14. Hálózatok szinuszos állandósult állapota

Bilicz-Horváth

2021. május 17.

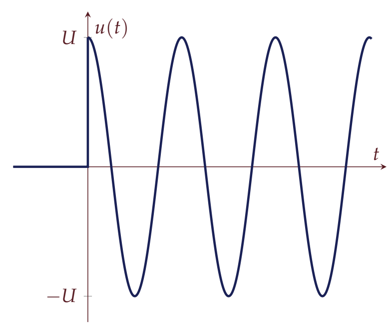
A szinuszos állandósult állapot fogalma

VIzsgáljuk meg, hogyan lehet megoldani az állapotváltozós leírás normálalakját belépő szinuszos gerjesztésre! Az N-edrendű ÁVL normálalakja

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{x}(t) + Du(t),$$

a gerjesztés (1. ábra)

$$u(t) = \varepsilon(t)U\cos\omega t,$$



1. ábra: Az $u(t) = \varepsilon(t)U\cos\omega t$ belépő koszinuszos gerjesztés

ahol U a gerjesztő szinuszjel *amplitúdója*, ω pedig a *körfrekvenciája*. Mivel kauzális rendszer belépő gerjesztésre adott válaszát számoljuk (bekapcsolási folyamat), az állapotvektor kezdeti értéke

$$\boldsymbol{x}(+0) = \boldsymbol{0}.$$

Az állapotvektor időfüggvényét továbbra is az összetevőkre bontás módszerével keressük, amelyben egyedül a szinuszos gerjesztéshez tartozó próbafüggvény az újdonság a korábbiakhoz képest. A megoldást $t > 0$ időkre keressük

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_f(t) + \boldsymbol{x}_g(t)$$

alakban.

1. A szabad összetevő a homogén DE megoldása, exponenciális függvények összege:

$$\boldsymbol{x}_f(t) = \sum_{p=1}^{N} K_p\boldsymbol{m}_p e^{\lambda_p t},$$

ahol a λ_p és $\boldsymbol{m}_p$ értékek rendre az $\boldsymbol{A}$ rendszermátrix sajátértékei, ill. sajátvektorai, a K_p állandók értékét pedig a kezdeti feltételek alapján tudjuk meghatározni.

2. A gerjesztett összetevőt a próbafüggvények módszerével keressük. A gerjesztés $t > 0$-ra koszinuszos jel, az ilyen gerjesztéshez tartozó próbafüggvény szintén koszinuszos, méghozzá ugyanazzal a

körfrekvenciával, mint a gerjesztés körfrekvenciája, de az amplitúdók és a kezdőfázisok eltérhetnek a gerjesztésétől. A nem nulla kezdőfázisú koszinusz helyett inkább egy tisztán koszinuszos és egy tisztán szinuszos komponens alakjában keressük a választ, ami a számítást valamelyest egyszerűsíti:

$$\boldsymbol{x}_g(t) = \boldsymbol{X}_A \cos \omega t + \boldsymbol{X}_B \sin \omega t,$$

aminek helyességéről az inhomogén állapotegyenletbe helyettesítve meg is győződhetünk, hiszen a gerjesztett megoldásnak is ki kell elégítenie az inhomogén differenciálegyenletet. Eszerint

$$\boldsymbol{x}'_g(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_g(t) + \boldsymbol{B}u(t),$$

azaz

$$-\omega \boldsymbol{X}_A \sin \omega t + \omega \boldsymbol{X}_B \cos \omega t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_A \cos \omega t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_B \sin \omega t + \boldsymbol{B}U \cos \omega t.$$

Egy konkrét ω körfrekvencián valóban egyenlő lehet az egyenlet két oldala egymással. A koszinuszos és a szinuszos tagok együtthatói alapján egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer írható fel:

A konkrét $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{X}_B$ értékek most nem érdekesek, csak a megoldás alakját akarjuk szemléltetni. Figyeljük meg, hogy ezek az értékek az U gerjesztő amplitúdó mellett ω körfrekvencia konkrét értékétől is függenek, azaz a gerjesztett összetevőben szereplő amplitúdók *frekvenciafüggők*.

$$\left.\begin{aligned} -\omega \boldsymbol{X}_A &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_B \\ \omega \boldsymbol{X}_B &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_A + \boldsymbol{B}U \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldásaiként adódnak $\boldsymbol{X}_A$ és $\boldsymbol{X}_B$ vektorok. A teljes megoldás

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{p=1}^{N} K_p \boldsymbol{m}_p e^{\lambda_p t} + \boldsymbol{X}_A \cos \omega t + \boldsymbol{X}_B \sin \omega t, \quad t > 0,$$

amit a válaszra vonatkozó egyenletbe helyettesítve a keresett válasz alakja

$$y(t) = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{x}(t) + DU \cos \omega t,$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{p=1}^{N} a_p e^{\lambda_p t}}_{y_f(t)} + \underbrace{Y_A \cos \omega t + Y_B \sin \omega t}_{y_g(t)}, \quad t > 0$$

amelyben $y_f(t)$-t a válasz szabad (tranziens) összetevőjeként, $y_g(t)$-t a gerjesztett (állandósult, stacionárius) összetevőjeként azonosíthatjuk. Ha a rendszermátrix minden λ_p sajátértéke a negatív félsíkra esik, azaz a vizsgált rendszer aszimptotikusan stabil, akkor $t \to \infty$ mellett a szummában szereplő exponenciális tagok mindegyike lecsengő, a válaszban pedig csak ω körfrekvenciájú szinuszos tagok maradnak, azaz a rendszer válaszát a szabad válasz lecsengésével a gerjesztett összetevő határozza meg:

$$\boxed{y(t) \to y_g(t) = Y_A \cos \omega t + Y_B \sin \omega t = Y \cos(\omega t + \rho), \quad t \to \infty.}$$

A tranziens összetevők lecsengését követően beáll a *szinuszos állandósult állapot*, amelyben a válasz egy olyan szinuszos jelhez tart, amelynek körfrekvenciája megegyezik a gerjesztés körfrekvenciájával, amplitúdója és kezdőfázisa azonban eltérhet attól.

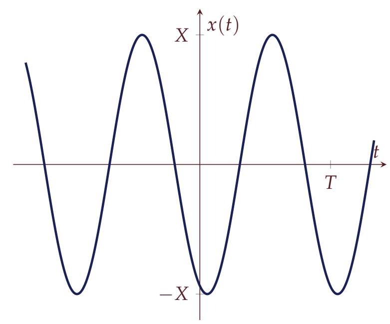
Szinuszos jelek komplex leírása

A továbbiakban a nem belépő szinuszos jelekre adott választ vizsgáljuk. A szinuszos jel általános alakja

$$\boxed{x(t) = X\cos(\omega t + \rho),}$$

ahol (2. ábra)

- X a jel *amplitúdója* vagy *csúcsértéke*, mértékegysége például V vagy A lehet;
- ω a *körfrekvencia*, egysége a rad/s;
- ρ pedig a *kezdőfázis*, amit fokban vagy radiánban szokás megadni.



2. ábra: Az $x(t) = X\cos(\omega t + \rho)$ koszinuszos jel

A körfrekvencia helyett a gyakorlatban inkább az f *frekvenciát* használják:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

A szinuszos jel periodikus, azaz

$$x(t) = x(t+T), \forall t.$$

A legkisebb ilyen pozitív T érték a *periódusidő*, ami idő dimenziójú mennyiség:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

A SZINUSZOS időfüggvény reprezentálható egyetlen skaláris komplex mennyiséggel, a hozzá tartozó *fazorral*. A kettő közötti kapcsolat felírásához tekintsük a komplex számok ekvivalens megadási formáit.

