

2.6. ábra. A minimális euklideszi távolság számítása

A feladat tehát úgy is megfogalmazható, hogy válasszuk meg a $\{k_i\}$ és $\{k'_i\}$ sorozatokat oly módon, hogy

$$\begin{aligned} k_i &= k'_i, & i < 0 \\ k_i &\neq k'_i, & i = 0 \\ k_i &= k'_i \text{ vagy } k_i \neq k'_i, & i > 0. \end{aligned}$$

Rendeljük ezekhez a sorozatokhoz a modulált jelet, és keressük meg a lehetséges modulált jelek közötti minimális euklideszi távolságot.

Egyszerűen belátható, hogy abban az esetben, ha becsülni akarjuk a rendszerre jellemző hibarányt, akkor a korábbiak szerint ez a

$$P_e \approx a_{\min} Q \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right)$$

kifejezés segítségével megtehető.

2.8. Példák a koherens modulációs rendszerek általános jellemzésére

Modulációs rendszerek általános elemi jelekkel

Paraméterek:

- ξ_{k_i} -hez az $x_{k_i}(t - iT)$ elemi jelet rendeljük, ahol $i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$, $k_i \in \{1, \dots, M\}$.
- Az átvendő üzenetek lehetséges értékészlete M méretű.
- A szimbólumidő T .
- A modulátor memóriamentes.

A modulált jel általános alakja:

$$s(t, \{\xi_{k_i}\}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{k_i}(t - iT),$$

$x_k(t)$ tartója $[0, T)$.

A minimális euklideszi távolság meghatározásához szükséges jelek az alábbiak:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{k_i}(t - iT) \\ s_2(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{k'_i}(t - iT), \end{aligned}$$

és teljesül, hogy

$$\begin{aligned} k_i &= k'_i, & i < 0 \\ k_i &\neq k'_i, & i = 0 \\ k_i &= k'_i, & i > 0, \end{aligned}$$

mivel nyilvánvaló, hogy a

$$d_{\min}^2 = \min_{\{k_i\}, \{k'_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t) - s_2(t))^2 dt$$

kifejezést a $\{k_i\}$ és $\{k'_i\}$ sorozat éppen ilyen választás mellett minimalizálja, azaz

$$\begin{aligned} d_{\min}^2 &= \min_{\substack{k_0, k'_0 \\ k_0 \neq k'_0}} \int_{-\infty}^{\infty} (x_{k_0}(t) - x_{k'_0}(t))^2 dt = \\ &= \min_{\substack{k, l \\ k \neq l}} \int_{-\infty}^{\infty} (x_k(t) - x_l(t))^2 dt = \\ &= \min_{\substack{k, l \\ k \neq l}} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|^2. \end{aligned}$$

Mindez azt jelenti, hogy a minimális euklideszi távolságot az időrésenkénti elemi jelek között euklideszi távolságuk közül a minimális kiválasztásával lehet meghatározni. Hasonló módon kaphatjuk meg az a_{\min} értékét is (lásd a korábbi példát).

Folytonos fázisú MSK moduláció

$M = 4$, bináris átviteli rendszer

Paraméterek: $\xi_{k_i} \in [0, 1]$, $\Delta\omega T = \pi$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 > 0$.

Elemi jelek:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sqrt{2P} \cos(\omega_1 t), \\ x'_1(t) &= -\sqrt{2P} \cos(\omega_1 t), \\ x_2(t) &= \sqrt{2P} \cos(\omega_2 t), \\ x'_2(t) &= -\sqrt{2P} \cos(\omega_2 t), \end{aligned}$$

ahol P a teljesítmény és $t \in [0, T)$.

