HÍRKÖZLÉSELMÉLET

1. EA

drFRIGYES ISTVÁN : frigyes@hvt.bme.hu tel: 3689 V2/631

4 db ZH

15 pont 0-4 -0

4,5-7 - 1

7,5 - 9 - 2

9,5 -11 - 3

11,5- 13 -4

13,5 -15 - 5

átlag kell, hogy 2-es legyen

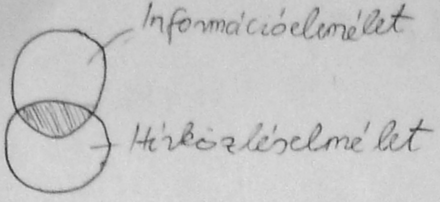
2-őt lehet pótolni

diák: http://docs.mht.bme.hu/~frigyes/hirkelm

Van Trees: Detection, Estimation and Modulation Theory I. kötet 2.fej

Proakis: Digital Communications

Dr. Bitó János - bito@hvt.bme.hu tel: 3616 V2/633



$R > H$

F - forrás

NY - nyelő

H - entrópia

R - információ mennyisége

C - kapacitás

$R < C$ - biztonságos átvitel (megbízható)

forrás: hang
látvány
adat

P_E - hibavalószínűség

$P_E < E$

bináris átvitel, Gauss-zaj $\frac{E_b}{N_0}$ — E_b - bitenergia, N_0 - spektrális sűrűsége a zajnak

$\frac{E_b}{N_0} > \ln 2$ (-1,5 dB) -> tetszőleges kis hibavalószínűséggel biztosítani lehet az átvitelt

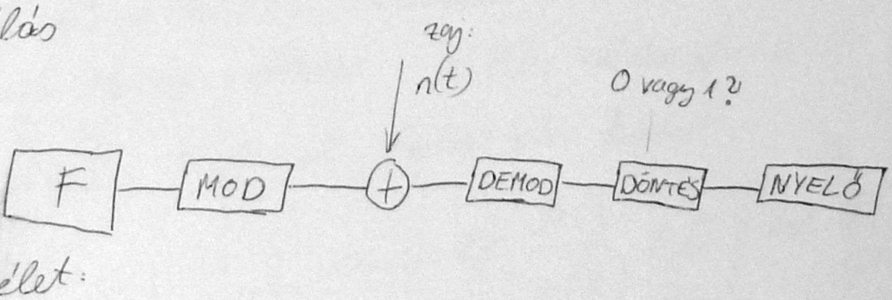
Cl. Shannon - 1948 - információelmélet

kódolás, kódelmélet

kiegyenlítés

moduláció

szinkronizálás



Döntéselmélet:

Bayes XVIII század

manapság a frekvenciasáv a legdrágább!

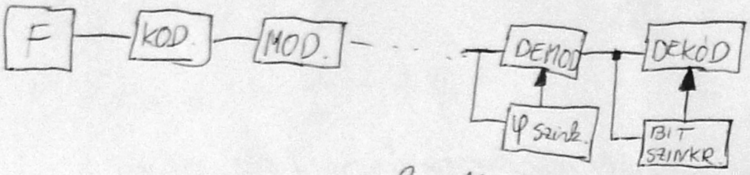
Nyquist, Hartley - frekvenciasáv-foglalással foglalkoztak
1928

Kotyelnyikov - 1947

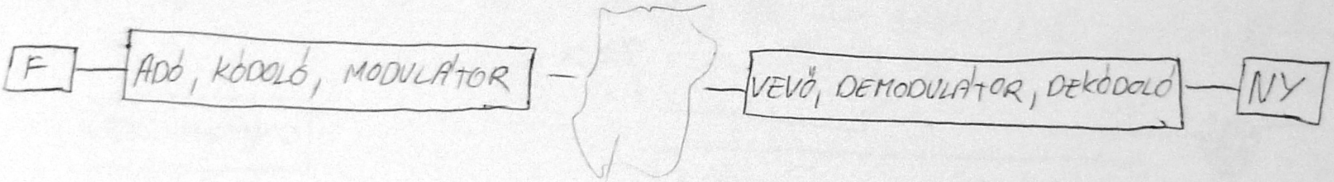
Turbo-kódolás - Berrou

LDPC - kódolás Low Density Parity Check - Gallager 1962

kódelm: algebra
valszám
sztoch. folyamatok



Becsléselmélet



SZABADTÉR
ÁTVITELI KÖZEG

$$\frac{\overline{E_b}}{N_0} \Rightarrow \frac{E_b(t)}{N_0}$$

modell, becslés

véletlen változó D lehetséges értékkel

D^n - lehetséges állapot n db esemény

$\log_a D^n = n \underbrace{\log_a D}$ Hartley 1928 BSTJ

$a=2$ - [bit] - információ mértékegysége

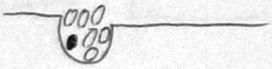
20 év múlva Shannon:

Hartley felfogással gond:

- kihúzok egy golyót véletlenszerűen (1/2 valség)

$D=2$ (fekete vagy fehér)

1 bit információ, ha kihúzok egy golyót



$I(X)$ X-véletlen vségi változó

DISZKRÉT

$p(x_i) - P(X=x_i)$

$\sum_{x_i \in X} p(x_i) = 1$

$$\boxed{H(X) = \sum_{x_i \in X} p(x_i) \operatorname{ld} \frac{1}{p(x_i)}}$$

$\boxed{\log_2 = \operatorname{ld}}$

$0 < x_i < 1$

formális információtartalma

átlagos

$\Rightarrow$ entrópia

$I(x_i) = \operatorname{ld} \frac{1}{p(x_i)}$ - formális egy eseményének információtartalma minél kisebb a bekövetkezési valség, annál nagyobb az információ tartalom

fontos tudni, hogy milyen a forrás eloszlása (stacioner, nem stac.)

$\downarrow$

ezt mindig feltesszük

Példa:

~~P(X)~~

$P_r(X=a) = \frac{1}{2}$ - 1 bit kell

$P_r(X=b) = \frac{1}{4}$ - 2 bit

$P_r(X=c) = \frac{1}{8}$ - 3 bit

$P_r(X=d) = P_r(X=d) = \frac{1}{16}$ - 4 bit

l_i - i-edik eseményhez rendelt bitek száma

$$ld \frac{1}{p(x_i)} \leq l_i < ld \frac{1}{p(x_i)} + 1$$

$$\underbrace{\sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot ld \frac{1}{p(x_i)}} \leq \sum_{x_i \in X} p(x_i) \cdot l_i < \underbrace{\sum p(x_i)\, ld \frac{1}{p(x_i)}} + 1$$

$$\boxed{H(X) \leq L < H(X) + 1}$$

Shannon I forráskódolási tétel

$\boxed{\text{ZH esélyes}}$

$H = 1{,}875$

Ha ismerem a forrás eseményeinek eloszlását, akkor megtudom határozni az optimális kódolást

Tétel: Ha feltesszük, hogy a forrás számossága véges $\# \mathcal{X} = n$ (példában n=5) akkor a forrás entrópiája:

$$0 \leq H(X) \leq ld\, n$$

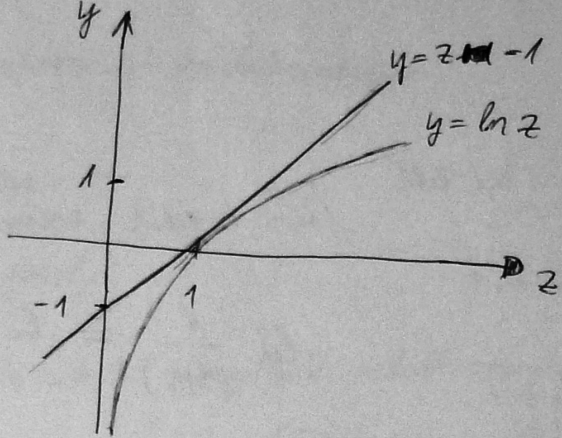
biz: tegyük fel, h $H(X) \leq ld\, n$

$$H(X) - ld(n) \leq 0$$

$$\sum_{x_i \in X} p(x_i)\, ld \frac{1}{p(x_i)} - \sum_{x_i \in X} p(x_i)\, ld\, n \leq 0$$

$$\sum_{x_i \in X} p(x_i)\ ld\ \frac{1}{p(x_i)\, n} \le 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} \sum_{x_i \in X} p(x_i) \ln \frac{1}{p(x_i)\, n} \le 0$$



$$\frac{1}{\ln 2} \sum_{x_i \in X} p(x_i) \ln \frac{1}{p(x_i)\, n} \le \frac{1}{\ln 2} \sum_{x_i \in X} p(x_i) \left[\frac{1}{p(x_i)\, n} - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(\overbrace{\sum_{x_i \in X} \frac{1}{n}}^{1} - \overbrace{\sum p(x_i)}^{1} \right) = 0$$