Egy $\overline{z}$ komplex szám, amelynek valós része a, képzetes része pedig b, megadható

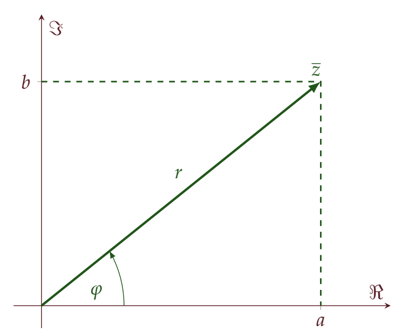
$$\overline{z} = a + jb \equiv re^{j\varphi} = r\cos\varphi + jr\sin\varphi$$

alakban, ahol r és φ a komplex szám Euler-féle alakját leíró mennyiségek (3. ábra):

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

és

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$



3. ábra: A $\overline{z}$ komplex szám megadása

illetve

$$a = r\cos\varphi \quad b = r\sin\varphi.$$

Visszatérően használni fogjuk az Euler-azonosságokat is:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}.}$$

Mivel

$$r\cos\varphi = \Re\{re^{j\varphi}\},$$

az általános szinuszos időfüggvény írható

$$x(t) = X\cos(\omega t+\rho) = \Re\left\{Xe^{j(\omega t+\rho)}\right\} = \Re\left\{Xe^{j\rho}e^{j\omega t}\right\}$$

alakban. Legyen az

$$\boxed{\overline{X} = Xe^{j\rho}}$$

mennyiség az $x(t)$ szinuszos időfüggvényhez társítható **fazor** vagy **komplex csúcsérték** (4. ábra),
amivel

$$\boxed{x(t) = \underbrace{X\cos(\omega t+\rho)}_{\text{valós időfüggvény}} = \Re\underbrace{\left\{\overline{X}\cdot e^{j\omega t}\right\}}_{\overline{x}(t)},}$$

ahol az

$$\overline{x}(t) = \overline{X}\cdot e^{j\omega t}$$

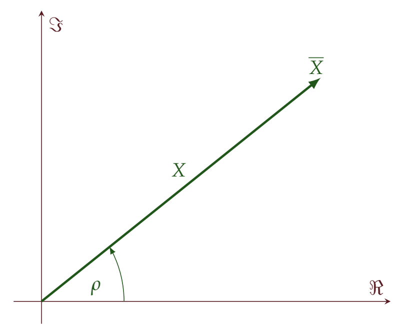
mennyiséget *komplex pillanatértéknek* is szokás nevezni. Speciálisan a koszinuszos jel ($\rho = 0$) fazora tisztán valós,

$$x_c(t) = X\cos\omega t \Leftrightarrow \boxed{\overline{X}_c = X},$$

míg a szinuszos jel ($\rho = -\frac{\pi}{2}$) fazora tisztán képzetes, mert

$$x_s(t) = X\sin\omega t = X\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{\overline{X}_s = Xe^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX}.$$

Az időfüggvény és a fazora közötti kapcsolatot az 5. ábra szemlélteti.



4. ábra: Az $\overline{X}$ komplex csúcsérték (fazor)

Látni fogjuk, hogy a szinuszos jel fazora minden információt összefoglal, amire szükségünk lesz a számításhoz. A körfrekvencia nem jelenik meg a fazorban; a fazorműveleteket azonos ω körfrekvenciájú fazorok között fogjuk értelmezni. A fazor *nem* egyenlő a szinuszos időfüggvénnyel, de a körfrekvencia ismeretében a fazor és az időfüggvény között egyértelmű kapcsolat van.

Műveletek fazorokkal

Legyenek $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ és $v(t)$ szinuszos jelek *azonos* ω körfrekvenciával. Az őket reprezentáló fazorok között három fontos műveletet definiálhatunk.

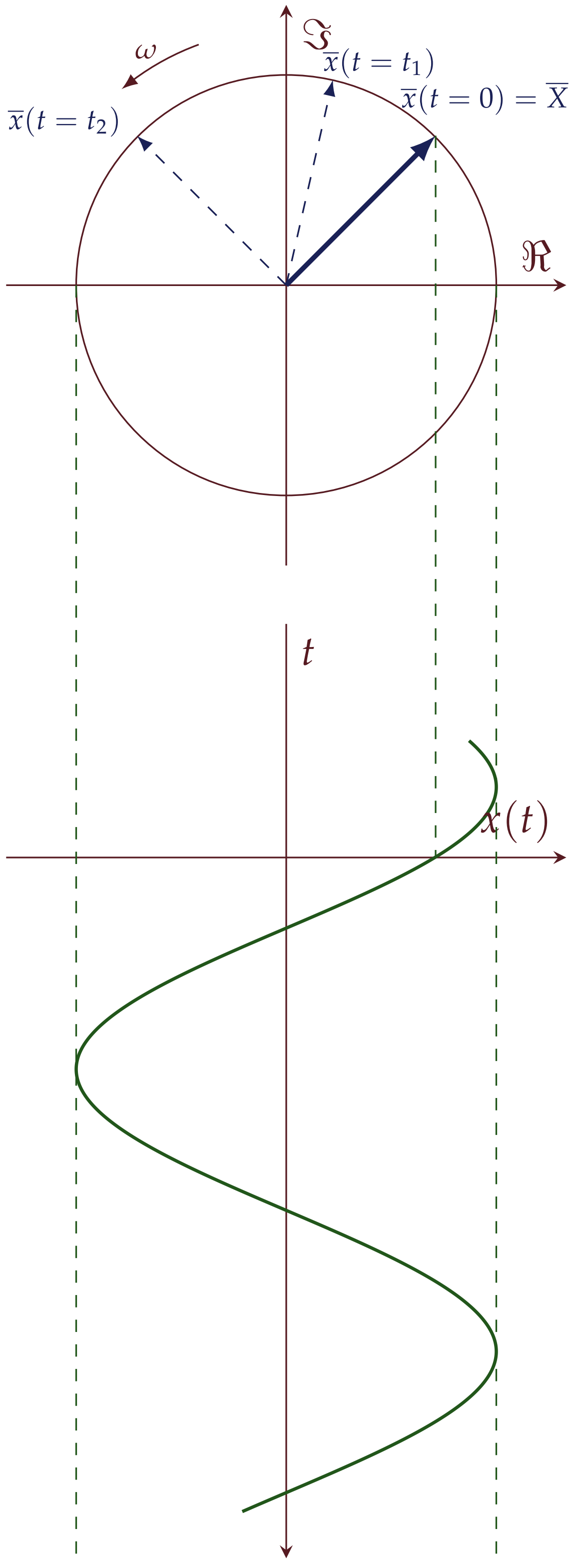
1. Az időfüggvények összege a fazorok összegeként számítható, azaz

$$\boxed{x(t) = x_1(t)+x_2(t) \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{X}_1+\overline{X}_2} \tag{1}$$

(1) a komplex pillanatértékekkel kifejezve ugyanis

$$\Re\{\overline{X}_1e^{j\omega t}\}+\Re\{\overline{X}_2e^{j\omega t}\} = \Re\{(\overline{X}_1+\overline{X}_2)e^{j\omega t}\},$$

aminek minden t időpillanatra teljesülnie kell. Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha nem csak a valós részek, hanem maguk a kifejezések is egyenlők.



