Alkalmazott mesterséges intelligencia (AMI)

http://www.mit.bme.hu/oktatas/targyak/vimibb01

5. ea. (2019 ősz)

Valószínűségi (Bayes) hálók

http://mialmanach.mit.bme.hu/aima/ch14

Jegyzet 14. fejezet

Előadó: Pataki Béla

a fóliák
Dobrowiecki Tadeusz és
Hullám Gábor anyagainak
felhasználásával készültek

BME I.E. 414, 463-26-79
pataki@mit.bme.hu,
http://www.mit.bme.hu/general/staff/pataki

Együttes valószínűség-eloszlás

Jó hír: együttes eloszlás birtokában minden kérdésre kapunk választ, ami a benne szereplő véletlen változók viszonyára és tulajdonságaira vonatkozik.

Rossz hír: nemigen megy 10-nél több változót tartalmazó eloszlások megadása

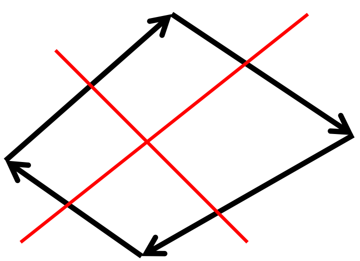
$P(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ esetén kell $2^N - 1$ független valószínűségérték.

A diagnózishoz exponenciális számú valószínűség ismerete szükséges.

Bayes (valószínűségi) hálók

Az együttes eloszlást $P(X1,X2,\ldots,XN)$-t adjuk meg, de kihasználjuk a változók közt fennálló feltételes függetlenségeket.

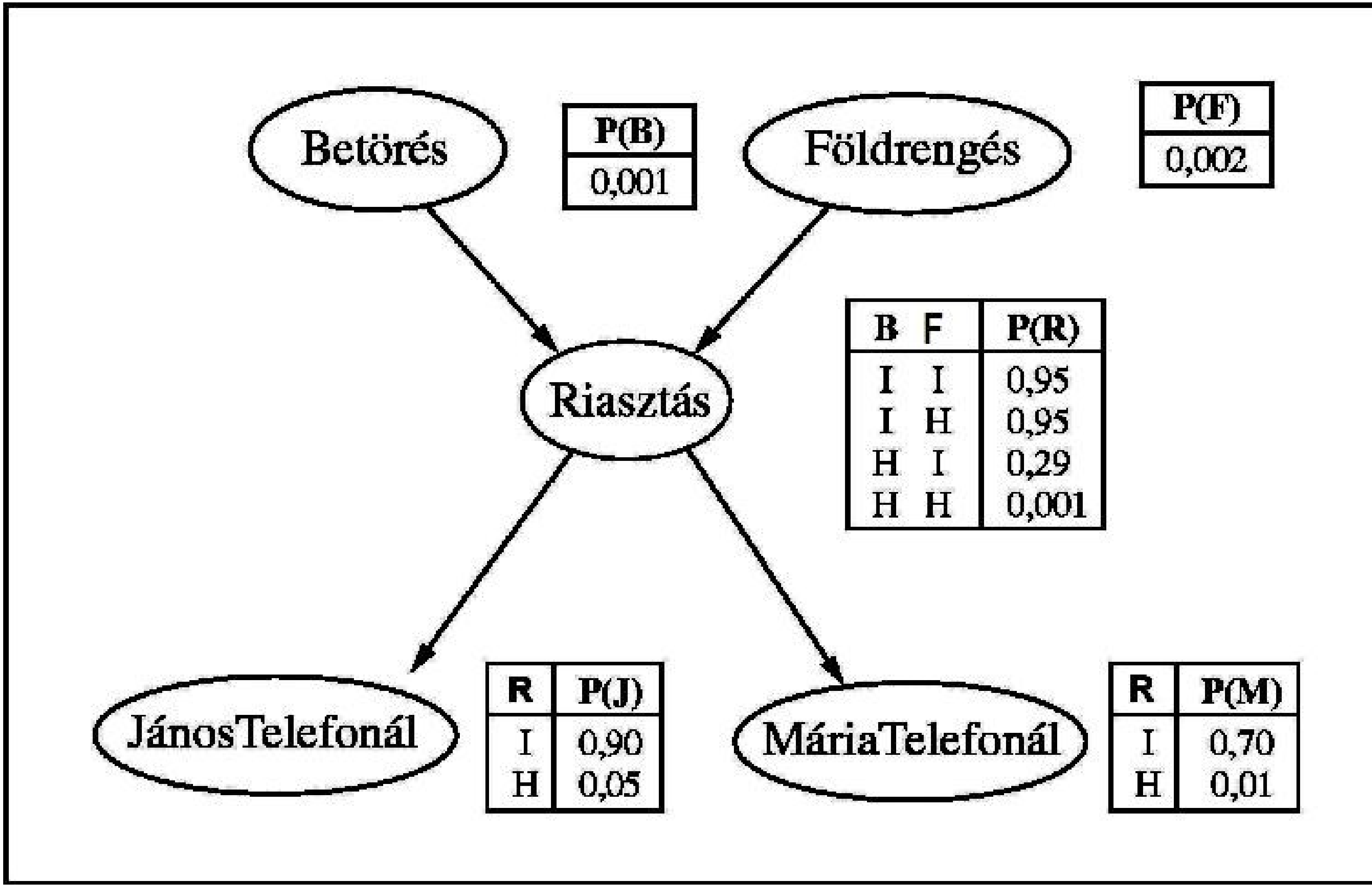
- A Bayes háló egy irányított gráf
- A háló csomópontjai a valószínűségi változók
- A csomópontokhoz valószínűségi információk vannak rendelve
- Bizonyos csomópontokat irányított élek kötnek össze. Az $X \rightarrow Y$ esetén X az Y-nak szülője
- A gráf nem tartalmaz irányított kört



- Minden csomóponthoz tartozik egy $P(X_k | Szülők(X_k))$ feltételes valószínűségeloszlás

A jegyzet (Russell-Norvig) példája:

kvíz következik!



