ANALÍZIS(1) | **II. ZÁRTHELYI** | **2003. nov. 13.**
Műszaki Informatika szak | B kurzus | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

a) Írja le a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definíciót, ahol $K_{x_0,\delta} \subset D_f$.

b) A határérték definíciója alapján vizsgálja meg a $\lim_{x\to 2} \frac{1}{3x+2}$ határértéket! ($\delta(\varepsilon) = ?$)

c) Az átviteli elv segítségével döntse el, hogy létezik-e a

$$\lim_{x\to\infty} \{x - \tfrac{1}{2}\}$$

határérték! ($\{x\}$ törtrészt jelöl.)

$\boxed{3}$ a) $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ $(\varepsilon, \delta \in \mathbb{R})$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$\boxed{7}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{8} = A$

$$|f(x) - A| = \left| \frac{1}{3x+2} - \frac{1}{8} \right| = \left| \frac{8-3x-2}{8(3x+2)} \right| = \frac{3\,|x-2|}{8\cdot 3\,|x+\frac{2}{3}|} <$$

$$\underset{x>0}{<} \frac{3\,|x-2|}{8\cdot 3\cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{16}|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{16\,\varepsilon}{3}$$

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{2, \frac{16\,\varepsilon}{3}\right\}$$

$\boxed{5}$ c.) $x_n^{(1)} = n$: $f(x_n^{(1)}) = \{n - \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

$x_n^{(2)} = n + \frac{1}{2}$: $f(x_n^{(2)}) = \{n\} = 0 \to 0$

$\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \{x - \frac{1}{2}\} \nexists$

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin \frac{x}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}, & \text{ha } x \in (-2, 2) \\ x^2, & \text{ha } x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \end{cases}$$

a) Páros-e vagy páratlan-e a függvény?

b) Milyen típusú szakadásai vannak a függvénynek az $x = 2$, illetve az $x = 0$ pontban?

$\boxed{3}$ a.) $f(-x)=\dfrac{\arcsin\frac{-x}{4}}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)}=\dfrac{-\arcsin\frac{x}{4}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=f(x) \quad \forall\, |x|<2$-re

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x) \quad \forall\, |x|\geq 2$-re

Tehát $\forall\, x$-re: $f(-x)=f(x)$: f páros

b.)

$\boxed{5}$ $\left\{\begin{array}{l} f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} x^2=4 \\ f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{\arcsin\frac{x}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=+\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\pi/6}{+0} \end{array}\right.$ $\Big\}$ másodfajú (lényeges) szakadási hely

$\boxed{7}$ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} \; \dfrac{x/4}{\frac{\pi}{2}x} \; \dfrac{\frac{\pi}{2}x}{\sin\frac{\pi}{2}x}=1\,\dfrac{1}{2\pi}\cdot 1=\dfrac{1}{2\pi} \\ \text{Ui. } \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1 \\ \text{és } \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \\ x=0\text{-ban megszüntethető (elsőfajú) szakadás van.} \end{array}\right.$

3. feladat (18 pont)

$$f(x)=\sqrt[3]{3x^2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\,x\right)}$$

a) Írja fel az $x_0=1$-hez tartozó érintőegyenes egyenletét!
b) A derivált definíciója alapján döntse el, hogy differenciálható-e f az $x_0=0$-ban?

$\boxed{8}$ a) $y_é=f(1)+f'(1)\,(x-1)$

$f(1)=\sqrt[3]{3\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3\cdot\frac{\pi}{3}}=\sqrt[3]{\pi}$

$f'(x)=\frac{1}{3}\left(3x^2\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(6x\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}x\right)+3x^2\frac{1}{1+3x^2}\cdot\sqrt{3}\right)$, ha $x\neq 0$

$f'(1)=\frac{1}{3}\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(6\cdot\frac{\pi}{3}+3\,\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\,\pi^{-2/3}\left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

$y_é=\sqrt[3]{\pi}+\frac{1}{3}\pi^{-2/3}\left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)(x-1)$

$\boxed{10}$

b.) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{3h^2}\, \mathrm{arctg}\, \sqrt{3} h}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{\underbrace{\frac{3h^2}{h^2}}_{\downarrow \atop 3} \underbrace{\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{3}h}{\sqrt{3}h}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Ui.: $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$

4. feladat (10 pont)

a) Írja le a lokális maximum definícióját az értelmezési tartomány belső pontjában!

b) $$f(x) = x\, e^{-3x}$$

Hol monoton növő illetve csökkenő az f függvény?
Hol van lokális szélsőértéke?

$\boxed{2}$ a.) $\exists K_{x_0,\delta}$: $f(x) \le f(x_0)$, ha $x \in K_{x_0,\delta}$

$\boxed{8}$ b.) $f'(x) = 1 \cdot e^{-3x} + x\, e^{-3x}(-3) = e^{-3x}(1-3x) = 0$, ha $x = \frac{1}{3}$

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
f'	+	0	−
f	↗	lok. max	↘

5. feladat (12 pont)

$$f(x) = 2x^6 - 15x^5 + 20x^4$$

a) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?
b) Egyenletesen folytonos-e f az $(2,7)$ intervallumon?