5. ábra: Kapcsolat a valós időfüggvény és a fazora között. A felső ábrán az

$$\overline{x}(t) = \overline{X} \cdot e^{j\omega t}$$

komplex értékű függvény, a komplex pillanatérték értelmezése látható. Az $\overline{X}$ fazort szorzó $e^{j\omega t}$ komplex szorzófaktor abszolútértéke egységnyi,

$$|e^{j\omega t}| = 1,$$

míg szöge

$$\arg e^{j\omega t} = \omega t,$$

ezért az $\overline{x}(t)$ egy „forgó vektorként” értelmezhető, ami az origó körül pozitív irányban ω szögsebességgel forog körbe. Ennek az ω szögsebességgel forgó fazornak a valós tengelyre eső vetülete adja mindent t időpillanatban a valós időfüggvényt, ahogy az alsó ábrán látható:

$$x(t) = \Re\left\{\overline{x}(t)\right\}.$$

2. A valós skalárral szorzás a fazorok világában is skalárral szorzás:

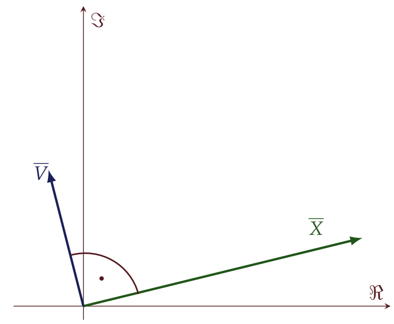
$$\boxed{v(t) = Kx(t) \Leftrightarrow \overline{V} = K\overline{X}.} \tag{2}$$

3. Az időfüggvény idő szerinti deriváltja a fazorának $j\omega$-val szorzásával fejezhető ki (6. ábra):

$$\boxed{v(t) = x'(t) \Leftrightarrow \overline{V} = j\omega\overline{X},} \tag{3}$$

mert

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\Re\{\overline{X}e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\frac{d}{dt}\left(\overline{X}e^{j\omega t}\right)\right\} = \Re\left\{\left(j\omega\overline{X}\right)e^{j\omega t}\right\}.$$



6. ábra: Derivált jel fazora

A 3. tulajdonság jelentőségét az adja, hogy a deriválás egy algebrai műveletbe megy át, ezért, ahogy látni fogjuk, a lineáris rendszereket leíró differenciálegyenletek szinuszos állandósult állapotban algebrai egyenletekre egyszerűsödnek.

Példaképpen keressük az

$$x_1(t) = 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

és az

$$x_2(t) = 5\cos\left(\omega t + 1{,}1\right)$$

jelek $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ összegjelét (a kezdőfázisokat értelemszerűen radiánban adtuk meg)! A jelekhez tartozó fazorok algebrai alakban

Érdemes az alábbi számítást a trigonometriai azonosságok alkalmazásával végzett számítás bonyolultságával összehasonlítani.

$$\overline{X}_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{3}} = 1{,}5 - j2{,}6$$

$$\overline{X}_2 = 5e^{j1{,}1} = 2{,}27 + j4{,}46.$$

Az összegjel fazora

$$\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 = 3{,}77 + j1{,}86 = 4{,}2e^{j0{,}46},$$

amiből az összegjel időfüggvénye kiolvasható:

A példából is látszik, hogy az eredmény nem függ ω konkrét értékétől.

$$x(t) = 4{,}2\cos(\omega t + 0{,}46).$$

15. Hálózat- és rendszeranalízis szinuszos állandósult állapotban

Bilicz-Horváth

2021. május 20.

A Kirchhoff-hálózatok leírása szinuszos állandósult állapotban

Emlékezzünk vissza, hogy a b számú kétpólusból álló, n csomópontú Kirchhoff-típusú hálózatban a hálózati egyenletek teljes rendszerét b számú kétpólus-karakterisztika, $r = n - 1$ Kirchhoff-áramtörvény és $l = b - n + 1$ Kirchhoff-feszültségtörvény alkotja. Vizsgáljuk meg, hogyan írhatók fel a kétpólusok karakterisztikái, illetve az összekapcsolási kényszerek szinuszos állandósult állapotban.

Az impedancia

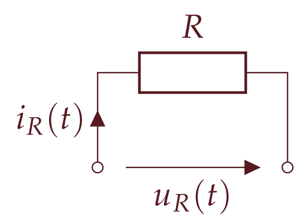
Szinuszos állandósult állapotban a kétpólusok árama és feszültsége szinuszos,

$$u(t) = U\cos(\omega t + \rho_u) \Leftrightarrow \overline{U} = Ue^{j\rho_u}$$

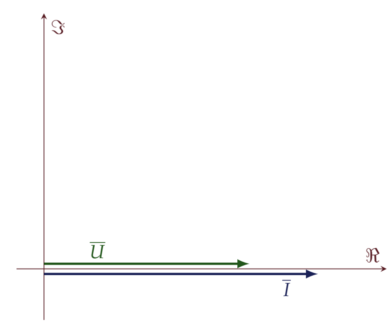
illetve

$$i(t) = I\cos(\omega t + \rho_i) \Leftrightarrow \overline{I} = Ie^{j\rho_i}$$

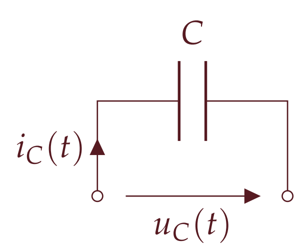
Ezen mennyiségeket reprezentáló $\overline{U}$ ill. $\overline{I}$ fazorok között a kétpólus $\overline{Z}$ *impedanciája* teremt kapcsolatot, amelyet három elemi kétpólus példáján keresztül vezetünk be.



1. ábra: Az ellenállás



2. ábra: Az ellenállás áramának és feszültségének fazorja



3. ábra: A kondenzátor

Az ellenállás karakterisztikája (1. ábra)

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t),$$

amit szinuszos állandósult állapotban a fazorok segítségével is kifejezhetünk:

$$\Re\left\{\overline{U}_R e^{j\omega t}\right\} = R \cdot \Re\left\{\overline{I}_R e^{j\omega t}\right\} = \Re\left\{R \cdot \overline{I}_R e^{j\omega t}\right\}.$$

Az egyenlet bal- és jobb oldala minden t időpontra egyenlő, ami akkor teljesülhet, ha a valósrész-képzésben álló kifejezések egyenlők egymással:

$$\boxed{\overline{U}_R = R \cdot \overline{I}_R}$$

A KONDENZÁTOR (3. ábra) karakterisztikája

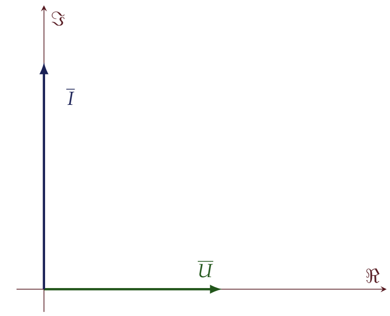
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt},$$

ami szinuszos állandósult állapotban fazorokkal felírva

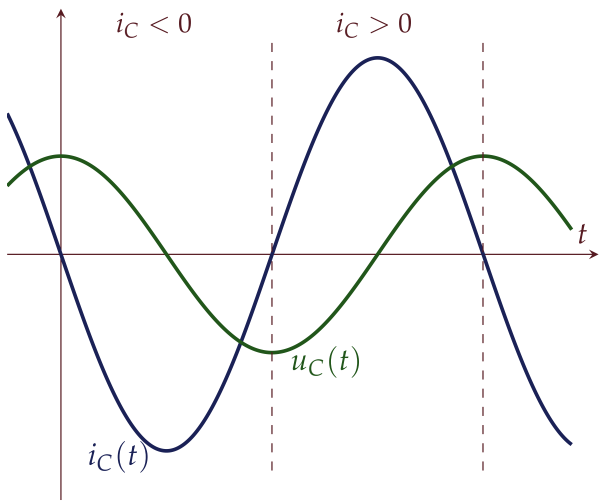
$$\Re\left\{\overline{I}_C e^{j\omega t}\right\} = C\frac{d}{dt}\Re\left\{\overline{U}_C e^{j\omega t}\right\} = \Re\left\{j\omega C \cdot \overline{U}_C e^{j\omega t}\right\},$$

mert a szinuszos időfüggvény deriválása a fazor $j\omega$-val szorzásába megy át. Így a fazorok közötti kapcsolat

$$\boxed{\overline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \overline{I}_C}$$



4. ábra: A kondenzátor áramának és feszültségének fazorja. Az áram 90 fokkal siet a feszültséghez képest.