P(B)
0,001

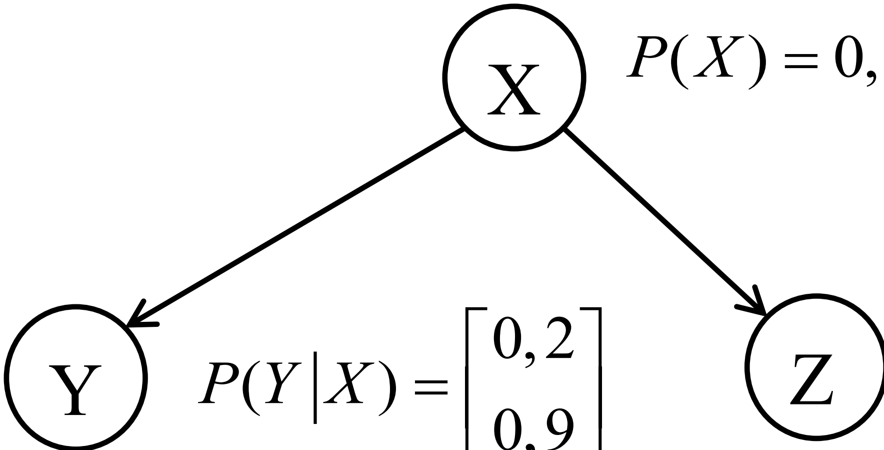
P(F)
0,002

B	F	P(R)
I	I	0,95
I	H	0,95
H	I	0,29
H	H	0,001

R	P(J)
I	0,90
H	0,05

R	P(M)
I	0,70
H	0,01

Kvíz 05.3.



$$P(X) = 0,3$$

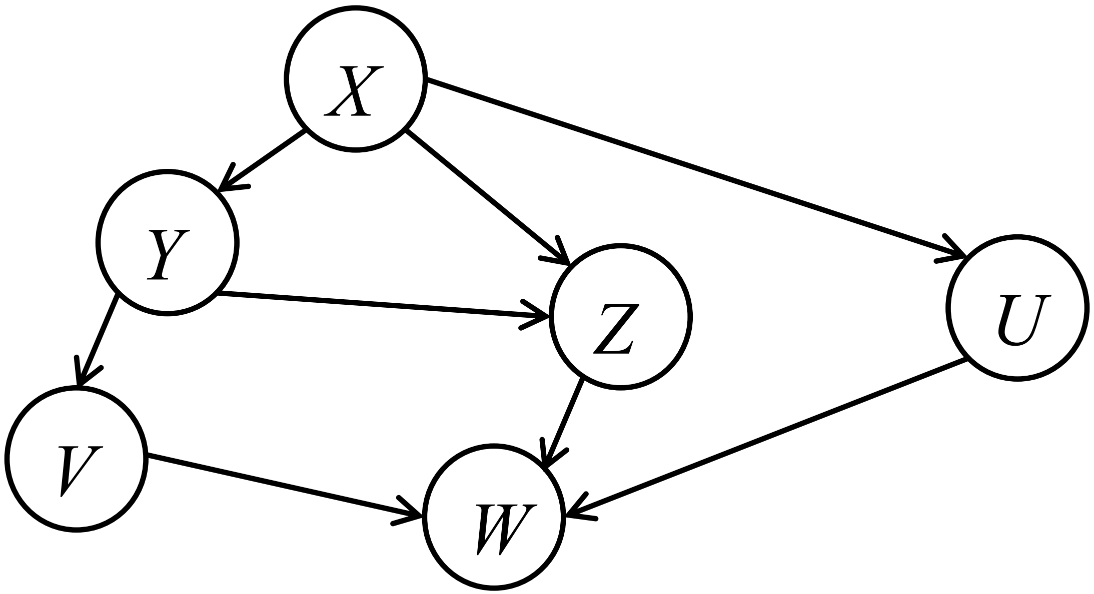
$$P(Y|X) = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,9 \end{bmatrix} \qquad P(Z|X) = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

Az ábrán látható valószínűségi háló esetén mekkora az X=0, Y=1, Z=0 esemény valószínűsége?

A. **0,126**
B. **0,028**
C. **0,144**
D. **0,032**

újabb kvíz következik!

Kvíz 05.4.



Mindegyik valószínűségi változó (X,Y,…,W) bináris!

Az ábrán látható valószínűségi háló esetén hány paraméterrel tudjuk leírni a $P(X,Y,Z,U,V,W)$ valószínűségi eloszlást? (kihasználva a feltételes függetlenségeket)