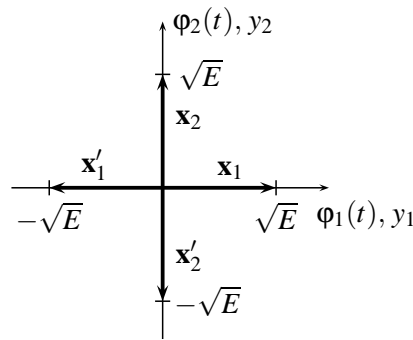
Az elemi jelvektorok rendszere ($E = PT$):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (\sqrt{E}, 0) \\ \mathbf{x}'_1 &= (-\sqrt{E}, 0) \\ \mathbf{x}_2 &= (0, \sqrt{E}) \\ \mathbf{x}'_2 &= (0, -\sqrt{E}) \end{aligned}$$

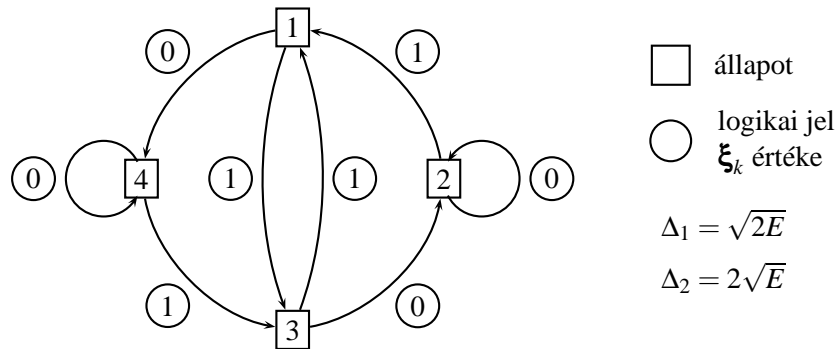
A jelek vektortérbeli ábrázolása a 2.7. ábrán látható.

A jelek hozzárendelése a forrásszimbólumokhoz attól függ, hogy az előző időrésben melyik jelet adtuk le. A logikai „1” értéket az \mathbf{x}_1 vagy \mathbf{x}'_1 , a logikai „0” értéket az \mathbf{x}_2 vagy \mathbf{x}'_2 hordozza. Hozzárendelési szabályok:

$$\begin{aligned} x_1(t) \text{ után csak } x'_1(t) \text{ vagy } x'_2(t), \\ x_2(t) \text{ után csak } x_1(t) \text{ vagy } x_2(t), \\ x'_1(t) \text{ után csak } x_1(t) \text{ vagy } x_2(t), \\ x'_2(t) \text{ után csak } x'_1(t) \text{ vagy } x'_2(t) \text{ következhet.} \end{aligned}$$



2.7. ábra. Folytonos fázisú MSK jelek vektortérbeli ábrázolása



2.8. ábra. Az MSK modulátor állapotátmeneti diagramja

A modulátor állapotérbeli leírása. A rendszerben a különböző elemi jelek csak bizonyos sorrendben követhetik egymást, így lehetőség van arra, hogy a minimális euklideszi távolság a korábban elemzett nem folytonos fázisú, két elemi jelet $x_1(t)$ és $x_2(t)$ használó MSK rendszeréhez képest növekedjen. Mint korábban láttuk, $d_{\min}^2 = 2E$ volt ez az érték, ami nem más, mint az \mathbf{x}_1 és az \mathbf{x}_2 távolsága.

A rendszerben a modulátor állapotát a korábbi időrésben küldött jel határozza meg. Ennek alapján felrajzolható a rendszer állapotátmeneti diagramja (2.8. ábra). Az állapotok definíciója:

- 1 állapot: \mathbf{x}_1 volt az előző jel
- 2 állapot: \mathbf{x}_2 volt az előző jel
- 3 állapot: \mathbf{x}'_1 volt az előző jel
- 4 állapot: \mathbf{x}'_2 volt az előző jel