5. ábra: A kondenzátor áramának és feszültségének időfüggvénye. A kondenzátor minden periódusban feltöltődik, kisül, ellentétes polaritással feltöltődik, majd ismét kisül. Amikor $i_C(t) < 0$, a kondenzáron negatív töltés halmozódik fel, és a töltési ciklus végén, ahol az áram nullára csökken, lesz a töltés és ezzel a feszültség (abszolút értékben) maximális. A következő félperiódusban a pozitív áram kisüti, majd pozitív polaritással maximális feszültségre tölti a kondenzátort. Ez a fizikai magyarázata annak, hogy miért siet az áram a feszültséghez képest.

A TEKERCS karakterisztikája (6. ábra)

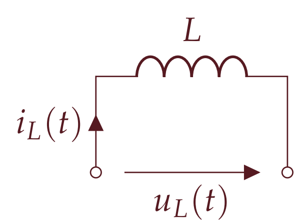
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt},$$

ami szinuszos állandósult állapotban a megfelelő fazorokkal is kifejezhető:

$$\Re\left\{\overline{U}_L e^{j\omega t}\right\} = L\frac{d}{dt}\Re\left\{\overline{I}_L e^{j\omega t}\right\} = \Re\left\{j\omega L \cdot \overline{I}_L e^{j\omega t}\right\},$$

mert az idő szerinti deriválás $j\omega$ faktorral való szorzásba megy át. A fazorok közötti kapcsolat tehát

$$\boxed{\overline{U}_L = j\omega L \cdot \overline{I}_L}$$



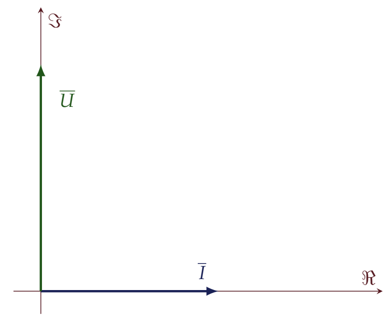
6. ábra: A tekercs

EGY ÁLTALÁNOS KÉTPÓLUS feszültségének és áramának fazorjai közötti kapcsolatot a kétpólus *impedanciája* írja le, amelynek definíciója (8. ábra)

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}}$$

Az impedancia értelemszerűen komplex mennyiség, és általában a különböző ω körfrekvenciákon különböző értékű. A három korábban tárgyalt kétpólus impedanciája

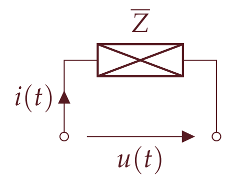
$$\boxed{\overline{Z}_R = R; \quad \overline{Z}_L = j\omega L; \quad \overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}}$$



7. ábra: A tekercs áramának és feszültségének fazorja. Az áram 90 fokkal késik a feszültséghez képest.

Az impedancia ellenállás dimenziójú mennyiség:

$$[\overline{Z}] = \Omega.$$



8. ábra: Az általános impedancia rajzjele

Az impedancia valós része az R *ellenállás*, képzetes része az X *reaktancia*:

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = R + jX.}$$

Például a tekercsre

$$\overline{Z}_L = jX_L = j\omega L,$$

a tekercsnek csak reaktanciája van:

$$X_L = \omega L,$$

Mivel a tekercs és a kondenzátor impedanciája tisztán képzetes, azokat *reaktáns* komponensnek is szokás nevezni. A pozitív reaktanciát tartalmazó impedanciákat *induktívnak*, a negatív reaktanciát tartalmazókat *kapacitívnak* is mondják.

ami pozitív értékű, és ω növelésével egyre nagyobb. A kondenzátorra az

$$\frac{1}{j} = -j$$

azonosság miatt

$$\overline{Z}_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C},$$

a kondenzátor

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

reaktanciája negatív és ω növelésével csökken. Az impedancia reciproka az *admittancia*:

$$\overline{Y} = \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = \frac{1}{\overline{Z}} = G + jB,$$

amelynek valós része a rezisztív hálózatoknál megismert G *konduktancia* vagy vezetés, képzetes része pedig a B *szuszceptancia*.

Ügyeljünk rá, hogy ugyan

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}},$$

de általában

$$G \neq \frac{1}{R}, \text{ ill. } B \neq \frac{1}{X}!$$

A hálózati egyenletek komplex alakja

Kirchhoff áramtörvénye kimondja, hogy a hálózat minden vágatára (és ezért minden csomópontra is) teljesül, hogy

$$\sum_k i_k(t) = 0.$$

Szinuszos állandósult állapotban a fazorokra áttérve

$$\sum_k \Re\left\{\overline{I}_k e^{j\omega t}\right\} \equiv \Re\left\{e^{j\omega t}\sum_k \overline{I}_k\right\} = 0,$$

amiből, mivel minden t időpillanatra teljesül, következik, hogy szinuszos esetben a vágatot alkotó kétpólusok áramainak fazorát algebrailag összegezve nullát kapunk:

$$\boxed{\sum_k \overline{I}_k = 0}$$

Kirchhoff feszültségtörvénye értelmében a hálózat hurokjaira minden időpillanatban teljesül a

$$\sum_k u_k(t) = 0$$

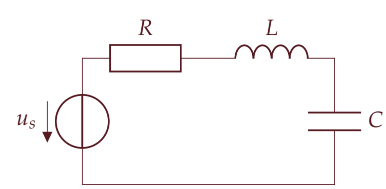
összefüggés. Fazorokkal kifejezve

$$\sum_k \Re\left\{\overline{U}_k e^{j\omega t}\right\} \equiv \Re\left\{e^{j\omega t}\sum_k \overline{U}_k\right\} = 0,$$

így a hálózat minden hurokjára teljesül, hogy a hurkot alkotó kétpólusok feszültségeinek fazorjaira vett algebrai összeg zérus:

$$\boxed{\sum_k \overline{U}_k = 0.}$$

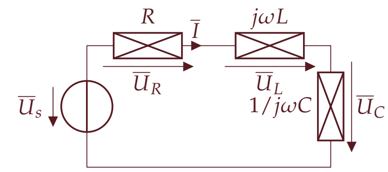
Ebből következik, hogy szinuszos állandósult állapotban a rezisztív hálózatoknál megismert minden hálózatszámítási módszer használható, ha az időfüggvényeket fazorokkal, a kétpólusokat az impedanciájukkal helyettesítjük. Mind az elemi módszerek (pl. soros és párhuzamos eredőre visszavezetés), mind a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszere, és a szuperpozíciós módszer is átültethető szinuszos áramú hálózatokra.