A. **64**
B. **12**
C. **19**
D. **6**

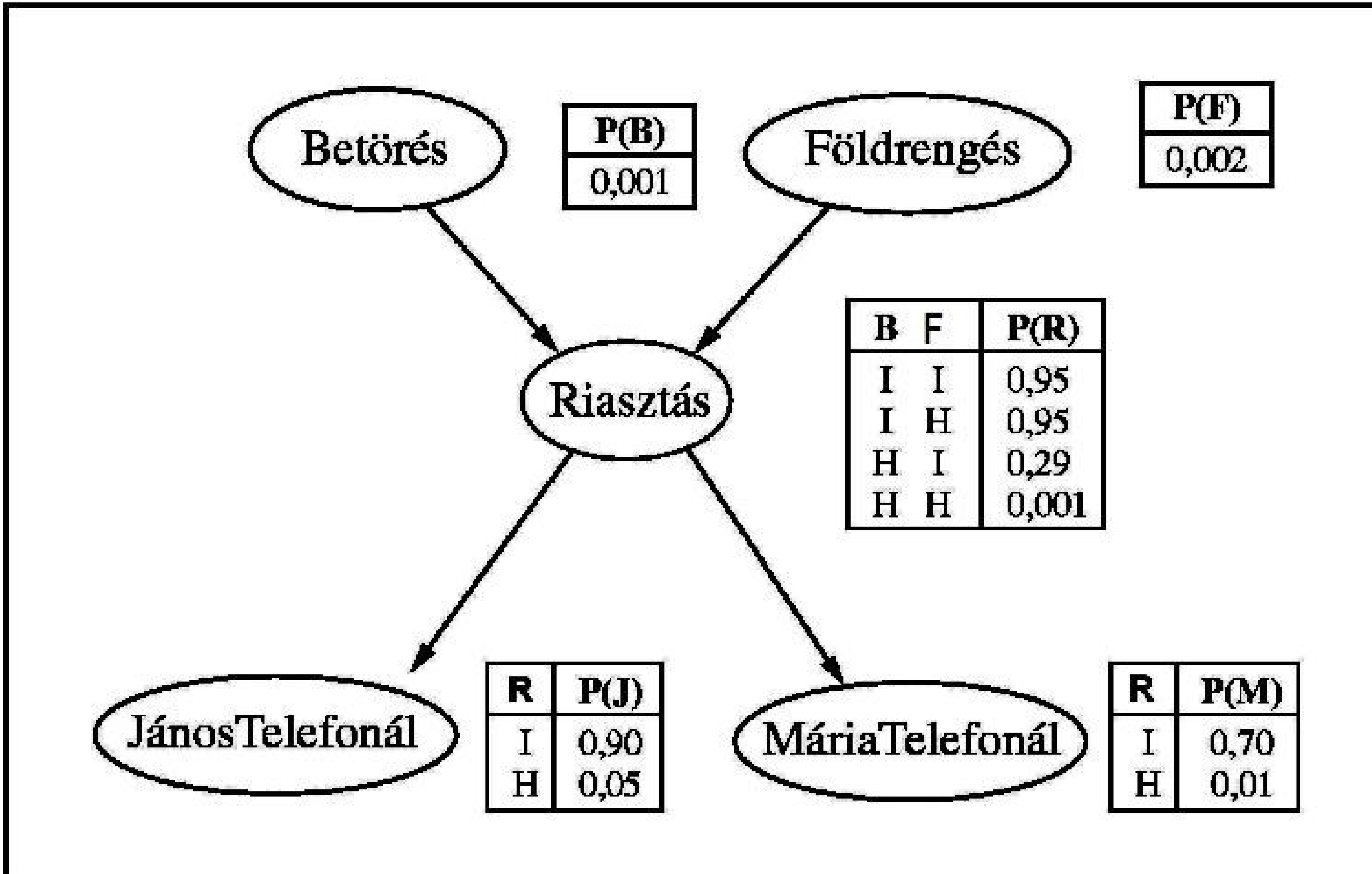
Következtetés valószínűségi hálókban

P(lekérdezés | bizonyíték) ?

- **egzakt** – „egyszerű” hálónál egyszerű,
„bonyolult” hálónál bonyolult

- **közelítő** – „bonyolult” háló esetén is egyszerű

A jegyzet (Russell-Norvig) példája:



Az ok→okozati irányban viszonylag egyszerű a következtetés: pl. ha adottak B és F valamilyen értékei, és ebből akarunk R-re, M-re vagy J-re következtetni. De hogyan következtethetünk „visszafele”?

Például kíváncsiak vagyunk a **P(J|M,¬B)** valószínűségre….

Bayes-tétel: $$P(J \mid M, \neg B) = \frac{P(J, M, \neg B)}{P(M, \neg B)}$$

Összegzés rejtett változókra:

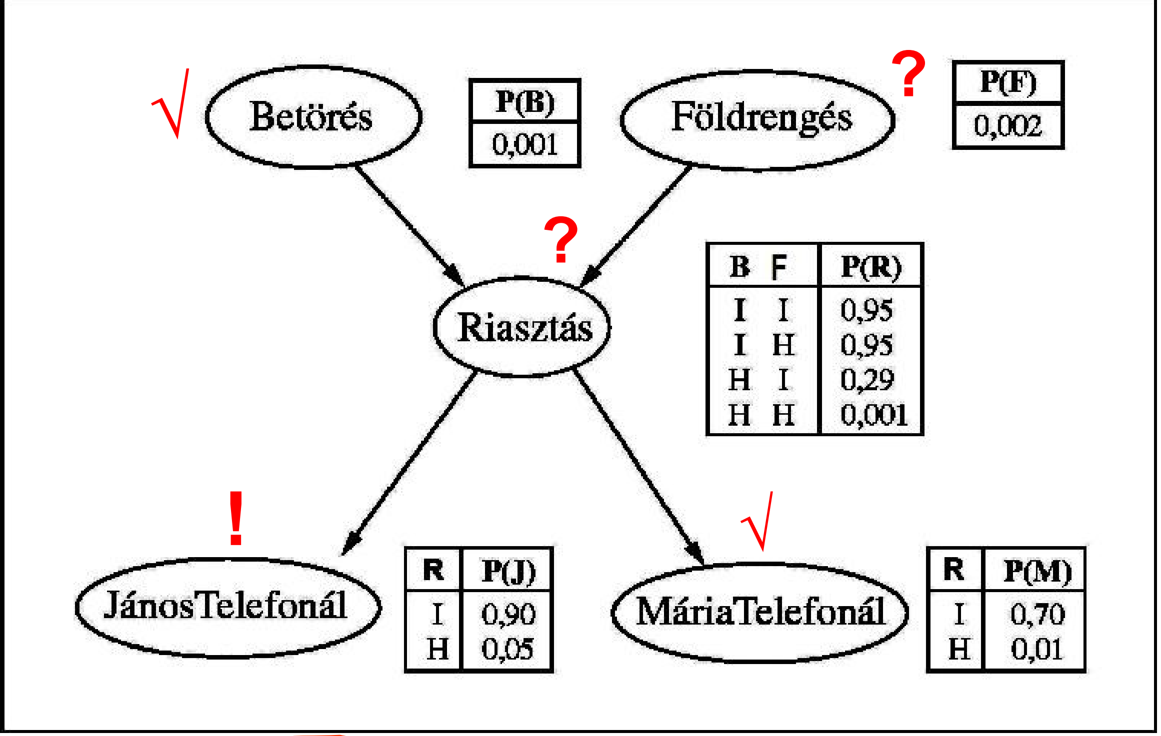
$$P(J, M, \neg B) = \sum_{r,f} P(J, M, \neg B, r, f) =$$

$$= P(J, M, \neg B, R, F) + P(J, M, \neg B, \neg R, F) +$$

$$+ P(J, M, \neg B, R, \neg F) + P(J, M, \neg B, \neg R, \neg F)$$

ezen belül az egyes tagok, pl. $P(J, M, \neg B, R, F)$, a többi is erre a mintára megy:

$$P(J, M, \neg B, R, F) = P(J \mid R) \cdot P(M \mid R) \cdot P(R \mid \neg B, F) \cdot P(\neg B) \cdot P(F)$$



