DÉR–RADNAI–SOÓS

Fizikai feladatok

II. kötet

Aktualizálva az új rendszerű közép- és emelt szintű érettségi követelményekhez

DÉR–RADNAI–SOÓS

Fizikai feladatok

II. kötet

Aktualizálva az új rendszerű közép- és emelt szintű érettségi követelményekhez

Holnap Kiadó

Szerzők:

DÉR JÁNOS
adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem
Fizikai Tanszék

RADNAI GYULA
adjunktus
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Kísérleti Fizikai Tanszék

SOÓS KÁROLY
adjunktus

Szerkesztette:

DÉR JÁNOS

Lektorálták:

DR. SIMONYI KÁROLY
egyetemi tanár

KUNFALVY REZSŐ
középiskolai tanár

Az SI-mértékegységrendszert érvényesítette:

DR. GECSŐ ERVIN
Országos Pedagógiai Intézet főmunkatársa

Holnap Kiadó Kft., Budapest
A kiadásért dr. Milkovich Eszter, a Kft. ügyvezető igazgatója felel
1111 Budapest, Zenta u. 5.
Tel./Fax: 466-6928
e-mail: holnapkiado@holnapkiado.hu
www.holnapkiado.hu

Felelős szerkesztő Kovács Loránd
Műszaki szerkesztő, borító Csizi Renáta
Irodalmi szerkesztő Nagy Borbála Réka

ISBN 963 346 666 0

Nyomta és kötötte a Novum Nyomda Kft.
Felelős vezető Budincsevits József

FELADATOK

15. Hőtan I.

Bevezető feladatok

15.1. Egy alumíniumból készült, 100 km hosszú távvezetéket 0 °C hőmérsékleten szereltek fel. Mekkora lesz a hossza
a) nyáron 40 °C hőmérsékleten,
b) télen −30 °C hőmérsékleten?
(Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ 1/°C.)

15.2. Autókerék tömlőjében 10 °C hőmérsékleten, $1{,}616 \cdot 10^5$ Pa nyomás mellett 18 liter levegő van. 35 °C-ra melegedve a tömlő térfogata 19 liter. Mennyi benne a levegő nyomása?

15.3. A 15 °C-os és a 25 °C-os izoterma közül a $(p-V)$ diagramon melyik helyezkedik el feljebb?

Gyakorló feladatok

15.4. Rézlemezbe kicsiny lyukat fúrunk. Ezután a rézlemezt egyenletesen lehűtjük. Mi történik a lyukkal? Nagyobb lesz, kisebb lesz, vagy ugyanakkora marad? Miért?

15.5. Változik-e az anyag sűrűsége hő hatására?

15.6. Miért nem reped el a kvarcedény elég nagy hőmérséklet-változás esetén sem?

15.7. 50 cm hosszú és 4 mm átmérőjű kör keresztmetszetű vasrúd mindkét végét rögzítjük. Szobahőmérsékleten nincs feszültség a vízszintes rúdban.
a) Mekkora feszültség lép fel a rúdban, ha a hőmérsékletét 30 °C-kal növeljük?
b) Mekkora vízszintes erővel nyomja a rúd a rögzítési pontokat?
A Young-modulus értéke $2 \cdot 10^{11}$ N/m².
A hőtágulási együttható $12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.

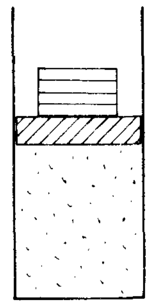
15.8. Mi az elvi akadálya annak, hogy a vizet 0 °C és 100 °C közötti tartományban hőmérő-folyadékként használjuk?

15.9. Milyen gázt nevezünk ideális gáznak?

15.10. Az állandó térfogatú gázhőmérő nyomása 100 °C-on $3{,}25\cdot10^4$ Pa. Mekkora hőmérsékletet jelez a gázhőmérő akkor, amikor a gáz nyomása $4{,}75\cdot10^4$ Pa?

15.11. Higannyal telt edénybe mindkét végén nyitott üvegcsövet süllyesztünk úgy, hogy a cső 60 cm hosszú része kint legyen a higanyból. Ezután a cső felső részét lezárjuk, és még 30 cm-rel beljebb nyomjuk a higanyba. Milyen hosszú ekkor a csőben levő levegőoszlop, ha a külső légnyomás 760 mm magas Hg-oszlop nyomásával tart egyensúlyt?

15.12. Az ábrán látható hengeres edényben a gáz fölött könnyen mozgó dugattyú helyezkedik el. Ábrázoljuk a gáz térfogatának változását a hőmérséklet függvényében lassú melegítés közben a dugattyú két különböző terhelése mellett!



15.13. Ábrázoljuk az ideális gáz
a) izobár,
b) izochor,
c) izoterm folyamatait a nyomás – hőmérséklet diagramon!

15.14. Mennyi a normál állapotú hélium sűrűsége?

15.15. Gázpalackban $4\cdot10^6$ Pa nyomású, 27 °C hőmérsékletű gáz van. Mekkora lesz a palackban a gáz nyomása, ha a gáz 25%-át kiengedve, a hőmérséklet 7 °C-ra csökken?