9. ábra: A soros rezgőkör

Fazorábrák szerkesztése

Szinuszos állandósult állapotban szokás a hálózat feszültségeit és áramait egy közös vektorábrán megrajzolni. Ez a fazorábra, amely általában szintén frekvenciafüggő. Példaképpen a soros rezgőkör (9. ábra) feszültségeit és áramát szemléltetjük. Ehhez helyettesítsük az időfüggvényeket a megfelelő fazorokkal, a komponenseket pedig az impedanciájukkal (10. ábra).



10. ábra: A soros rezgőkör szinuszos állandósult állapotban

Jelölje a körben folyó áram fazorját $\overline{I}$. A hálózatra felírható feszültségtörvény alapján

$$\overline{U}_s = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C. \tag{1}$$

A karakterisztikák alapján

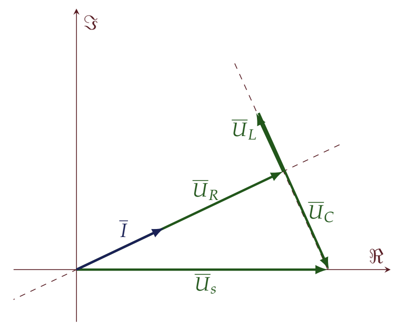
$$\overline{U}_R = R\overline{I} \tag{2}$$

$$\overline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}; \quad \overline{U}_L = j\omega L\overline{I}; \tag{3}$$

Vegyük fel önkényesen a forrásfeszültség kezdőfázisát zérusnak, azaz a forrásfeszültséghez társítható fazor legyen valós értékű:

$$u_s(t) = U_s \cos\omega t \Leftrightarrow \overline{U}_s = Ue^{j0}$$

Tegyük fel, hogy számítással meghatároztuk konkrét L, R, C, ω, U értékek ismeretében a körben folyó $\overline{I}$ áram fazorját, ami a 11. ábrán látható módon az 1. síknegyedbe esik, azaz a körben folyó áram siet a forrásfeszültséghez képest. Ebből azt is tudjuk, hogy a vizsgált körfrekvencián a rezgőkör impedanciája kapacitív (a rezgőkör reaktanciája negatív). Az ellenállás feszültsége (2) miatt biztosan azonos fázisban van a körben folyó árammal, ezért $\overline{U}_R$ fazorja párhuzamos $\overline{I}$ fazorjával. A (3) alapján $\overline{U}_L$ és $\overline{U}_C$ fazorjai merőlegesek $\overline{I}$-re; előbbi 90 fokkal késik, utóbbi 90 fokkal siet az áram fazorához képest, egymással tehát ellentétes irányúak. Végül (1) alapján megkapjuk $\overline{U}_R$ fazorjának végpontját, ha az $\overline{I}$ által kijelölt egyenesre merőlegest szerkesztünk úgy, hogy az $\overline{U}_s$ végpontján haladjon át. Ez az egyenes jelöli ki $\overline{U}_L$ és $\overline{U}_C$ irányát is.



11. ábra: A soros rezgőkör fazorábrája egy konkrét elemkészlet mellett. Az $\overline{U}_C$ és $\overline{U}_L$ fazorokat nem az origóba rajzoltuk, hogy szemléltethessük a feszültségek közötti viszonyokat. Figyeljük meg, hogy

$$|\overline{U}_s| < |\overline{U}_R| + |\overline{U}_L| + |\overline{U}_C|.$$

Gondoljuk meg, hogy ω növelésével az $\overline{I}$ fazor egyre kisebb szöget zárna be a valós tengellyel, majd átmenne a 4. síknegyedbe, ahogy a rezgőkör impedanciája induktívvá válik. Az áram tisztán valós a rezgőkör

$$\omega = \frac{1}{LC}$$

rezonancia-körfrekvenciáján.

A frekvenciafüggés vizsgálata

Térjünk most át a lineáris, invariáns, gerjesztés-válasz stabil rendszerek gerjesztés-válasz kapcsolatának leírására szinuszos állandósult állapotban. A rendszer reprezentálhat egy Kirchhoff-típusú hálózatot is, de a leírás bármilyen más lineáris, invariáns, gerjesztés-válasz stabil rendszerre alkalmazható.

Az átviteli tényező

Legyen a szokásos jelölésekkel $u(t)$ a gerjesztés, $y(t)$ a válasz időfüggvénye. A rendszer gerjesztése nem belépő szinuszos jel. A gerjesztés időfüggvénye, illetve a hozzá társítható fazor

$$u(t) = U\cos(\omega t + \rho_u) \Leftrightarrow \overline{U} = Ue^{j\rho_u}.$$

Ha a gerjesztés szinuszos, akkor biztosak lehetünk benne az összetevőkre bontás kapcsán tárgyalt gondolatmenet alapján, hogy a rendszer minden belső változója, így a válaszjele is szinuszos ugyanazzal az ω körfrekvenciával, ami a gerjesztésben szerepel. A válaszjel amplitúdója és kezdőfázisa azonban eltérhet a gerjesztésétől. A válasz általános alakja tehát

Ebből az is következik, hogy lineáris, invariáns rendszer válaszában csak olyan frekvenciaösszetevők szerepelhetnek, amelyek a gerjesztésben is megjelennek. Csak nemlineáris rendszerek esetén jelentkezhet a válaszban olyan frekvenciájú komponens, ami a gerjesztésben nincs jelen.

$$y(t) = Y\cos(\omega t + \rho_y) \Leftrightarrow \overline{Y} = Ye^{j\rho_y}.$$

Ezek után egy adott (rögzített) ω körfrekvencián a rendszer gerjesztését és válaszát leíró fazorok (komplex számok) között egyetlen komplex szám, a $\overline{H}$ ún. *átviteli tényező* vagy átviteli együttható teremt kapcsolatot:

$$\boxed{\overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{U}} \tag{4}$$

A gyakorlatban a komplex értékű átviteli tényezőnek nem a valós és képzetes része, hanem az abszolútértéke és fázisa bír fizikai jelentéssel. Euler-alakban kifejezve

$$\overline{H} = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = Ke^{j\varphi},$$

ahol

$$K \equiv |\overline{H}|$$

a rendszer *erősítése*, míg

$$\varphi \equiv \arg \overline{H}$$

a rendszer *fázistolása* ω körfrekvencián. Ugyanis (4) kifejtve

$$Ye^{j\rho_y} = He^{j\varphi} \cdot Ue^{j\rho_u} = H \cdot U \cdot e^{j(\rho_u + \varphi)},$$

amiből egyrészt

$$|\overline{Y}| = |\overline{H}| \cdot |\overline{U}| \equiv K \cdot |\overline{U}|,$$

azaz a válaszjel amplitúdója K-szorosa a gerjesztő jel amplitúdójának, másrészt

$$\rho_y = \rho_u + \varphi,$$

vagyis a válaszjel kezdőfázisa φ-vel tér el a gerjesztés fázisától.