P(B)
0,001

P(F)
0,002

B	F	P(R)
I	I	0,95
I	H	0,95
H	I	0,29
H	H	0,001

R	P(J)
I	0,90
H	0,05

R	P(M)
I	0,70
H	0,01

Összegzés rejtett változókra

Pl. $P(J|M,\neg B) = ?$
$= P(J,M,\neg B)/P(M,\neg B)$

$P(J,M,\neg B) =$
$\Sigma_{rf}\, P(J,M,\neg B, r, f)$

$P(M,\neg B) =$
$\Sigma_{rfj}\, P(M,\neg B, r ,f, j)$

$$\left.\begin{array}{l}
P(J\ M\neg B\quad R\quad F) = P(J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg BF)\ P(\neg B)\ P(F) = \ldots. \\
P(J\ M\neg B\ \ \neg R\quad F) = P(J|\neg R)\ P(M|\neg R)\ P(\neg R|\neg BF)\ P(\neg B)\ P(F) = \ldots. \\
P(J\ M\neg B\quad R\ \neg F) = P(J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg B\neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) = \ldots. \\
P(J\ M\neg B\ \ \neg R\ \neg F) = P(J|\neg R)\ P(M|\neg R)\ P(\neg R|\neg B\neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) = \ldots.
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
P(M\neg B\quad J\quad R\quad F) = P(J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg BF)\ P(\neg B)\ P(F) = \ldots. \\
P(M\neg B\quad J\quad R\neg F) = P(J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg B\neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) = \ldots. \\
P(M\neg B\quad J\neg R\quad F) = P(J|\neg R)\ P(M|\neg R)\ P(\neg\ R|\neg BF)\ P(\neg B)\ P(F) = \ldots.. \\
P(M\neg B\quad J\neg R\neg F) = P(J|\neg R)\ P(M|\neg R)\ P(\neg R|\neg B\neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) = \ldots. \\
P(M\neg B\ \neg J\quad R\quad F) = P(\neg J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg BF)\ P(\neg B)\ P(F) = \ldots.. \\
P(M\neg B\ \neg J\quad R\neg F) = P(\neg J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg B\neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) = \ldots.. \\
P(M\neg B\ \neg J\neg R\quad F) = P(\neg J|\neg R)\ P(M|\neg R)\ P(\neg R|\neg BF)\ P(\neg B)\ P(F) = \ldots.. \\
P(M\neg B\ \neg J\neg R\neg F) = P(\neg J|\neg R)\ P(M|\neg R)\ P(\neg R|\neg B\neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) = \ldots.
\end{array}\right\}$$

Következtetés felsorolással (balról jobbra)

Például ha János is, Mária is telefonált, akkor mi a Betörés valószínűsége?

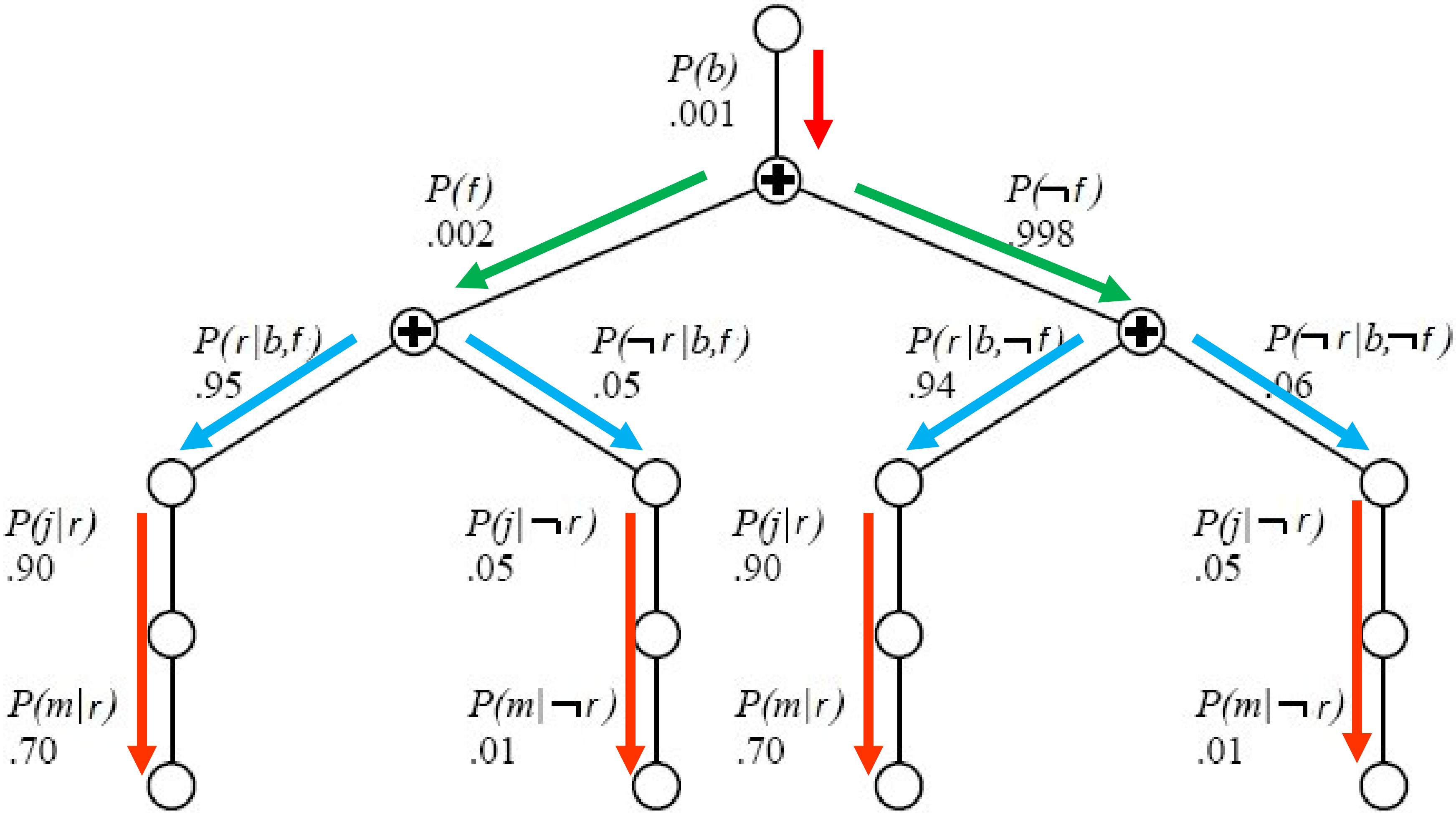
$$P(B \mid J, M) = P(b{=}Igaz \mid j{=}Igaz\ m{=}Igaz) = ?$$