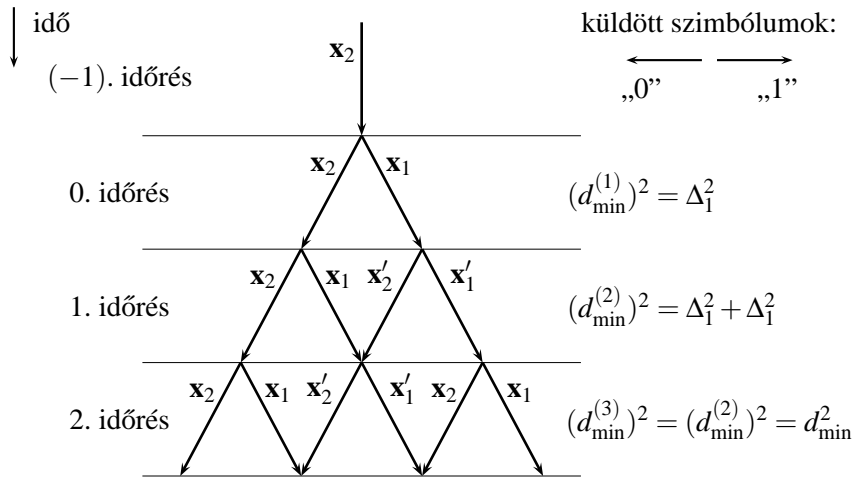
Az ábra alapján világosan látszik, hogy ha például az összehasonlításhoz kiválasztott $s_1(t)$ és $s_2(t)$ jelek elágazása a nulladik időrésben a 2 állapotból indul, akkor annak a két jelnek a távolságát kell elemezni, amely a nulladik időrésben \mathbf{x}_2 illetve \mathbf{x}_1 elemi jelekkel kezdődik.

A vizsgálatot a 2.9. ábra diagramja segíti. Az első időrésben elő kell állítani az

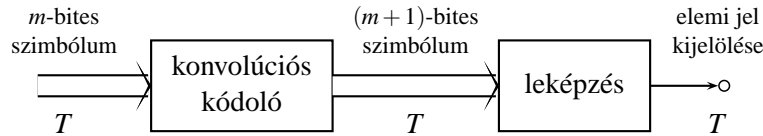
$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2\| &= \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1\| = \Delta_2 \\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_2\| &= \|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_2\| = \Delta_1 \end{aligned}$$

távolságokat. Egyszerűen belátható, hogy az elágazás után a

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}'_2 \end{matrix} \\ & \text{vagy} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}'_2 & \mathbf{x}'_2 \end{matrix} \end{array}$$



2.9. ábra. Távolságszámítás MSK moduláció esetén



2.10. ábra. Az Ungerboeck-kód előállítása ($m = 2$)

sorozatokhoz tartozik a minimális euklideszi távolság, amely $d_{\min}^2 = 4E$.

Hasonló eredményre jutunk akkor is, ha a (-1) -edik időrésben az \mathbf{x}_1 jel küldését feltételezzük. Fontos megjegyezni, hogy az eljárással, azaz a memória elhelyezésével a modulátorban, az eredeti nem folytonos fázisú MSK jelhez képest a minimális euklideszi távolságot $\sqrt{2}$ -szeresre, a jel effektív energiáját kétszeresre növeltük. Ez azt eredményezi, hogy kisebb jelteljesítménnyel lehet azonos hibaarányal kommunikálni.

A rendszerhez a következők kellenek:

- memória és szekvenciális logika a modulátorban (véges állapotgép a jelek sorrendjének meghatározására);
- az átvinni kívánt szimbólumok számosságánál bővebb jeltér.

Az Ungerboeck-kód 4PSK esetben

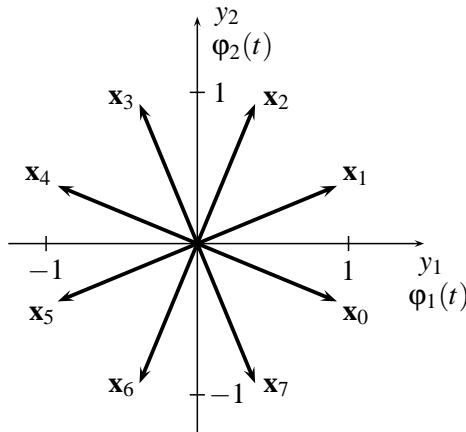
$M = 8$, az átvitt szimbólumok számossága 4

Cél az adatsebesség megtartása mellett a minimális euklideszi távolság növelése az eredeti QPSK rendszerhez képest.