Def: Kullback - Leibler távolság (relatív entrópia)

X diszkrét valségi változó $p(X)$ - sűrűségfv-e

$q(x)$ - eltérő sűrfv-el fejlesztek kódot

$$D(p \| q) \triangleq \sum_{x \in X} p(x) \cdot ld \frac{p(x)}{q(x)} = E\left\{ ld \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

↓

eloszlások eltérését vizsgálhatom

$$H(x) + D(p\|q) \le L < H(x) + D(p\|q) + 1$$

$p(x)$-et becsülöm $q(x)$-el

HÍRKÖZLÉSELMÉLET

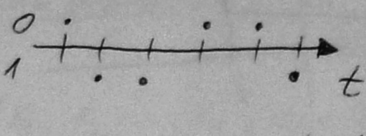
2 EA

Sztochasztikus folyamatok

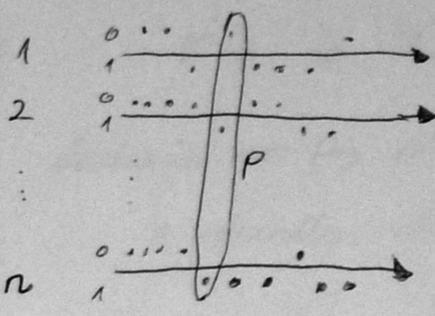
pénzdobás:

diszkrét idejű sztochasztikus folyamat

0 - fej   1 - írás



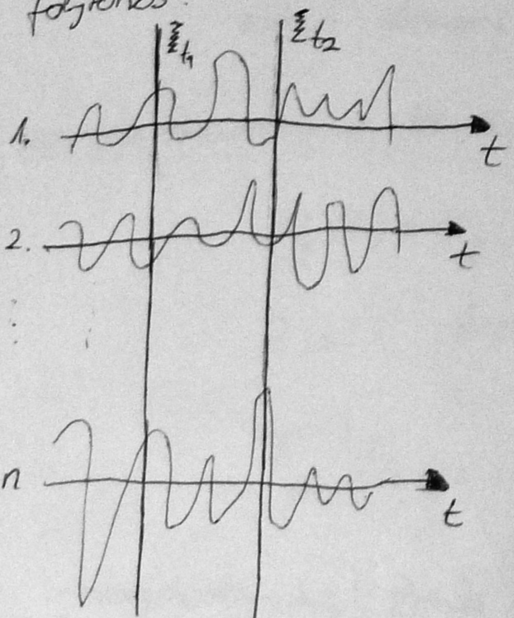
ha több ember dobálja a pénzt, a folyamat felgyorsítható



- a görbesereget adják a sztochasztikus folyamatot

folytonos esetben is igaz

folytonos:



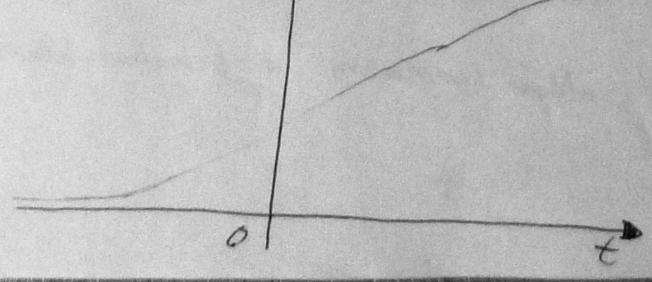
időfüggvények

F - eloszlásfüggvény

elsőrendű eloszlásfv.

$F^{(1)}_{\xi}(x, t_1)$ -

t időpillanatban mi a véletlen változó eloszlásfüggvénye

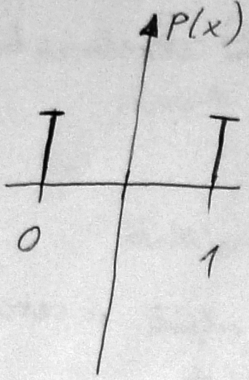


elsőrendű sűrűségfv:

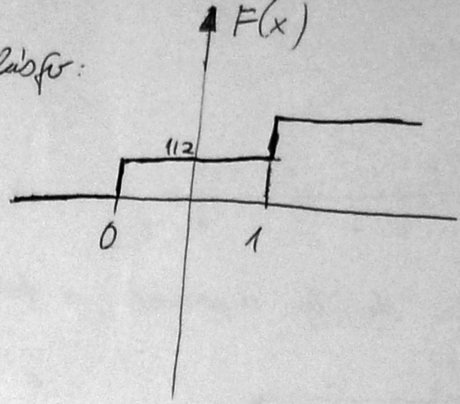
$$f_\xi^{(1)}(x, t_1) = \frac{\partial F(x, t_1)}{\partial x}$$

pénzfeldobás:

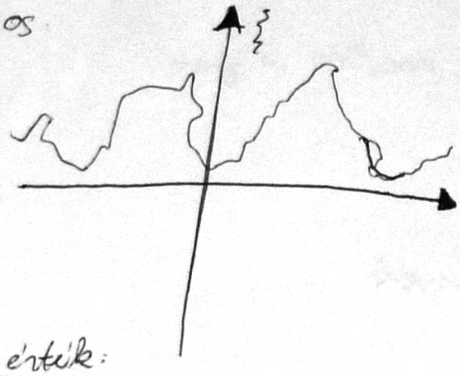
sűrűségfv:



eloszlásfv:



folytonos



várható érték:

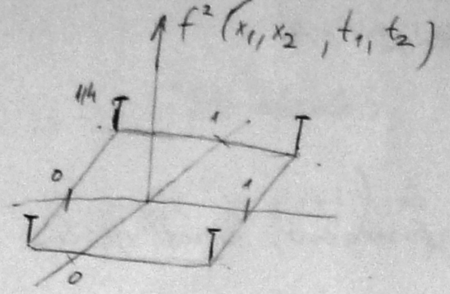
$$m_\xi(t_1) = E_\xi\{\xi_{t_1}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi^{(1)}(x, t_1)\,dx$$

$$F_\xi^{(2)}(x_1, x_2, t_1, t_2)$$

$$F_\xi^{(n)} = (x_1, x_2 \dots x_n, t_1, t_2 \dots t_n)$$

$\forall n)\ \forall \{T\}$ - bármilyen n és bármilyet idő (T) kiválasztásakor

ha ismerem eloszlást, akkor ismerem a sztochasztikus folyamatot pénzfeldobás 2 dimenziós sűrűségfv-e



Stacionaritás fogalma

$$F^n_\xi(x_1, x_2 \dots x_n, t_1+\tau_1, t_2+\tau \dots t_n+\tau)$$

$\forall \tau$ és $\forall \{T\}$

eloszlásfv nem fog változni, ha τ-val arrébbtolom az egészet

n-edrendben stacionárius a folyamat

erősen stacionárius, ha $\forall \tau$, $\forall \{T\}$ és $\forall n$ igaz minden n-re is

erősen stacionárius pl a pénzfeldobás

gyengén stacionárius, ha a várható értéke időfüggetlen : ha

$m_\xi(t) = m_\xi \quad \forall t$-re

$R(\Delta t)$ - korelációs fv. csak időkülönbségtől függ

$$F^{(2)}_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) = F^2_\xi(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1) =$$

$$= F^2_\xi(x_1, x_2, \Delta t)$$

Hartley (1928) : diszkrét és véges értékkészletű valváltozó által hordozott információról szól – előző EA

$$\# X = n$$

$$I(X) = \log_a n$$ – információ, amit hordoz

$$\log_a n^k = k \log_a n$$

Shannon (1948) X, $p(x)$ – diszkrét

$$I(x_i) = ld \frac{1}{p(x_i)}$$ – x_i esemény információtartalma

Entrópia: átlagos információtartalom

$$H(X) = E\left\{ I(x_i) \right\} = \sum_{x_i \in X} p(x_i)\, ld \frac{1}{p(x_i)}$$

tétel: entrópia korlátos:

$$\emptyset \leq H(X) \leq ld\, n$$ hány lehetséges értéket vesz fel a valószínűségi változó

Shannon forráskódolási tétele – Shannon I

minél valószínűbb egy esemény, annál kevesebb (rövidebb) kódjot kapjon

$$H(X) \leq \underbrace{L(X)}_{\text{átlagos kódhossz}} \leq H(X) + 1$$

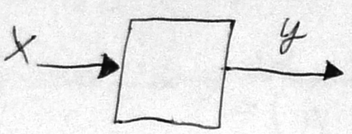
Def: Kullback - Leibler távolság (relatív entrópia)

