ANALÍZIS 1. **I. PÓTZÁRTHELYI** **2013. november 7.**
Mérnök informatikus szak A csoport Munkaidõ: 90 perc

---

1. feladat (18 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ definícióját.
b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2 - n^3} = -\infty$
c) Konvergens-e az $a_n = \dfrac{\cos n^2}{\sqrt[3]{n^2 - n^3}}$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ha minden $M < 0$ esetén létezik olyan $N(M) \in \mathbb{N}$ szám, melyre $a_n < M$ ha $n \geq N(M)$ (**3p**)
b) Legyen $M < 0$, ekkor $\sqrt[3]{n^2 - n^3} = \sqrt[3]{n^2(1-n)} < \sqrt[3]{1-n}$ (vagy $n \geq 2$ esetén $\sqrt[3]{n^2 - n^3} < \sqrt[3]{\frac{n^3}{2} - n^3}$) (**3p**), vagyis elég ha

$$M > \sqrt[3]{1-n} \Leftrightarrow n \geq 1 - M^3, \quad (\text{vagy } M > \sqrt[3]{-\frac{n^3}{2}}) \Leftrightarrow n > -\sqrt[3]{2}M), \quad (\mathbf{4}\text{p})$$

tehát $N(M) = [1 - M^3]$ (vagy $N(M) = \max(2, [-\sqrt[3]{2}M])$).(**2p**)
c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2 - n^3} = -\infty$, így $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2 - n^3}} = 0$, (**2p**) és $-1 \leq \cos n^2 \leq 1$ (**2p**), tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n^2}{\sqrt[3]{n^2 - n^3}} = 0. \qquad (\mathbf{2p})$$

---

2. feladat (22 pont)
Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$a)\ \left(\frac{3n^2 - 2}{3n^2 + 4}\right)^{4n^2+2} \qquad b)\ \left(\frac{3n^2 + 4}{4n^2 + 2}\right)^{3n^2-2} \qquad c)\ \left(\frac{4n^2 + 2}{3n^2 - 2}\right)^{3n^2+4}.$$

$$a)\ \left(\frac{3n^2 - 2}{3n^2 + 4}\right)^{4n^2+2} \overset{\mathbf{4p}}{=} \left(\frac{\left(1 - \frac{2}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1 + \frac{4}{3n^2}\right)^{3n^2}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{2}{3n^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{4}{3n^2}\right)^2} \overset{\mathbf{2p}}{\to} \left(\frac{e^{-2}}{e^4}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot 1 = e^{-8}.$$

b) $\dfrac{3n^2 + 4}{4n^2 + 2} = \dfrac{3 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{2}{n^2}} \to \dfrac{3}{4}$ (**2p**), így $\varepsilon < \frac{1}{4}$, és $n \geq N$ esetén

$$\frac{3n^2 + 4}{4n^2 + 2} < \frac{3}{4} + \varepsilon < 1, \qquad (\mathbf{2p})$$

tehát

$$0 \le \left(\frac{3n^2+4}{4n^2+2}\right)^{3n^2-2} \le \left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)^{3n^2-2} \to 0, \qquad (\mathbf{3p})$$

vagyis a rendõrelv miatt a sorozat 0-hoz tart. (**1p**)

c) $\dfrac{4n^2+2}{3n^2-2} = \dfrac{4+\frac{2}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}} \to \dfrac{4}{3}$, (**2p**), így $\varepsilon < \frac{1}{3}$, és $n \ge N$ esetén

$$\frac{4n^2+2}{3n^2-2} > \frac{4}{3} - \varepsilon > 1, \qquad (\mathbf{2p})$$

tehát

$$\left(\frac{4n^2+2}{3n^2-2}\right)^{3n^2+4} \ge \left(\frac{4}{3}-\varepsilon\right)^{3n^2+4} \to \infty,, \qquad (\mathbf{3p})$$

vagyis a speciális rendõrelv miatt a sorozat ∞-hez tart. (**1p**)

---

3. feladat (18 pont)

Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{2^{2n+3} + (-4)^n + 6} \qquad\qquad b_n = \frac{n! \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 4^n}{n3^n + 4^n}$$

sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergensek-e a sorozatok?