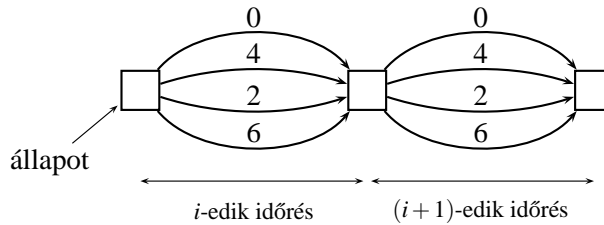
A modulátor általános felépítése a 2.10. ábrán látható. 8PSK-nak megfelelő a jelkészlet és kétdimenziós a jeltér (2.11. ábra).

Az elemi jelek távolság alapú csoportosítása:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| = 2 \sin \frac{\pi}{8} = 0.765, \\ \Delta_1 &= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2\| = \sqrt{2} = 1.414, \\ \Delta_2 &= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_4\| = 2. \end{aligned}$$



2.11. ábra. Az Ungerboeck-kód jelkészlete



2.12. ábra. Az egy belső állapotú rendszer távolságszámítása

A jelcsoportokat úgy alakítjuk ki, hogy a tagok között a távolság homogén legyen.

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\{x_0, x_4, x_2, x_6\}}_{C_0} & \underbrace{\{x_1, x_5, x_3, x_7\}}_{C_1} & \Delta_1 \\
 \underbrace{\quad\quad\quad}_{C_2} & \underbrace{\quad\quad\quad}_{C_3} & \Delta_2
 \end{array}$$

A jelek sorrendjének meghatározását befolyásoló irányelvek:

- Azonos a priori valószínűségek, szimmetrikus és reguláris jeltér (ez teljesül a 8PSK jeltér esetén).
- Egy belső állapotból induló átmenetek vagy csak a B_0 -ból, vagy csak a B_1 -ből választhatók.
- Egy belső állapotba befutó átmenetek vagy csak a B_0 -ból, vagy csak a B_1 -ből választhatók.
- Ha két állapot között vannak párhuzamos átmenetek, azokat vagy csak a C_0 -ból, vagy csak a C_1 -ből, vagy csak a C_2 -ből, vagy csak a C_3 -ből lehet választani.

Ezek az elvek biztosítják azt, hogy az egyes jelek között az euklideszi távolság minél nagyobb legyen.

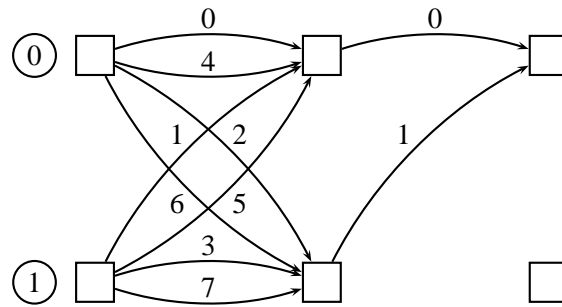
Néhány eset vizsgálata. A hagyományos 4PSK, vagy egy állapotú rendszer a 2.12. ábrán látható. Itt