Az átviteli karakterisztika

Az *átviteli karakterisztika* naiv definíciója szerint az ω körfrekvenciának egy olyan komplex értékű függvénye, ami megadja az átviteli tényező értékét a körfrekvencia függvényében:

A gyakorlatban előfordul, hogy a rendszer válaszjele egyetlen frekvencián, vagy néhány diszkrét frekvencián érdekes számunkra (pl. a villamos energetikában az 50 Hz-es hálózati frekvencián és annak egész számú többszörösein, ún. felharmonikusain), azonban más esetekben azt vizsgáljuk, hogy egy szélesebb ω tartományban hogyan viselkedik a rendszer. Ez motiválja az átviteli karakterisztika bevezetését.

$$\boxed{H(j\omega) = \overline{H}|_{\omega}}$$

Az argumentumban szereplő $j\omega$ jelentőségét csak később fogjuk megérteni, egyelőre fogadjuk el ezt a formát. A $\overline{H}$ és a felülvonás nélküli $H(j\omega)$ alakot gyakran felcserélhetőnek tartjuk, az utóbbi jelöléssel azt hangsúlyozzuk, hogy a mennyiség frekvenciafüggő. Az átviteli karakterisztika abszolútértékének és fázisának az átviteli tényezővel analóg fizikai jelentése van. Az átviteli karakterisztika abszolútértéke a $K(\omega)$ *amplitúdókarakterisztika*,

$$K(\omega) \equiv |H(j\omega)|,$$

aminek az argumentumában viszont egyszerűen ω-függést tüntetünk fel. $K(\omega)$ a rendszer erősítését adja meg a körfrekvencia függvényében. Az átviteli karakterisztika fázis a $\varphi(\omega)$ *fáziskarakterisztika*,

$$\varphi(\omega) \equiv \arg H(j\omega),$$

ami a rendszer fázistolását adja a körfrekvencia függvényében. Ezzel a felbontással

$$H(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Belátható továbbá, hogy valós bemenetű, valós kimenetű rendszerekre

$$H(-j\omega) = H^*(j\omega),$$

azaz az átviteli karakterisztika konjugált szimmetriát mutat a frekvencia függvényében. Ezért $K(\omega)$-ra

$$K(-\omega) = K(\omega)$$

érvényes (az amplitúdókarakterisztika a körfrekvencia páros függvénye), míg $\varphi(\omega)$-ra

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

vonatkozik (a fáziskarakterisztika a körfrekvencia páratlan függvénye). Éppen emiatt a karakterisztikákat megadása negatív frekvenciákra redundáns, csak pozitív frekvenciákra szokás szorítkozni.

A negatív frekvenciájú jelre gondolhatunk úgy, mint amihez egy negatív (az óramutató járásával megegyező) irányban forgó fazor társítható. A későbbiekben hasznos számítástechnikai segédeszköznek fog bizonyulni.

Az átviteli karakterisztika általános alakja, legalábbis azon rendszerek esetén, amelyekkel a tárgy keretében foglalkozunk, $j\omega$ *racionális törtfüggvénye*, a felírásnál is meghagyjuk $(j\omega)$ hatványait:

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2(j\omega)^2 + \ldots + b_m(j\omega)^m}{1 + a_1 j\omega + a_2(j\omega)^2 + \ldots + a_n(j\omega)^n}, \quad m \leq n$$

17. Teljesítmények szinuszos állandósult állapotban

Bilicz-Horváth

2021. május 21.

Kétpólusok teljesítménye

Tekintsünk egy általános kétpólust szinuszos állandósult állapotban. Az általánosság megszorítása nélkül rögzítsük a kétpólus feszültségének kezdőfázisát nulla értékűre, a feszültség (valós) csúcsértéke legyen U. A feszültség időfüggvénye

$$u(t) = U\cos(\omega t).$$

A kétpólus árama szintén szinuszos ugyanezzel a körfrekvenciával, azonban a kezdőfázis a feszültségétől eltérhet. Jelölje φ a feszültség és az áram fázisa közötti eltolódást. Ezzel a kétpólus áramának időfüggvénye az I (valós) amplitúdóval kifejezve

Ha a szóban forgó kétpólus lineáris és csatolatlan, akkor φ a kétpólus

$$\overline{Z} \equiv Ze^{j\varphi}$$

impedanciájának a szögével egyenlő.

$$i(t) = I\cos(\omega t - \varphi).$$

Vigyázzunk, hogy a fenti mennyiségek valós időfüggvények, nem pedig fazorok. A fazorokkal való kifejezést később tárgyaljuk majd. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feszültség és az áram referenciairánya megegyezik.

A pillanatnyi teljesítmény

A pillanatnyi teljesítmény korábban megismert definíciója

$$p(t) = u(t)\cdot i(t),$$

amit a szinuszos áramú kétpólusra alkalmazva

$$p(t) = UI\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t - \varphi),$$

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2}UI\cos\varphi + \frac{1}{2}UI\cos(2\omega t - \varphi)} \qquad (1)$$

A

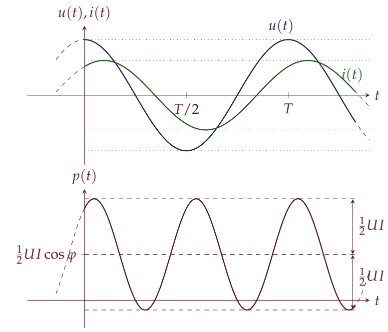
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

azonosságot kihasználva.

A pillanatnyi teljesítmény a

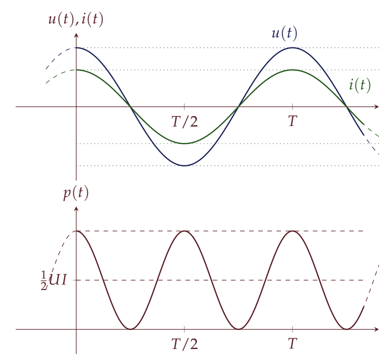
$$p_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}UI\cos\varphi$$

állandó érték körül 2ω *körfrekvenciával ($T/2$ periódusidővel),* $\frac{1}{2}UI$ *amplitúdóval leng*. A $\varphi = 0$ és a $\varphi = \pi$ eseteket leszámítva egy perióduson belül a pillanatnyi teljesítmény pozitív és negatív értékeket is felvesz, a kétpólus tehát felváltva viselkedik fogyasztóként ($p(t) > 0$) és termelőként ($p(t) < 0$). Ha $\cos\varphi > 0$, akkor a kétpólus az idő nagyobb részében fogyasztóként (1. ábra), ellenkező esetben termelőként viselkedik.



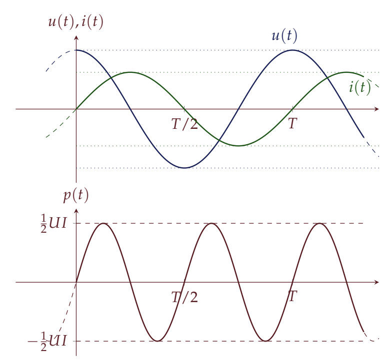
1. ábra: A $p(t)$ pillanatnyi teljesítmény szinuszos áramú kétpóluson. A görbék a $0 < \varphi < \pi$ esetre jellemző viselkedést mutatják.

Említést érdemel a $\varphi = 0$ eset, amikor a feszültség és az áram fázisban vannak (a kétpólus tisztán rezisztív, 2. ábra). Ekkor a kétpólus mindig fogyasztóként viselkedik. Ilyen kétpólus például egy lineáris ellenállás.



2. ábra: A $p(t)$ pillanatnyi teljesítmény szinuszos áramú kétpóluson, ha $\varphi = 0$.

Végül a $\varphi = \pm\pi/2$ esetben $\cos\varphi = 0$, ezért az átlagos teljesítmény zérus. A kétpólus az idő felében fogyasztóként, az idő másik felében termelőként viselkedik (3. ábra). Ilyen kétpólus lehet egy tekercs vagy egy kondenzátor.