$\boxed{8}$ a)

$f'(x) = 12x^5 - 75x^4 + 80x^3$

$f''(x) = 60x - 300x^3 + 240x^2 = 60x^2 \underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{(x-1)(x-4)}$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,\infty)$
f''	+	0	+	0	−	0	+
f	∪		∪	infl. p.	∩	infl. p.	∪

nincs infl.

a 1 2 ... 03-11-13/3.

$\boxed{4}$ b.) f folyt $[2,7]$-ben $\Rightarrow$ f egyenletesen folyt. $[2,7]$-ben (tanult tétel)

$\Rightarrow$ f egyenletesen folytonos $(2,7) \subset [2,7]$-en

(Ugyanaz a $\delta(\varepsilon)$ megfelel.)

6. feladat (20 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}^3 x}{\sin(3x) - 3x} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln(4x) = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^x + 5e^{2x} + 2e^{-2x}}{e^x + 3e^{2x} + 4e^{-2x}} = ?$

$\boxed{11}$ a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}^3 x}{\sin 3x - 3x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sh}^2 x\ \mathrm{ch}\,x}{3\cos 3x - 3} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}^2 x + 3\,\mathrm{sh}^3 x}{-9\sin 3x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{6\,\mathrm{ch}^3 x + 12\,\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}\,x + 9\,\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}\,x}{-27\cos 3x}$$

$$= \frac{6+0+0}{-27} = -\frac{2}{9}$$

$\boxed{4}$ b.)

$$\lim_{x\to 0+} \underbrace{x \ln 4x}_{0\cdot(-\infty)} = \lim_{x\to +0} \frac{\ln 4x}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to +0} \frac{\frac{1}{4x}\cdot 4}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +0} (-x) = 0$$

$\boxed{5}$ c.)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3e^x + 5e^{2x} + 2e^{-2x}}{\underbrace{e^x}_{\infty} + 3\underbrace{e^{2x}}_{\infty} + 4\underbrace{e^{-2x}}_{0}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}}_{=1} \frac{3e^{-x} + 5 + 2e^{-4x}}{e^{-x} + 3 + 4e^{-4x}} =$$

$$= \frac{0+5+0}{0+3+0} = \frac{5}{3}$$

7. feladat (13 pont)

Legyen

$$f(x) = 8x - \ln(4x), \qquad x \in \left[\tfrac{1}{5}, 3\right]$$

a) $f'(x) = ?$
Indokolja meg, hogy f-nek létezik az inverze!

b) $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$ ($f^{-1}(x)$-et nem kell felírnia!)

c) Ellenőrizze, hogy az inverzfüggvény átmegy a $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ponton és határozza meg az inverzfüggvény $x_0 = 2$ pontbeli deriváltjának értékét!

a.) $f'(x) = 8 - \frac{1}{4x} \cdot 4 = 8 - \frac{1}{x} > 0$, ha $x \in [1/5, 3]$

$\boxed{4}$ $\Rightarrow$ f szigorúan monoton nő $[\frac{1}{5}, 3]$-on $\Rightarrow \exists f^{-1}$ itt

b) $D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{8}{5} - \ln\frac{4}{5}, 24 - \ln 12\right]$

$\boxed{3}$

$R_{f^{-1}} = D_f = [\frac{1}{5}, 3]$

c.) $f^{-1}(2) = \frac{1}{4}$, ha $f(\frac{1}{4}) = 2$

$\boxed{6}$ $f(\frac{1}{4}) = 8 \cdot \frac{1}{4} - \ln 4 \cdot \frac{1}{4} = 2$, tehát f^{-1} átmegy $(2, \frac{1}{4})$-en.

$$f^{-1\prime}(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{4})} = \frac{1}{8-4} = \frac{1}{4}$$

ak2 an10311.13 15.

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

a) $f(x) = (3 + 2x^2)^{1/x}$, $f'(x) = ?$

b) A differenciálható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$\frac{1}{x\,y} + 3x^3y^3 = -4$$

implicit függvénykapcsolatot és $y(1) = -1$.

Határozza meg $y'(1)$ értékét!

a.) $f(x) = e^{\ln (3+2x^2)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(3+2x^2)}$ $\quad x \neq 0$

$\boxed{4}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(3+2x^2)} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(3+2x^2)\right)' =$

$= (3+2x^2)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(3+2x^2) + \frac{1}{x} \frac{1}{3+2x^2} 4x\right)$

b) $-1-3=-4$ ✓

$\boxed{6}$

$\frac{-(1 \cdot y + xy')}{x^2y^2} + 9x^2y^3 + 9x^3y^2 \cdot y' = 0$ $\quad x=1$, $y=-1$

$-(-1+y'(1)) - 9 + 9y'(1) = 0 \Rightarrow -8 + 8y'(1) = 0 \Rightarrow y'(1) = 1$