$$d_{\min} = \Delta_1 = 1.414.$$

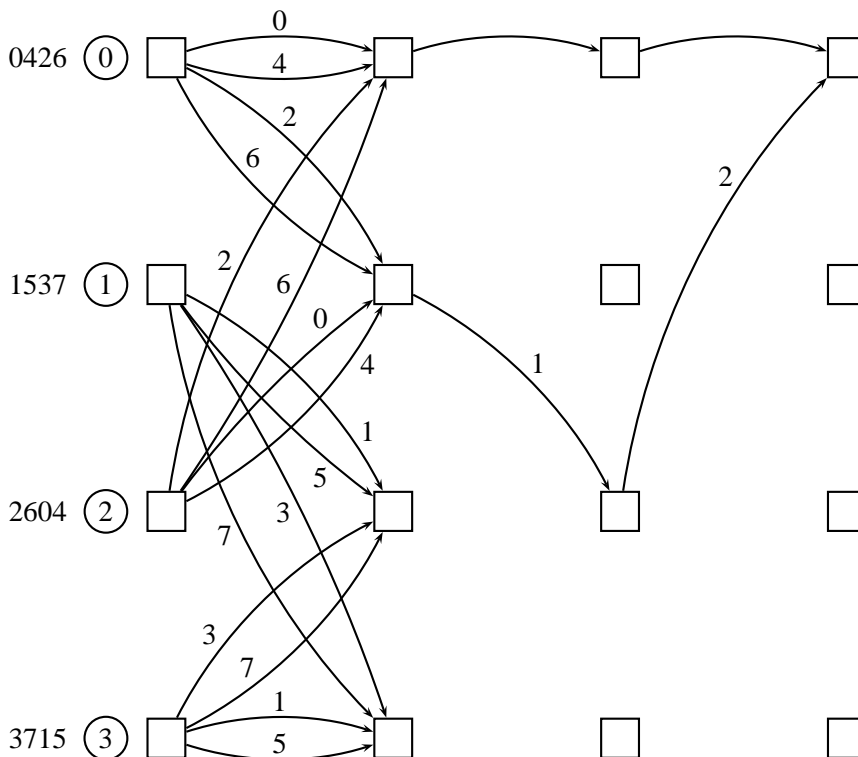
A két belső állapotú rendszert a 2.13. ábrán tüntettük fel.

$$d_{\min} = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = 1.608,$$

amely 1.1 dB-es nyereséget jelent a 4PSK-hoz képest. Ez a távolság például az (x_0, x_0) és az (x_2, x_1) jelpárok távolságából adódik.



2.13. ábra. A két belső állapotú rendszer távolságszámítása



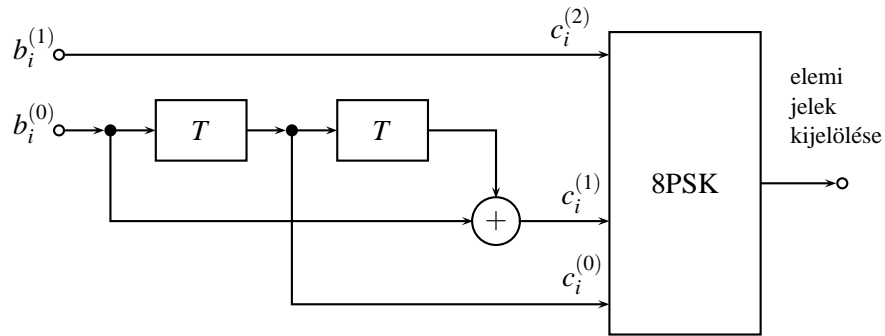
2.14. ábra. A négy belső állapotú rendszer távolságszámítása

A négy belső állapotú rendszer a 2.14. ábrán látható.