Ha n páros $a_n = \sqrt[n]{8 \cdot 4^n + 4^n + 6} = \sqrt[n]{9 \cdot 4^n + 6}$, vagyis

$$4 \leftarrow 4\sqrt[n]{9} = \sqrt[n]{9 \cdot 4^n} \le a_n \le \sqrt[n]{9 \cdot 4^n + 6 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{15} \to 4, \qquad (\mathbf{3p})$$

ha n páratlan $a_n = \sqrt[n]{8 \cdot 4^n - 4^n + 6} = \sqrt[n]{7 \cdot 4^n + 6}$, vagyis

$$4 \leftarrow 7\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{7 \cdot 4^n} \le a_n \le \sqrt[n]{7 \cdot 4^n + 6 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{13} \to 4. \qquad (\mathbf{3p})$$

Így a sorozat torlódási pontjainak halmaza: $\{4\}$, $\limsup a_n = 4 = \liminf a_n$, tehát a sorozat konvergens, és határértéke 4 (**2p**).

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n!+4^n}{n3^n+4^n} = \dfrac{n!}{4^n} \cdot \dfrac{1+\frac{4^n}{n!}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} > \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n!}{4^n} \overset{\mathbf{3p}}{\to} \infty, & n = 4k+1 \\[2ex] \dfrac{-n!+4^n}{n3^n+4^n} = \dfrac{n!}{4^n} \cdot \dfrac{-1+\frac{4^n}{n!}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} < -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n!}{4^n} \overset{\mathbf{3p}}{\to} -\infty, & n = 4k+3 \\[2ex] \dfrac{4^n}{n3^n+4^n} = \dfrac{1}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 1, & n = 2k \end{cases}$$

Így a sorozat torlódási pontjainak halmaza: $\{-\infty, 1, \infty\}$, $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$, tehát a sorozat nem konvergens. (**2p**)

---

4. feladat (14 pont)
Legyen $a_1 = 4$, és $n = 1, 2, ...$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 6}$.
a) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén $1 < a_n < 6$.
b) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.
c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $1 < a_1 = 4 < 6$ (**2p**), és

$$\begin{aligned} 1 < a_n < 6 \quad &\Longrightarrow 7 < 7a_n < 42 \Longrightarrow 1 < 7a_n - 10 < 36 \\ &\overset{\mathbf{2p}}{\Longrightarrow} 1 < \sqrt{7a_n - 16} = a_{n+1} < 6. \end{aligned}$$

b) $a_2 = \sqrt{22} > 4 = a_1$ (**2p**), és

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} \quad &\Longrightarrow 7a_n < 7a_{n+1} \Longrightarrow 7a_n - 6 < 7a_{n+1} - 6 \\ &\overset{\mathbf{2p}}{\Longrightarrow} a_{n+1} = \sqrt{7a_n - 6} < \sqrt{7a_{n+1} - 6} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

c) (a_n) monoton növõ és felülrõl korlátos, így konvergens (**2p**), vagyis van határértéke:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{7a_n - 6} = \sqrt{7A - 6},$$

tehát $A^2 - 7A + 6 = 0$, így $A = 1$ vagy $A = 6$ (**2p**), de mivel $a_n \geq 4$, így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$ (**2p**).

---

5. feladat (16 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n + 3^{2n}} \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 5n + 7}}.$$

---

a) $0 \leq \dfrac{5^n}{3^n + 3^{2n}} \leq \dfrac{5^n}{3^{2n}} \leq \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$ (**3p**), és $\left|\dfrac{5}{9}\right| < 1$, így $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$ sor konvergens (**3p**), így a majoráns-kritérium alapján az eredeti sor is konvergens. (**2p**)
b) $1 \leftarrow \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2 + 5n + 7} \leq \sqrt[n]{n^2 + 5n^2 + 7n^2} = \sqrt[n]{n^2}\sqrt[n]{13} \to 1$ (**4p**), így

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 5n + 7}} \to 1 \neq 0, \qquad (\mathbf{2p})$$

vagyis nem teljesül a sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel, így a sor divergens (**2p**).

---

6. feladat (12 pont)
a) Definiálja a Leibniz-sor fogalmát, és ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot.
b) Igazolja, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ sor konvergens.
c) Adjon becslést az $s \approx s_{96}$ közelítés hibájára.

---

a) A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ sor Leibniz-sor, ha $a_n > 0$, $a_n \to 0$, és $a_n > a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A Leibniz-sorok konvergensek. (**3p**)
b) $0 < \sqrt{n+3}$, az $\sqrt{n}$ részsorozata, így monoton növõen ∞-hez tart, tehát a reciproka 0-hoz tart monoton csökkenõen, így a sor Leibniz-sor, tehát konvergens. (**6p**)
c) $|s - s_{96}| < \frac{1}{\sqrt{97+3}} = \frac{1}{10}$. (**3p**)