$$P(B \mid J, M) = \Sigma_f\, \Sigma_r\, P(B, f, r, J, M)$$

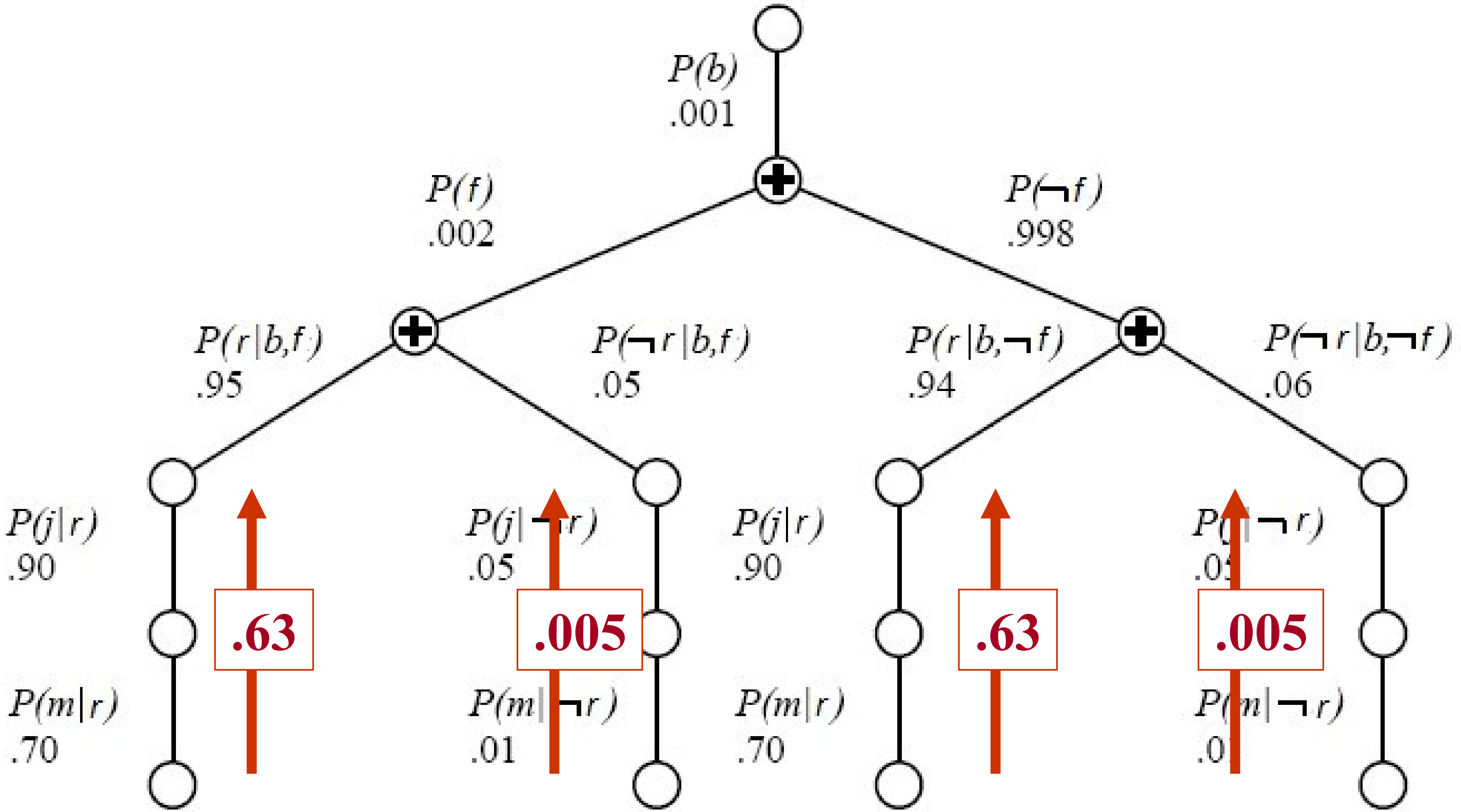
$$= \Sigma_f\, \Sigma_r\, P(B)\, P(f)\, P(r \mid B, f)\, P(J \mid r)\, P(M \mid r)$$

$$= P(B)\, \Sigma_f\, P(f)\, \Sigma_r\, P(r \mid B\ f)\, P(J \mid r)\, P(M \mid r)$$

