképezés

T Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. Q ortogonalis.
2. $\|Qx\| = \|x\|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra.
3. $Qx \cdot Qy = x \cdot y$ minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B $1 \Rightarrow 2$: Ha Q ortogonalis, akkor minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\|Qx\|^2 = Qx \cdot Qx = (Qx)^T(Qx) = x^T Q^T Qx = x^T x = \|x\|^2.$$

$2 \Rightarrow 3$: Mivel $\|Q(x+y)\| = \|x+y\|$ és $\|Q(x-y)\| = \|x-y\|$, ezért minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra (a polarizációs formulával):

$$\begin{aligned} Qx \cdot Qy &= \frac{1}{4} \left(\|Qx+Qy\|^2 - \|Qx-Qy\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\|Q(x+y)\|^2 - \|Q(x-y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) = x \cdot y \end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$: $q_i = Qe_j$ jelöléssel $q_i \cdot q_j = Qe_i \cdot Qe_j = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$.

Ortogonalis mátrix további tulajdonságai

- K** Egy valós euklideszi térben az ortogonalis mátrixhoz tartozó leképezés (ortogonalis leképezés) hossztartó, távolságtartó, skalárszorlattartó, szögtartó (de nem körüljárás-tartó!).
- m** Az ortogonalis mátrixok **nem nagyítják fel** a mérési és kerekítési hibákat, hisz távolságtartók!!!
- T**
1. Ha \mathbf{Q} valós ortogonalis mátrix, akkor $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.
 2. Az $n \times n$ -es valós ortogonalis mátrixok $O(n)$ halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete (az 1 determinánsúak $SO(n)$ halmazából sem).
- B**
1. $\det(\mathbf{Q}^T) \det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, $\det(\mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{Q})$
 $\rightsquigarrow \det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$.
 2. \mathbf{Q} ortogonalis $\rightsquigarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, ami ortogonalis
 - \mathbf{Q}_1 és \mathbf{Q}_2 ortog. $\rightsquigarrow (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ ortogonalis.

Ortogonalis mátrixok

2D és 3D ortogonalis transzformációi

A sík ortogonális transzformációi

T 2D ortogonális transzformációi

Minden $O(2)$ -be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa. Mátrixuk alakja

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

T 3D ortogonális transzformációi

$SO(3)$ minden eleme forgatás mátrixa, $O(3) - SO(3)$ eleme egy origóra való tükrözés és egy forgatás szorzata.

P Az 1 determinánsú ortogonális

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

mátrix milyen tengely körüli és mekkora szöggel való forgatás mátrixa?

M A forgástengely irányvektorára $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$, azaz $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Innen a **forgástengely**:

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 5 & -5 & -10 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Forgásszög: egy \mathbf{v} -re \perp \mathbf{w} vektor képével (pl. $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$):

$$\mathbf{Aw} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cos \alpha = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{Aw}}{\|\mathbf{w}\| \|\mathbf{Aw}\|} = \frac{2}{3}.$$

Ortogonalis mátrixok

Primitív ortogonalis transzformációk

Givens-forgatás

- m Az \mathbb{R}^n forgatásai és tükrözései közül kiválaszthatunk olyan egyszerű, ún. **primitív ortogonális transzformációkat**, melyek mátrixai szorzataként az összes ortogonális mátrix előállítható.
- D **Givens-forgatás**: két koordinátatengely által kifeszített síkban való forgatás a többi koordinátatengely helyben hagyása mellett. Mátrixa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \dots & -\sin \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin \alpha & \dots & \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

P Keressük meg azt a forgatást, mely az (a, b) vektort az $(r, 0)$ -ba viszi, ahol $r^2 = a^2 + b^2$.

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \alpha = a/r$$

$$\sin \alpha = -b/r$$

$$\begin{bmatrix} a/r & b/r \\ -b/r & a/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

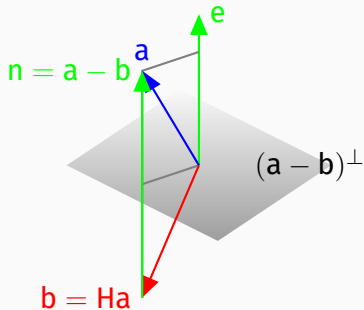
m Egy ilyen részmatrixot tartalmazó **G** Givens-forgatással elérhető, hogy egy **X** mátrix egy eleme helyén 0 legyen a **GX**-ben. (ritka mátrixok, párhuzamosítható számítások)

m $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kiszámítása a túl- vagy alulcsordulás elkerülésével $a \geq b$ esetén: $r = |a| \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

D **Householder-tükrözés:** hipersíkra való tükrözés. Mátrixa (\mathbf{n} normálvektorral vagy \mathbf{e} egységnyi normálvektorral)

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}}\mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

Á $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, akkor az $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\perp$ hipersíkra való Householder-tükrözés az \mathbf{a} vektort \mathbf{b} -be viszi és viszont.



Householder-tükrözés

P Határozzuk meg azt a \mathbf{H} mátrixot, mely az $(1, -1, -1, 1)$ vektort a $(2, 0, 0, 0)$ -ba viszi.

M Az $\mathbf{n} = (1, -1, -1, 1) - (2, 0, 0, 0) = (-1, -1, -1, 1)$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözés mátrixa

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Valóban, $\mathbf{H} \cdot (1, -1, -1, 1) = (2, 0, 0, 0)$.