3. ábra: A $p(t)$ pillanatnyi teljesítmény szinuszos áramú kétpóluson, ha $\varphi = \pi/2$.

Az energiamegmaradás elvéből következik, hogy a pillanatnyi teljesítmények összete a teljes hálózat b számú kétpólusára mindig zérus:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} p_k(t) = 0}$$

A hatásos teljesítmény

Szinuszos állandósult állapotban további teljesítményfogalmak bevezetése is indokolt, és a továbbiakban ezeket fogjuk előnyben részesíteni a pillanatnyi teljesítménnyel szemben. Tudjuk, hogy a kétpólus által egy $[t_1, t_2]$ intervallumban felvett energia (a kétpólus által végzett munka) a kétpólus munkafüggvényének integrálja:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt.$$

Behelyettesítve (1) kifejezést, és az integrálást elvégezve

$$W(t_1, t_2) = \frac{1}{2}UI\cos\varphi(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}UI\frac{\sin(2\omega t_2 - \varphi) - \sin(2\omega t_1 - \varphi)}{2\omega},$$

ahol a második tag számlálójának abszolútértéke az intervallum hosszától függetlenül 0 és 2 közé esik. Ha a vizsgált $[t_1, t_2]$ intervallum sokkal hosszabb, mint a periódusidő, a második tag elhanyagolható az elsőhöz képest:

$$W(t_1, t_2) = \frac{1}{2}UI\cos\varphi(t_2 - t_1) \Leftarrow (t_2 - t_1) \gg T \tag{2}$$

Ez alapján bevezethetjük a kétpólus *P hatásos teljesítményét*, ami egy időfüggetlen (állandó) érték, definíciója

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} p(t)dt,}$$

A hatásos (átlagos, közepes, „wattos”) teljesítmény munkavégzéshez kapcsolódik, és nem feltétlenül *hasznos* teljesítmény. Pl. egy izzólámpánál a fény- és hőkibocsátás is hatásos teljesítményhez kapcsolódik, de csak az előbbi „hasznos” a felhasználás szempontjából, a hőkibocsátás veszteséget okoz.

a pillanatnyi teljesítménynek egy periódusra vett átlaga. (2) alapján látható, hogy szinuszos esetben a hatásos teljesítmény kifejezése

$$\boxed{P = \frac{1}{2} UI \cos\varphi}$$

A hatásos teljesítmény egysége a pillanatnyi teljesítményhez hasonlóan a watt:

$$[P] = \mathrm{W}\,(\text{watt})$$

Ha $P < 0$, akkor a kétpólus középértékben *energiát és teljesítményt ad le*, a kétpólus *termelői állapotban van*. Ha $P > 0$, akkor a kétpólus középértékben *energiát és teljesítményt vesz fel*, a kétpólus *fogyasztói állapotban van*. A hatásos teljesítmények összege a hálózat valamennyi kétpólusára szintén zérus:

A korábbiak alapján a termelői állapotban levő kétpólus is vehet fel a periódus egy részében teljesítményt, de az átlagos teljesítmény negatív, és viszont.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} P_k = 0}$$

(1)-be helyettesítve a pillanatnyi teljesítmény a hatásos teljesítmény körül leng:

$$p(t) = P + \frac{1}{2} UI \cos(2\omega t - \varphi),$$

a kétpólus által a $[t_1, t_2]$ intervallumban felvett energia (végzett munka) pedig közelítőleg

$$W(t_1, t_2) \approx P(t_2 - t_1) \qquad \Leftarrow t_2 - t_1 \gg T$$

alakban számítható. Egy csatolatlan kétpólus *passzív*, ha semmilyen körülmények között nem lehet termelői állapotban, azaz $P > 0$ mindig teljesül. Ezzel szemben az *aktív* kétpólus lehet termelői és fogyasztói állapotban is.

Reaktáns (csak tekercseket és kondenzátorokat tartalmazó) kétpólusok hatásos teljesítménye nulla.

A látszólagos teljesítmény

A (1) egyenletben szereplő teljesítménylengés amplitúdóját szokás *látszólagos teljesítményként* bevezetni:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} UI}$$

Ezzel a pillanatnyi teljesítmény (1) formulája

A látszólagos teljesítményre nem vonatkozik megmaradási tétel.

$$p(t) = P + S\cos(2\omega t - \varphi)$$

alakban is írható: a pillanatnyi teljesítmény $P - S$ és $P + S$ között ingadozik 2ω körfrekvenciával. A hatásos teljesítmény egysége

$$[S] = \mathrm{VA} \quad (\text{voltamper})$$

A teljesítménylengés jellemzésére a villamos energetikában használatos a *teljesítménytényező* is:

$$\boxed{\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi}$$

A meddő teljesítmény

Térjünk vissza a pillanatnyi teljesítmény (1) formulájához, és végezzünk rajta egy másik átalakítást!

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2}UI\cos\varphi + \frac{1}{2}UI\cos(2\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}UI\cos\varphi + \frac{1}{2}UI\cos(2\omega t)\cos\varphi + \frac{1}{2}UI\sin(2\omega t)\sin\varphi = \\ &= \frac{1}{2}UI\cos\varphi\,[1+\cos(2\omega t)] + \frac{1}{2}UI\sin\varphi\sin(2\omega t) = \end{aligned}$$

$$\boxed{p(t) = P\,[1+\cos(2\omega t)] + Q\sin(2\omega t),} \qquad (3)$$

ahol bevezettük a

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}UI\sin\varphi}$$

meddő teljesítmény nevű mennyiséget, amelynek elsősorban a villamos energetikában van jelentősége. A (3) kifejezés első tagjában szereplő $\cos(2\omega t)$ lengés olyan értelemben „szükségszerűnek” tekinthető, hogy tisztán rezisztív ($\varphi = 0$ eset) kétpólusokon is fellépő teljesítménylengést reprezentál, míg a második tag egy olyan járulékos teljesítménylengést ad, amelynek időbeli átlagértéke nulla, azaz középértékben nem lép fel energiafogyasztás vagy -termelés. Mivel a meddő teljesítményhez nem kapcsolódik munkavégzés, külön mértékegységet vezetünk be:

$$[Q] = \text{var} \quad (\text{voltamper reaktív})$$

A hálózat minden kétpólusára a meddő teljesítmények összege zérus:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} Q_k = 0}$$

Alkalmazzuk a

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ismert trigonometriai azonosságot, valamint a szinuszfüggvény páratlan tulajdonságát:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

A villamosenergia-átvitelben általában cél a P hatásos teljesítmény átviteléhez kapcsolódó $|Q|$ meddő teljesítmény minimalizálása. Ugyan a meddő teljesítményhez nem kapcsolódik közvetlen energiafogyasztás, de a vezetékeket nagyobb áramra kell méretezni, és a nagyobb áram pl. a távvezetékeken nagyobb hőveszteséget okoz. A meddő teljesítmény csökkentéséhez φ értékét 0-hoz ($\cos\varphi$ értékét 1-hez) kell közelíteni. Ha pl. a kérdéses kétpólus induktív (pl. egy ipartelepen nagy teljesítményű villanymotorok), akkor ezt az induktivitást szokás az ipartelepen elhelyezett kondenzátorokkal lokálisan kompenzálni, hogy a villamos hálózat irányában ne lépjen fel meddőteljesítmény-igény.

Reaktáns kétpólusoknak csak meddő teljesítménye van: a tekercsnél $Q > 0$ („meddőt fogyaszt”), a kondenzátornál $Q < 0$ („meddőt termel”).