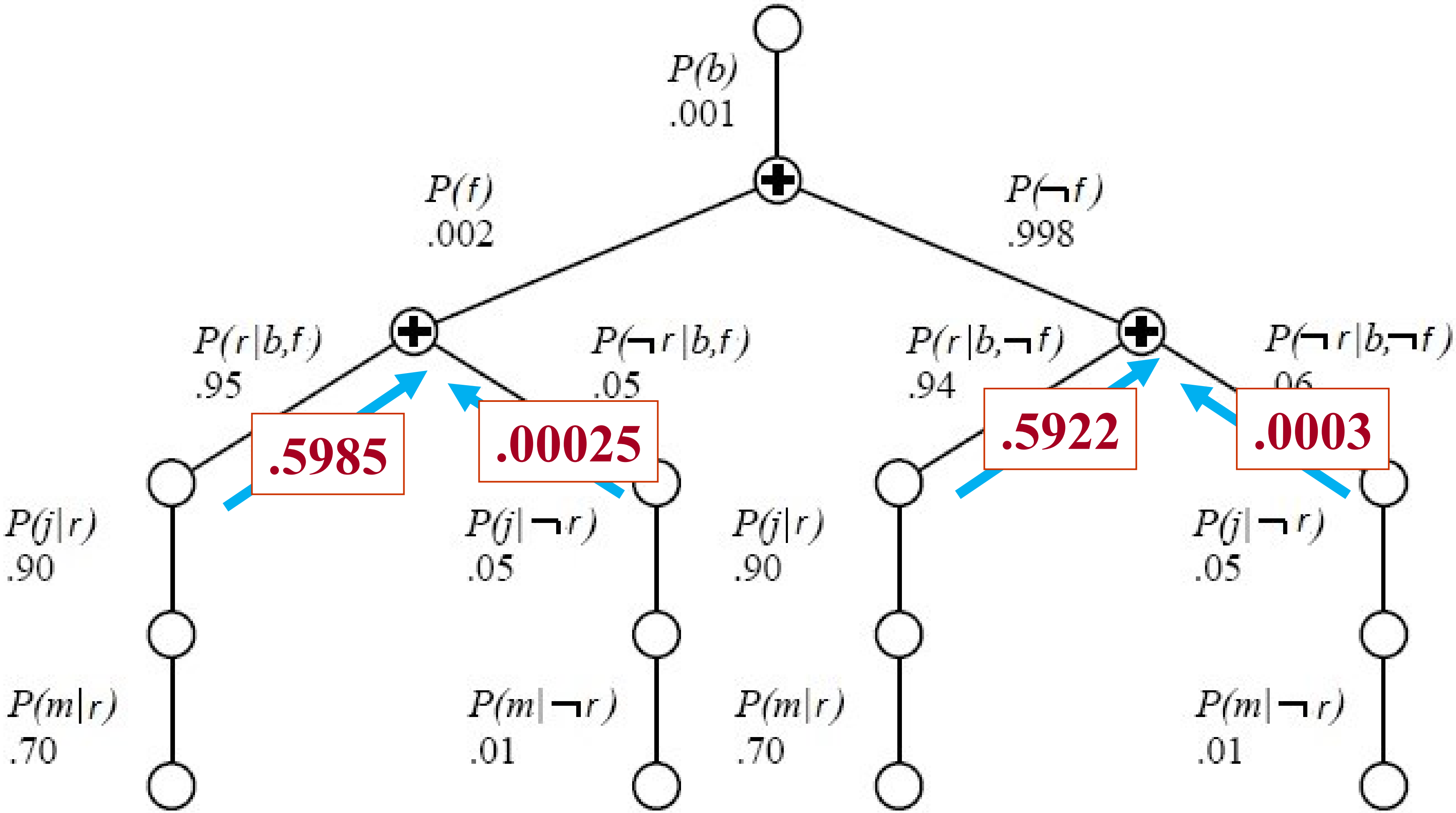
$$P(B \mid J, M) = P(B)\, \Sigma_f\, P(f)\, \Sigma_r\, P(r \mid B\, f)\, P(J \mid r)\, P(M \mid r)$$



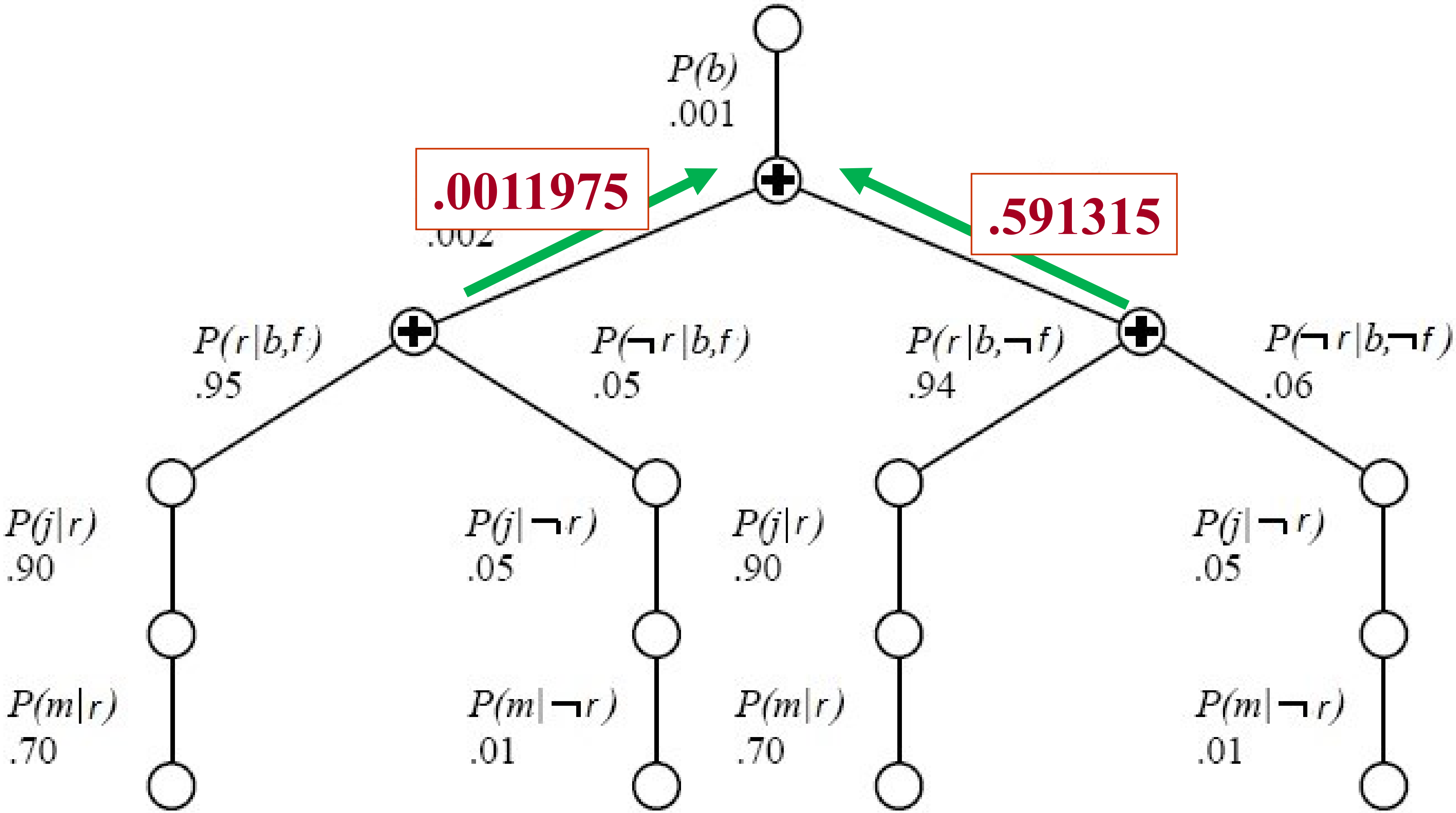
$P(B \mid J\ M) = \alpha\ P(B)\ \Sigma_f\ P(f)\ \Sigma_r\ P(r \mid B\ f)\ P(J \mid r)\ P(M \mid r)$