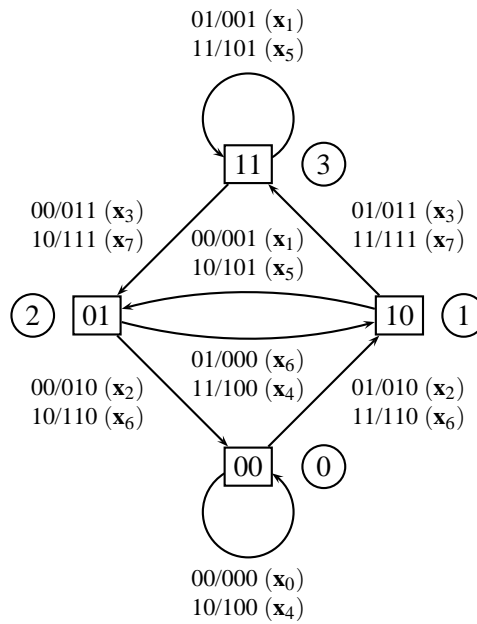
$$d_{\min} = 2,$$

amely 3 dB-es javulást jelent a 4PSK-hoz képest. Ez a távolság például az $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ és az $(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, vagy az $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ és az $(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ sorozatok között. A feladatot a 2.15. ábra konvolúciós kódolójával oldhatjuk meg. A konvolúciós kódoló a $(b_i^{(0)}, b_i^{(1)})$ bináris szimbólum pároshoz a $(c_i^{(0)}, c_i^{(1)}, c_i^{(2)})$ bináris szimbólum hármast rendel, amely kijelöli a 8PSK jelkészlet megfelelő elemét. A rendszer állapotátmeneti diagramját a 2.16. ábrán adtuk meg. Az ábra jelölései:

- állapot: $b_{i-1}^{(0)}, b_{i-2}^{(0)}$
- átmenet: $b_i^{(1)} b_i^{(0)} / c_i^{(2)} c_i^{(1)} c_i^{(0)}(\mathbf{x}_k)$
- állapotok sorszáma: ①



2.15. ábra. Négy belső állapotú konvolúciós kódoló



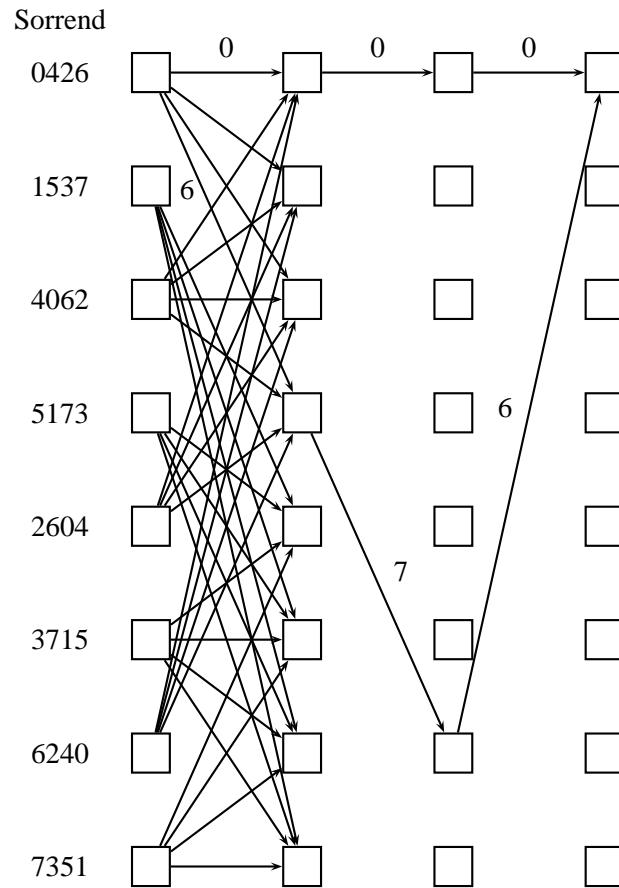
2.16. ábra. A négy belső állapotú konvolúciós kódoló állapotátmeneti diagramja

Az ábrából világosan látszik, hogy a konvolúciós kódoló éppen az állapotátmeneti diagramot valósítja meg.

A nyolc belső állapotú rendszer a 2.17. ábrán látható. A modulátor memóriájának növelése a minimális euklideszi távolság további növelését teszi lehetővé, ugyanis

$$d_{\min} = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_1^2 + \Delta_0^2} = 2.141,$$

amely 3.6 dB-es javulást jelent a 4PSK-hoz képest ($a_{\min} = 2$). Ez a távolság például az $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ és az $(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_6)$ sorozatok között.



2.17. ábra. A nyolc belső állapotú rendszer távolságszámítása