A komplex teljesítmény

Az eddigiekben a feszültség és az áram valós időfüggvényeivel fejeztük ki a különféle teljesítményeket. Térjünk most át a komplex leírásmódra. Ennek során engedjünk meg a feszültség időfüggvényére tetszőleges ρ kezdőfázist (hagyjuk el az eddigi önkényesen választott korlátozást, hogy a feszültség kezdőfázisa nulla). Legyen a kétpólus feszültsége

$$u(t) = U\cos(\omega t + \rho) \Leftrightarrow \overline{U} = Ue^{j\rho},$$

árama pedig ehhez képest φ szöggel késik:

$$i(t) = I\cos(\omega t + \rho - \varphi) \Leftrightarrow \overline{I} = Ie^{j(\rho-\varphi)}.$$

Vezessük be az

$$\boxed{\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{U}\cdot\overline{I}^*}$$

komplex teljesítményt, ahol a $(\cdot)^*$ a komplex konjugálás műveletét jelöli. Mivel

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{U}\cdot\overline{I}^* = \frac{1}{2}UIe^{j\rho}e^{-j(\rho-\varphi)} = \frac{1}{2}UIe^{j\varphi} = \underbrace{\frac{1}{2}UI\cos\varphi}_{P} + j\underbrace{\frac{1}{2}UI\sin\varphi}_{Q},$$

nyilvánvalóan

$$\boxed{\overline{S} = P + jQ}$$

A komplex teljesítmény egysége is voltamper:

$$[\overline{S}] = \text{VA} \quad \text{(voltamper)}$$

A hatásos teljesítmény a komplex teljesítmény valós része:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}UI\cos\varphi = \Re\left\{\overline{S}\right\},}$$

a meddő teljesítmény a komplex teljesítmény képzetes része:

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}UI\sin\varphi = \Im\left\{\overline{S}\right\},}$$

a látszólagos teljesítmény pedig a komplex teljesítmény abszolútértéke:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}UI = \left|\overline{S}\right|.}$$

A komplex teljesítményre is vonatkozik megmaradási tétel:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b}\overline{S}_k = 0}$$

Homogén lineáris kétpólus (impedancia) teljesítményei

Fejezzük ki egy

$$\overline{Z} = R + jX,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = G + jB$$

impedancia teljesítményeit! A komplex teljesítmény az impedancia felhasználásával

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{U} \cdot \overline{I}^* = \frac{1}{2}\overline{Z} \cdot \overline{I} \cdot \overline{I}^* = \frac{1}{2}\overline{Z}I^2 = \frac{1}{2}(R + jX)I^2,$$

ahol $I^2 = |\overline{I}|^2$ a kétpólus áramának amplitúdó-négyzete.

$$\boxed{\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{Z}I^2,}$$

az impedancia hatásos teljesítménye

$$\boxed{P = \Re\left\{\overline{S}\right\} = \frac{1}{2}RI^2,}$$

Innen is látható, hogy az ellenállás meddő teljesítménye, a reaktanciának pedig a hatásos teljesítménye nulla.

meddő teljesítménye pedig

$$\boxed{Q = \Im\left\{\overline{S}\right\} = \frac{1}{2}XI^2.}$$

Hasonlóan fejezhető ki a komplex teljesítmény az admittanciával is:

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{U} \cdot \overline{I}^* = \frac{1}{2}\overline{U} \cdot (\overline{Y} \cdot \overline{U})^* = \frac{1}{2}\overline{Y}^* U^2 = \frac{1}{2}(G - jB)U^2,$$

azaz

$$\boxed{\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{Y}^* U^2; \quad P = \frac{1}{2}GU^2; \quad Q = -\frac{1}{2}BU^2}$$

Az effektív érték

Egy tetszőleges T periódusú periodikus $u(t)$ jel *effektív értéke* egy skaláris érték,

$$\boxed{U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}.}$$

Speciálisan egy (tetszőleges kezdőfázisú) szinuszos jelnél

$$u(t) = U\cos(\omega t),$$

$$u^2(t) = U^2\left[\frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}\right],$$

az effektív érték pedig

$$\boxed{U_{\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{2}}}$$

A teljesítményeket az effektív értékkel kifejezve a rezisztív világban megismert kifejezésekkel analóg formulákat kapunk. A hatásos teljesítmény például

$$P = \frac{1}{2}UI\cos\varphi = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi$$

alakban számítható.

Teljesítményillesztés szinuszos állandósult állapotban

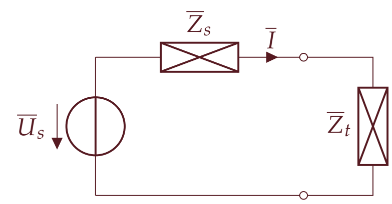
A rezisztív hálózatok tárgyalásakor megvizsgáltuk, hogy egy generátorra kapcsolt ellenállás teljesítményét milyen választással lehet maximalizálni: a generátorból akkor vehető ki a maximális teljesítmény, ha a terhelő ellenállás értéke egyenlő a generátor belső ellenállásával. A következőkben ezt a problémát vizsgáljuk szinuszos állandósult állapotban. Tekintsünk adottnak egy aktív kétpólust, amiben lineáris komponensek és ω körfrekvenciájú szinuszos források vannak, a generátorra egy

$$\overline{Z}_t = R_t + jX_t$$

impedanciájú lineáris kétpólus csatlakozik. A gyakorlatban általában a lezáró kétpólus *hatásos* teljesítményét kívánjuk maximalizálni, hogyan kell ehhez $\overline{Z}_t$ értékét megválasztanunk?

Az aktív kétpólust egy szinuszos Thévenin-generátorral helyettesítjük (4. ábra), amelynek forrásfeszültsége $\overline{U}_s$, belső impedanciája

$$\overline{Z}_s = R_s + jX_s.$$



4. ábra: Teljesítményillesztés szinuszos állandósult állapotban

A körben folyó áram $\overline{I}$ fazorja

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}_s}{\overline{Z}_t + \overline{Z}_s},$$

az áram amplitúdójának négyzete

$$I^2 = \frac{U_s^2}{(R_s + R_t)^2 + (X_s + X_t)^2},$$

ahol $U_s = |\overline{U}_s|$ a forrásfeszültség amplitúdója. A lezáró ellenállás hatásos teljesítménye függ R_t és X_t értékétől a következőképpen:

$$P(R_t, X_t) = \frac{1}{2}R_t I^2 = \frac{1}{2}U_s^2 \frac{R_t}{(R_s + R_t)^2 + (X_s + X_t)^2}$$

Nyilvánvaló, hogy P akkor maximális X_t függvényében, ha

$$X_t = -X_s,$$

ha pedig ez teljesül, akkor visszakapjuk a rezisztív esetnél megismert problémát, amelyre az optimális megoldást

$$R_t = R_s$$

adta. Összefoglalva a lezáró ellenállás hatásos teljesítményét a

$$\boxed{\overline{Z}_t = R_s - jX_s = (\overline{Z}_s)^*}$$

választás maximalizálja. Ez a *konjugált illesztési kritérium.* A generátor impedanciájában meglevő esetleges reaktanciát a terhelésben ellentétes előjelű reaktanciával kompenzáljuk. Illesztett esetben a terhelés által felvett (és a belső impedancia) hatásos teljesítménye

$$\boxed{P_{\text{max}} = \frac{U_s^2}{8R_s}}$$

amit a forrásfeszültség effektív értékével kifejezve a rezisztív esetnél megismert formával analóg

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{s,\text{eff}}^2}{4R_s}$$

alakban is írhatunk.