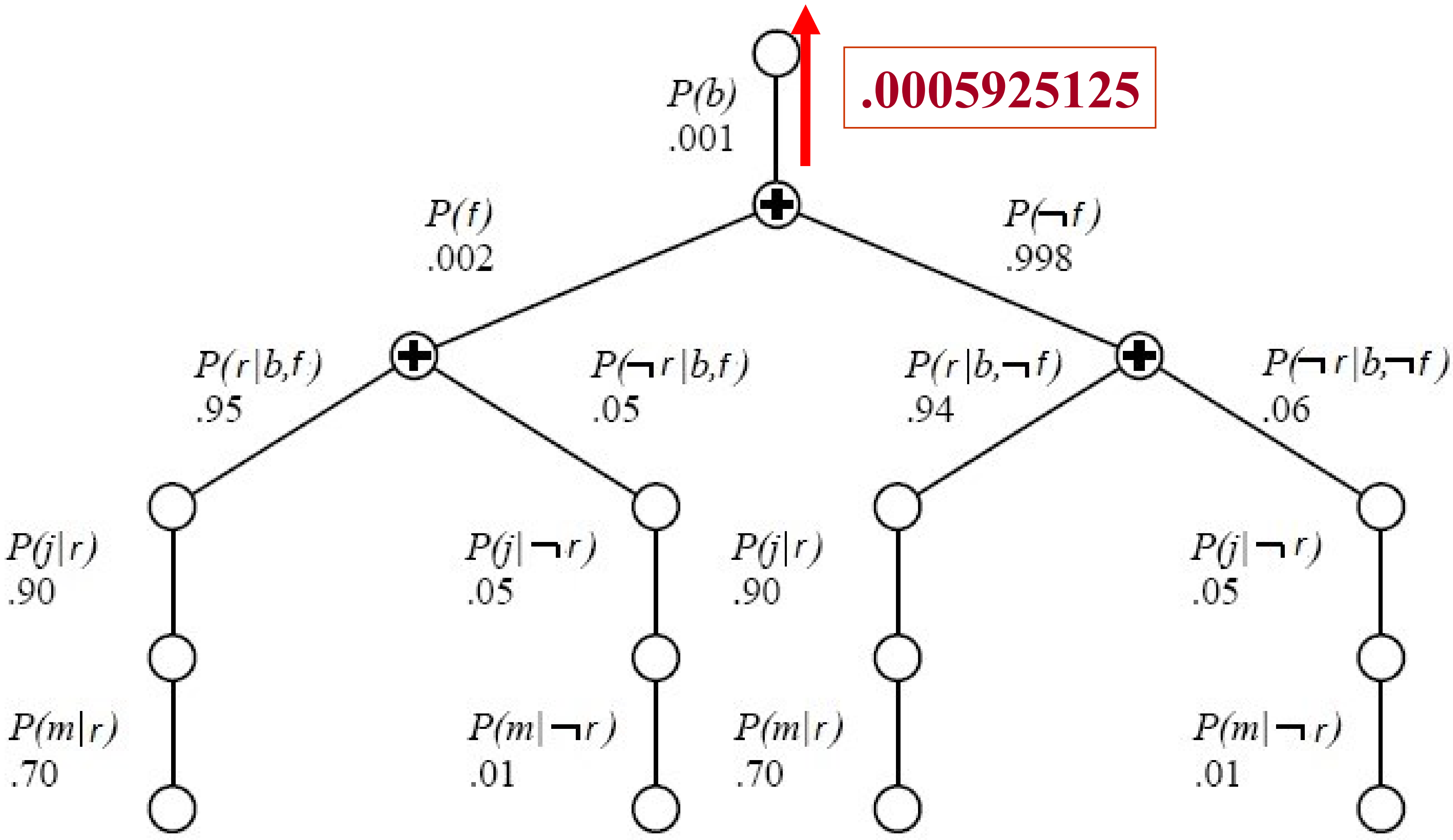
$$P(B \mid J\ M) = \alpha\ P(B)\ \Sigma_f\ P(f)\ \Sigma_r\ P(r \mid B\ f)\ P(J \mid r)\ P(M \mid r)$$



$$P(B \mid J\ M) = \alpha\ P(B)\ \Sigma_f\ P(f)\ \Sigma_r\ P(r \mid B\ f)\ P(J \mid r)\ P(M \mid r)$$



$$P(B \mid J\ M) = P(B)\ \Sigma_f\ P(f)\ \Sigma_r\ P(r \mid B\ f)\ P(J \mid r)\ P(M \mid r)$$

