**ANALÍZIS(2)**
Mérnök Informatikus szak

**II. ZÁRTHELYI**

**2008. november 21.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

**1. feladat (10 pont)**

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,(n+1)!}{(2n-1)!}$$

a.) (1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c \quad (a_n > 0)$

Ha $0 \le c < 1$ : $\sum^{\infty} a_n$ konv.,

$c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum^{\infty} a_n$ div. (2)

$(c = 1 : \quad ?\ )$

b.) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{2^{n+1}(n+2)!\,(2n-1)!}{(2n+1)!\;2^n\,(n+1)!}}_{(2)} = \frac{\cancel{2}\,(n+2)}{(2n+1)\cdot\cancel{2}n} = (2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{0}\ \underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{1} \underbrace{\to 0 < 1}_{(2)} \underbrace{\Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv.}}_{(2)}$$

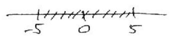
**2. feladat (12 pont)**

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergencia tartományát:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,(-9)^n}\,x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,(-9)^n}\,(x+7)^{2n}$

a.) $x_0 = 0$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2\cdot 9} \longrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{R_a} \Rightarrow R_a = 9$ (5)




$x = -9$ : $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv.

$x = 9$ : $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konv. (Leibniz sor, de abs. konv. is)

K. T.: $[-9, 9]$ (2)



b.) $x_0 = -7$

$u := (x+7)^2$ helyettesítéssel az a.)-beli feladatot kapjuk, ezért konvergens, ha

$$\underbrace{-9 \le u}_{\forall\, x\text{-re fennáll}} = \overbrace{(x+7)^2 \le 9}^{\Rightarrow\ |x+7| \le 3} \quad (2)$$

K. T.: $[-10, -4]$ (2) $R_b = 3$ (1)

**3. feladat (17 pont)**

$$f(x) = x\,\sin(3\,x^2) \qquad g(x) = \frac{1}{1+2x^2}$$

a) Írja fel az $f$ és $g$ függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(10)}(0) = ?$, $f^{(11)}(0) = ?$ (A megfelelő sorfejtésből adjon választ!)

a) $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \qquad u \in \mathbb{R}$ (2)

(Vagy szummásan: $\sin u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$ )

$f(x) = x \sin 3x^2 = x\left(3x^2 - \frac{3^3x^6}{3!} + \frac{3^5x^{10}}{5!} + \dots\right) =$

$= 3x^3 - \frac{3^3x^7}{3!} + \frac{3^5x^{11}}{5!} + \dots$ (3) $x \in \mathbb{R}$ (2)

(Szummásan: $f(x) = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}\,x^{4n+3}$ )

$g(x) = \frac{1}{1-(-2x^2)} = 1 - 2x^2 + 2^2x^4 - 2^3x^6 + \dots$ (3) $\left(= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}\right)$

$q = -2x^2$

$|q| = |-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

KT: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2)

**7. feladat (11 pont)**

$$f(x,y) = (2x-y)^4 + 4x^2 - 8y$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$
Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

b) Írja fel a függvény $P_0(1,2)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $\boxed{6}$

$f'_x = 4(2x-y)^3\cdot 2 + 8x$ } $f'_x, f'_y$ mindenütt $\exists$ és folytonos

$f'_y = 4(2x-y)^3(-1) - 8$ } $\Rightarrow$ $f$ mindenütt tot. deriválható (2)

(2)+(2)

b.) $\boxed{5}$ Az érintősík: $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ (2)

$f'_x(1,2) = 8$, $f'_y(1,2) = -8$, $f(1,2) = -12$

$8(x-1) - 8(y-2) - (z+12) = 0$ (3)

**8. feladat (6 pont)**

A $g \in C^2_{\mathbb{R}}$ egyváltozós függvény változója helyébe írjuk az $e^{3x^2+4y^2}$ kifejezést! Legyen az így kapott kétváltozós függvény $f(x,y) = g(e^{3x^2+4y^2})$ !

$f'_x = ?$ $f''_{xy} = ?$

$f'_x = g'(e^{3x^2+4y^2})\, e^{3x^2+4y^2}\cdot 6x$ (2)

$f''_{xy} = \left(g''(e^{3x^2+4y^2})\, e^{3x^2+4y^2}\cdot 8y\right)\cdot e^{3x^2+4y^2}\, 6x + g'(e^{3x^2+4y^2})\left(e^{3x^2+4y^2}\cdot 8y\cdot 6x\right)$ (4)



*Pótfeladat (csak az elégségeshez):*

**9. feladat (10 pont)**

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{5x^2}$, $x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $x_0 = 2$

a.) $\boxed{4}$ $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$ $u \in \mathbb{R}$ alapján:

$e^{5x^2} = 1 + 5x^2 + \frac{5^2}{2!}x^4 + \frac{5^3}{3!}x^6 + \dots$ $x \in \mathbb{R}$

(Vagy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Big|_{u=5x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}x^{2n}$ ; $x \in \mathbb{R}$)

b.) $\boxed{6}$ $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)+7} = \dfrac{1}{7}\,\dfrac{1}{1-\frac{-(x-2)}{7}} = \dfrac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{-(x-2)}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{7^{n+1}}(x-2)^n$ (4)

$|q| = \left|-\frac{x-2}{7}\right| = \frac{|x-2|}{7} < 1 \Rightarrow |x-2| < 7$

KT: $(-5, 9)$ (2)

**10. feladat (10 pont)**

$$f(x,y) = \frac{e^{4x-y^2}}{y^2+5}, \qquad Q(1,2)$$

Írja fel az $f$ függvény $Q$ pontbeli gradiensét!