- Givens-forgatás
 - mátrixelemek eliminálására pl. QR-felbontásnál
 - párhuzamosítható
 - ritka mátrixok esetén hatékonyabb a Householder-tükrözésnél
- Householder-tükrözés
 - QR-felbontás numerikus kiszámításához (a Gram–Schmidt-eljárás instabil)
 - nem ritka mátrixokra gyorsabb a Givens-forgatásnál a QR-felbontás kiszámításában
 - mátrix Hessenberg (a subdiagonális alatt minden elem 0) alakra hozásánál

Ortogonalis mátrixok

QR primitív ortogonalis transzformációval*

QR-felbontás Givens-forgatással

P Adjuk meg a következő mátrix QR-felbontását Givens-forgatással!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

M Nullázandó: harmadik sor első eleme (a második sor első eleme már eleve nulla), forgatómátrix: első és harmadik sor és oszlop: $(a, b) = (8, 15)$, $r^2 = 64 + 225 = 17^2$, $\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{8}{17}$, $\sin \alpha = -\frac{b}{r} = -\frac{15}{17}$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}$, azaz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Nullázandó: harmadik sor második eleme, forgatómátrix a második és harmadik sorban és oszlopban: $(a, b) = (4, 3)$, $r^2 = 16 + 9 = 5^2$, $\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{b}{r} = -\frac{3}{5}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_1$, azaz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & 0 & -\frac{15}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel (ötlet)

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = H_1$$

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ H_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & H_3 & \end{array} \right]$$

P Adjuk meg az előző feladatbeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-tükrözéssel is!

M $|(8, 0, 15)| = 17$, így $(8, 0, 15) - (17, 0, 0) = (-9, 0, 15) = \mathbf{n}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1 &= \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{81 + 225} \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{153} \begin{bmatrix} 81 & 0 & -135 \\ 0 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 225 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 15 \\ 0 & 17 & 0 \\ 15 & 0 & -8 \end{bmatrix} \\ &\quad \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$- \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 15 \\ 0 & 17 & 0 \\ 15 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

- A jobb alsó 2×2 -es blokkot alakítjuk tovább.

$$|(4, -3)| = 5, \text{ így } (4, -3) - (5, 0) = (-1, -3) = \mathbf{n}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T) \mathbf{A}_2 = \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

m E felbontás megegyezik az előzővel, de ez nem törvényszerű, a Givens-forgatással negatív számok is kerülhetnek a \mathbf{R} főátlójába.

QR-felbontás Givens-forgatással

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

M az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét: $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
 $\cos \alpha = 4/5$, $\sin \alpha = -3/5$.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk ($a = 5$, $b = 12$, tehát $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $\cos \alpha = 5/13$, $\sin \alpha = -12/13$):

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll.

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

M Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{n} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

- Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4, 3) \mapsto (5, 0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{n} = (4, 3) - (5, 0) = (-1, 3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{n}^T\mathbf{n}}\mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array} \right], \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Speciális komplex mátrixok

Unitér mátrixok

m az unitér mátrixok az ortogonálisok komplex analogonjai

D **Unitér mátrix:** Egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix **unitér**, ha $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

T Egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:

1. $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$,
2. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$,
3. \mathbf{U} oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
4. \mathbf{U} sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
5. $\|\mathbf{U} \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
6. $\mathbf{U} \mathbf{x} \cdot \mathbf{U} \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

B Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható.

- m Komplex mátrixok szorzatában NEM sorvektor és oszlopvektor skaláris szorzata szerepel!
- m $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, de $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$.
- T **Komplex mátrix kitüntetett alterei** Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, akkor
 1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$,
 2. $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$,

GS-ortogonalizáció komplex terekben*

P Ortogonalizáljuk az $(i, 0, 0)$, (i, i, i) , $(i, i, 0)$ vektorokból álló vektorrendszert.

M $\mathbf{b}_1 = (i, 0, 0)$, a továbbiakban használjuk a következő képlet valamelyik alakját:

$$\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{\mathbf{b}_k (\mathbf{b}_k^H \mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{b}_k^H \mathbf{b}_k} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{(\mathbf{b}_k^H \mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{b}_k^H \mathbf{b}_k} \mathbf{b}_k$$

$$- \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

GS-ortogonalizáció komplex terekben*

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ i/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$$

Önadjungált mátrixok

D Az A komplex mátrixot **önadjungált** vagy **Hermite-féle mátrixnak** nevezzük, ha

$$A^H = A.$$

P Melyek önadjungáltak?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

m önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak

m Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált,

Ferdén önadjungált mátrixok

D $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **ferdén önadjungált**, ha

$$A = -A^H$$

P $\begin{bmatrix} 2i & 3-i \\ -3-i & 0 \end{bmatrix}$ ferdén önadjungált.

Á ferdén önadjungált mátrixok főátlójában tiszta imaginárius számok állnak (a 0 is annak tekintendő).

Á ha A ferdén önadjungált, akkor iA és $-iA$ önadjungált.

Á Minden komplex négyzetes mátrix egyértelműen előáll egy önadjungált és egy ferdén önadjungált mátrix összegeként.

B $A = B + C$, ahol $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$ és B önadjungált, C ferdén önadjungált.

D Az adjungáltjával fölcserélhető mátrixokat **normális** mátrixoknak nevezzük:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$$

Á Minden valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix normális. Minden komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér mátrix normális.

m Van olyan mátrix, mely nem esik a fönt felsorolt osztályokba, de normális:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Néhány elemi állítás

F $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$.

M $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$

- $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \rightsquigarrow (\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$

F Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált és $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitér mátrixok, akkor

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$$

önadjungált! (Önadjungált mátrixhoz unitéren hasonló mátrix is önadjungált!)

M $(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U})^H = \mathbf{U}^H \mathbf{A}^H (\mathbf{U}^{-1})^H = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{U}^H)^H = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$

F Legyen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix.
Ekkor minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorra

$$(\mathbf{S}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}), \text{ ill. } (\mathbf{H}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{y})!$$