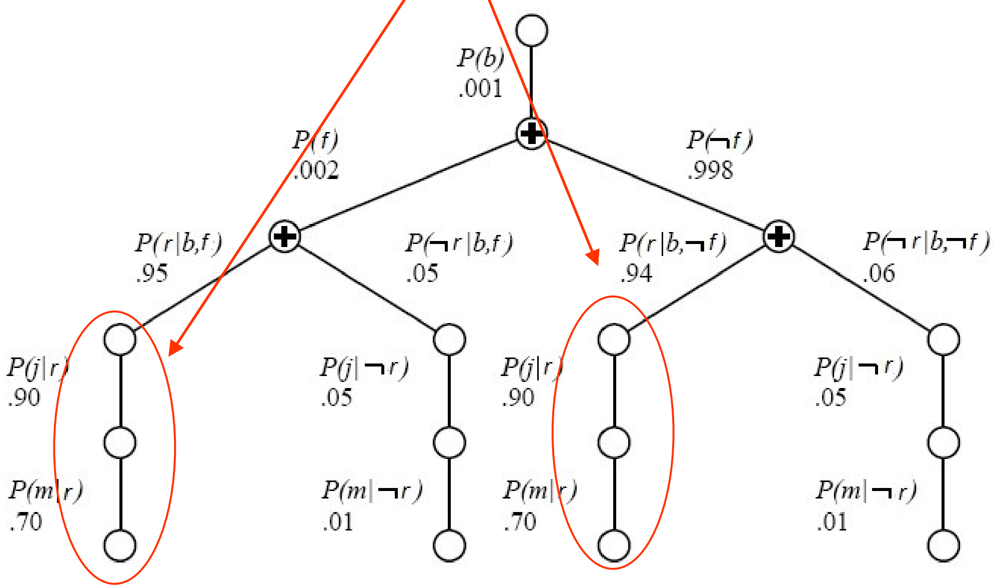


Következtetés változók eliminálásával $P(B \mid J,M)$

$$P(B \mid J,M) = P(B) \Sigma_f P(f) \Sigma_r P(r \mid B\ f) P(J \mid r) P(M \mid r)$$

Kiértékelés:
- jobbról balra
- köztes eredmények tárolása

Probléma előbb: bizonyos tagok többszörös kiszámítása, pl.



Irreleváns változók eliminálása

Vigyázat! új feladat (kérdés) a példán:

$$P(J \mid B) = \alpha\, P(B)\, \Sigma_f\, P(f)\, \Sigma_r\, P(r \mid B\, f)\, P(J \mid r)\, \overbrace{\Sigma_m\, P(m \mid r)}^{=1}$$

P(*JánosTelefonál*|*Betörés*) lekérdezés eredményét nem változtatja meg a *MáriaHív* eltávolítása a hálóból.

Általában, bármely **levél** csomópontot eltávolíthatunk, ami **nem célváltozó** vagy **nem bizonyíték** változó.
Eltávolítás után lehetnek újabb levélcsomópontok, amelyek szintén irrelevánsak lehetnek.

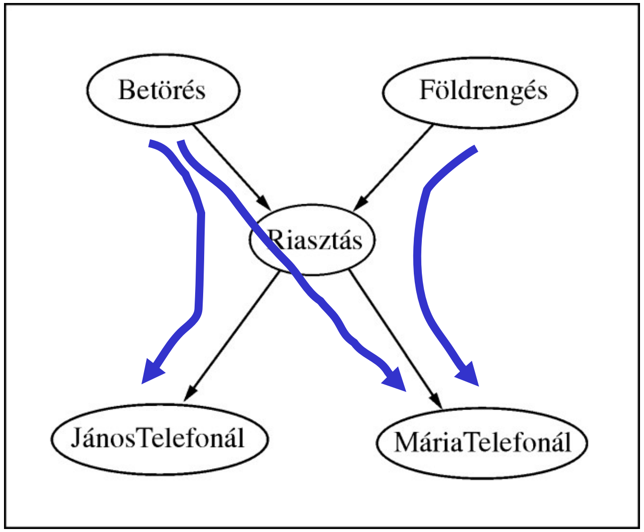
Minden változó, ami nem őse a célváltozónak, vagy egy bizonyíték változónak irreleváns a lekérdezésre. A változó elimináló algoritmus ezért az összes ilyen változót eltávolíthatja a lekérdezés kiértékelése előtt.

Mi a helyzet a *P(Földrengés* |*Betörés*) esetben?

Az egzakt következtetés komplexitása

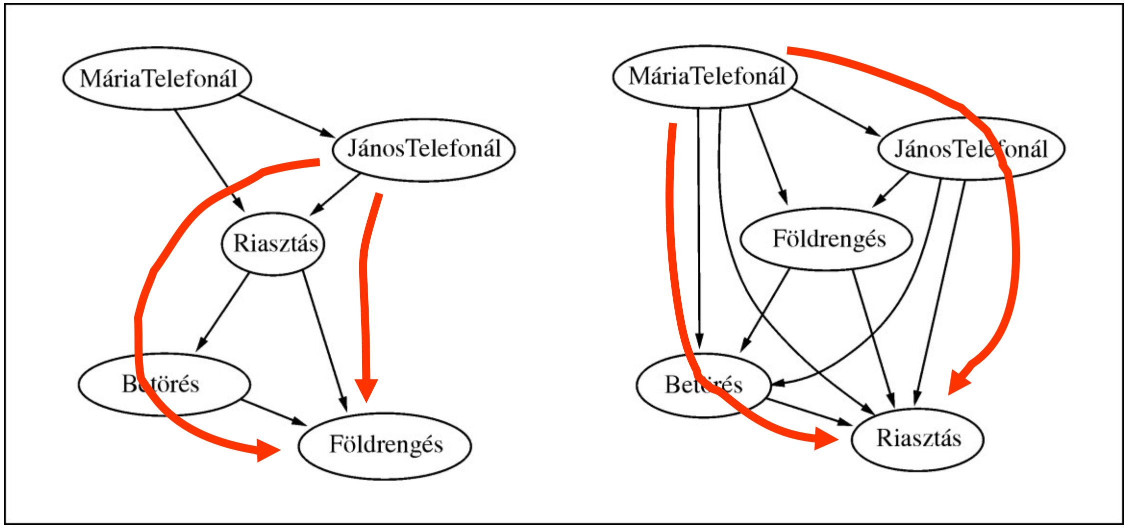
egyszeresen összekötött,

bármely két csp. között legfeljebb egyetlen egy irányítatlan út van



többszörösen összekötött

bármely két csomópont között több az út



Algoritmusok lekérdezések megválaszolására

A.) egyszeresen összekötött, fa gráf (polytree)

- létezik lineáris komplexitású algoritmus

B.) többszörösen összekötött

- nem létezik zárt alakú (rekurzív) algoritmus

➢ vagy a komplexitás megugrik (l. előbb), vagy csak közelítő módszerek maradnak