$p(x)$, $q(x)$ - két eloszlás

$$D\big(p(x) \,\|\, q(x)\big) \doteq \sum_{x \in X} p(x) \operatorname{ld} \frac{p(x)}{q(x)} \neq D\big(q(x) \,\|\, p(x)\big)$$

$$H(x) + D(p\|q) \leq L(x) < H(x) + D(p\|q) + 1$$

<u>Információ átvitel</u>



<u>feltételes entrópia</u>:

$p(x)$, $p(y)$

$$H(Y|X) \doteq \underset{\text{várható érték}}{E}\big\{ I(y_i \,|\, x_i) \big\} = \sum_{x_i \in X} \sum_{y_i \in Y} \overbrace{p(x_i)\, p(y_i|x_i)}^{p(x,y)} \operatorname{ld} \frac{1}{p(y_i|x_i)}$$

feltételes entrópia: feltételes esemény információtartalmának várható értéke

Def: <u>együttes entrópia</u>

$$\{X_1, X_2 \ldots X_n\} = \mathcal{X}^n$$

$$H(X_1, X_2 \ldots X_n) \doteq -\sum_{x_1 \in X_1} \ldots \sum_{x_n \in X_n} p(x_1 \ldots x_n) \operatorname{ld} p(x_1 \ldots x_n)$$

Diszkrét sztochasztikus folyamat entrópiája

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1 \dots X_n)$$

ha erősen stac. a folyamat, akkor ez a határérték létezik

Def: Kölcsönös információ

$$I(x_i ; y_i) \doteq ld \frac{p(x_i | y_i)}{p(x_i)} = ld \frac{p(y_i | x_i)}{p(y_i)}$$

független események kölcsönös információtartalma 0

átlagos kölcsönös információ:

$$I(X,Y) = \sum_{x_i \in X} \sum_{y_i \in Y} p(x_i, y_i)\, I(x_i ; y_i) =$$

$$= \sum_x \sum_y p(x,y)\, ld \frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}$$ – másképp írva:

$$D\big(p(x,y) \,\|\, p(x)\cdot p(y)\big)$$

$$I(X;Y) = \sum_x \sum_y p(x,y) \left[ld \frac{1}{p(x)} - ld \frac{1}{p(x|y)} \right] =$$

$$= \underbrace{\sum_x \sum_y p(x)\, p(y|x)\, ld \frac{1}{p(x)}}_{H(x)} - \sum\sum p(x,y)\, ld \frac{1}{p(x|y)} =$$

$$= H(x) - H(X|Y)$$

posztenóri entrópia

mert: $\sum_x p(x)\, ld \frac{1}{p(x)} \sum_y p(y|x)$

$\sum_x p(x)\, ld \frac{1}{p(x)}$: def

$\sum_y p(y|x)$: 1-el egyenlő

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$H(X|Y) = H(X) - I(X,Y)$$

csatorna kapacitás:

$$C \doteq \max_{P(X)} I(X;y)$$ - kölcsönös információ maximalizálása

Shannon II. tétel csatornakódolási tétel

$H(x)$, C

$H(x) \leq C$, $\exists$ olyan kódolási szabály $\Omega_C(x) = X'$

oly módon, hogy tetszőlegesen kis hibavalószínűséget érjünk el

---

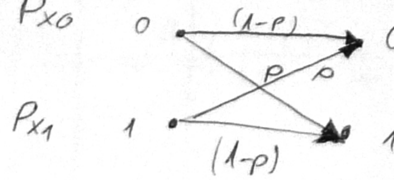
* kitekintés
elsőrendben okay, de másodrendben nem:
pénzdobás
ha csal a kitevő, a doboz mögötti nem veszi észre

---

példa:

csatorna: BSC - bináris szimmetrikus csatorna
p - hiba valség

$P_{X_0} = P_{X_1} = \frac{1}{2}$



$$P_{y0} = P_{X0}(1-p) + P_{X1} \cdot p = \frac{1}{2}$$

$$P_{y1} = P_{X0} \cdot p + P_{X1}(1-p) = \frac{1}{2}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = \sum_y P(y)\, ld \frac{1}{P(y)} = 1$$

$P_{X0} = P_{X1}$

entrópia maximuma $0 \leq H \leq ld\, 2$