$df(Q,(h,k)) = ?$

$f(x,y) = e^{4x}\,\dfrac{e^{-y^2}}{y^2+5}$

$f'_x = 4e^{4x}\dfrac{e^{-y^2}}{y^2+5}$ (2); $f'_y = e^{4x}\dfrac{e^{-y^2}(-2y)(y^2+5) - e^{-y^2}\cdot 2y}{(y^2+5)^2}$ (3)

grad $f(Q) = f'_x(Q)\underline{i} + f'_y(Q)\underline{j} = \frac{4}{9}\underline{i} - \frac{22}{81}\underline{j}$ (2)

$df(Q,(h,k)) = f'_x(Q)\cdot h + f'_y(Q)k = \frac{4}{9}h - \frac{22}{81}k$ (3)

b.) $\boxed{5}$ $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $\qquad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow f^{(k)}(0)=k!\,a_k$

$f^{(10)}(0)=10!\,\underbrace{a_{10}}_{x^{10}\text{ eh-ja }=0}=0$

$f^{(11)}(0)=11!\,\underbrace{a_{11}}_{=\frac{3^5}{5!}}=11!\,\frac{3^5}{5!}$

**4. feladat (10 pont)**

Írja fel az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x^3}}$$

függvény $x_0=0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát! Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

$(1+u)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}u^n \qquad R=1$ (2)

Ennek felhasználásával:

$(1+(-2x^3))^{-1/5}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/5}{n}(-2x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\binom{-1/5}{n}x^{3n}$ (3)

$|-2x^3|=2|x|^3<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=R$ (2)

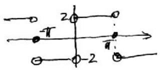
$f(x)=1-2\underbrace{\binom{-1/5}{1}}_{=-\frac{1}{5}}x^3+2^2\underbrace{\binom{-1/5}{2}}_{\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)}{1\cdot 2}}x^6-2^3\underbrace{\binom{-1/5}{3}}_{\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}}x^9+\dots$ (3)

**5. feladat (12 pont)**

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{ha } x\in(-\pi,0)\\ 2, & \text{ha } x\in(0,\pi)\\ 0, & \text{ha } x=0\,,\ \text{vagy } x=\pi\end{cases}, \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

Írja fel az $2\pi$ szerint periódikus $f$ függvény Fourier sorát! Hol állítja elő a Fourier sor a függvényt?

$f(x)=\phi(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$-re a Dirichlet tétel értelmében.
( A szakadási pontokban is, mert $\phi(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=0=f(x)$ )




(2)



$f$ páratlan $\Rightarrow a_k=0 \quad k=0,1,2\dots$ (2)

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin kx\,dx=\frac{4}{\pi}\left.\frac{-\cos kx}{k}\right|_0^{\pi}=$

$=\frac{4}{\pi k}\left(-\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}+1\right)=\begin{cases}0, & \text{ha } k \text{ ps}\\ \frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k \text{ páratlan}\end{cases}$ (5)

$f(x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\dots\right)\left(=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x\right)$ (3)

**6. feladat (22 pont)**

$$f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^4}$$

a) $f'_x(0,0)=?\,;\quad f'_y(0,0)=?$ (A definícióval dolgozzon!)
b) $\operatorname{grad} f|_{(2,-1)}=?$
c) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,-1)}=?\,,$ ha $\underline{e}\parallel -5\,\underline{i}$
d) Adja meg $\max\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,-1)}$ értékét!

a) $\boxed{8}$ $f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\,|h|}{h}=\nexists$

$\left(\lim_{h\to 0\pm 0}\sqrt{2}\frac{|h|}{h}=\pm\sqrt{2}\right)$

$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{3k^4}}{k}=\lim_{k\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt{3}\,k^2}{k}}_{=\sqrt{3}\cdot k}=0$

b.) $\boxed{6}$ Ha $(x,y)\neq(0,0)$

(4) $\left.\begin{aligned} f'_x&=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+3y^4}}\cdot 4x=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^4}}\\ f'_y&=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+3y^4}}\,12y^3=\frac{6y^3}{\sqrt{2x^2+3y^4}}\end{aligned}\right\}$ $f'_x, f'_y$ $\exists$ és folyt. $\Rightarrow \operatorname{grad} f\ \exists$ (Nem volt kérdés.)

$\operatorname{grad} f(2,-1)=f'_x(2,-1)\,\underline{i}+f'_y(2,-1)\,\underline{j}=\frac{4}{\sqrt{11}}\,\underline{i}-\frac{6}{\sqrt{11}}\,\underline{j}$ (2)

c.) $\boxed{5}$ $\underline{e}=-\underline{i}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0}=\operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e}=\left[\frac{4}{\sqrt{11}},\frac{-6}{\sqrt{11}}\right]\cdot[-1,0]=\frac{-4}{\sqrt{11}}$

d.) $\boxed{3}$ $\max\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,-1)}=|\operatorname{grad} f(2,-1)|=\sqrt{\frac{16}{11}+\frac{36}{11}}=\sqrt{\frac{52}{11}}$