Házi feladatok

15.16. Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan „fix pontot", amelyeket (állandó $1{,}01\cdot10^5$ Pa nyomás mellett) hőmérők kalibrálására szoktak használni:

a) a folyékony hélium forráspontja −268,98 °C;
b) a folyékony oxigén forráspontja −182,97 °C;
c) a folyékony ólom fagyáspontja 327,3 °C;

d) a folyékony arany fagyáspontja 1063,0 °C;
e) a szilárd volfrám olvadáspontja 3380,0 °C.
Fejezzük ki ezeket a hőmérsékleteket K-ban, felhasználva azt, hogy az abszolút zérus fok hőmérséklete −273,15 °C.

15.17. Acél csapágygolyó átmérője szobahőmérsékleten pontosan 1 cm. A golyó hőmérsékletét 50 °C-kal emeljük.
a) Mennyivel nő a golyó átmérője?
b) Milyen arányban csökken a golyó sűrűsége?
(Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $12\cdot10^{-6}$ 1/°C.)

15.18. Alumínium sűrűsége 0 °C hőmérsékleten $2{,}7\cdot10^3$ kg/m³. Mennyi a sűrűsége, ha forrásban levő vízbe mártjuk?
(Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $2{,}4\cdot10^{-5}$ 1/°C.)

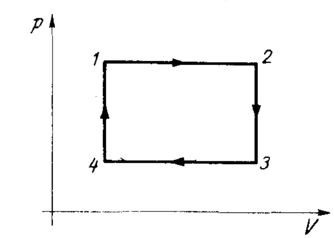
15.19. Egy légbuborék átmérője 100 méterrel a tenger felszíne alatt, +5 °C hőmérsékleten 3 mm. Felemelkedve a buborék a tenger felszíne alatt 60 méterrel egy +8 °C hőmérsékletű vízrétegen halad át. Mennyi itt a buborék átmérője?

15.20. Nyitott, 1 méter hosszú üvegcsövet félig higanyba nyomunk. Ezután a csövet, miután a végét ujjunkkal bezártuk, kiemeljük a higanyból. Milyen hosszú higanyoszlop marad a csőben, ha a külső légnyomás 750 mm magas Hg-oszlop nyomásával tart egyensúlyt?

15.21. Két különböző, de állandó térfogatú edény ugyanolyan gáz egyenlő tömegű mennyiségeit tartalmazza. Ábrázoljuk a nyomást mint a hőmérséklet függvényét mindkét gáz esetében!

15.22. Ábrázoljuk az ideális gáz
a) izobár,
b) izochor,
c) izoterm folyamatait a térfogat–hőmérséklet diagramon!

15.23. Az ábrán ideális gáz állapotváltozásának diagramja látható a nyomás – térfogat ($p-V$) állapotsíkon. Rajzoljuk meg ugyanezt a körfolyamatot a nyomás – hőmérséklet ($p-T$) és a térfogat – hőmérséklet ($V-T$) állapotsíkon, megjelölve a megfelelő pontokat!



15.24. Milyen nyomású héliumgáz sűrűsége egyezik meg a vele azonos hőmérsékletű nitrogéngáz sűrűségével?

15.25. A kerékpártömlőben levő levegő nyomása 20 °C-on $2 \cdot 10^5$ Pa. A levegő tömegének hányad részét kell 20 °C-on kiengedni, ha azt akarjuk, hogy a bentmaradó levegő nyomása 35 °C-on is legfeljebb $2 \cdot 10^5$ Pa legyen? Mennyi lesz így a nyomás 20 °C-on?

Ajánlott feladatok

15.26. Egy útszakasz hosszát 20 °C hőmérsékleten megmérve 112,5 méternek találjuk. Mekkora a mérés abszolút és relatív hibája, ha az acél mérőszalagot 0 °C hőmérsékleten hitelesítették. (Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ 1/°C.)

15.27. Egy alumíniumból készült 100 kilométer hosszú távvezetéket 20 °C hőmérsékleten szerelnek fel. Mekkora lesz a hossza

a) nyáron 40 °C hőmérsékleten,

b) télen −30 °C hőmérsékleten?

(Az alumínium vonalas hőtágulási együtthatója $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ 1/°C.) Döntsük el lényeges-e, hogy a kezdeti hossz nem 0 °C hőmérséklethez tartozik, mint a 15.1. feladatban!

15.28 Ingaóra ingája kisméretű teherből és könnyű sárgaréz huzalból áll. Az óra 0 °C hőmérsékleten pontosan jár. 20 °C-nál naponta 16 másodpercet késik. Mennyi a sárgaréz lineáris hőtágulási együtthatója?

15.29. 20 °C hőmérsékleten 11,28 cm átmérőjű acéltengelyre egy ugyanezen hőmérsékleten 11,25 cm belső átmérőjű alumínium gyűrűt kell ráhúzni.

a) Hány fokra kell a gyűrűt felmelegíteni?

b) Ha nem a gyűrűt melegítenénk, hány fokra kellene a tengelyt lehűteni?

c) Van-e olyan közös hőmérséklet, amelyen a gyűrű ráhúzható a tengelyre?

(Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.
Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $28{,}7 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.)

15.30. Egy 20 °C hőmérsékletű acélgyűrű belső átmérője 10,00 cm, külső átmérője 10,10 cm. A gyűrű hőmérsékletét 30 °C-ra emelve, határozzuk meg·

a) a belső átmérő növekedését,

b) a belső átmérő relatív növekedését,

c) a belső kerület relatív növekedését,

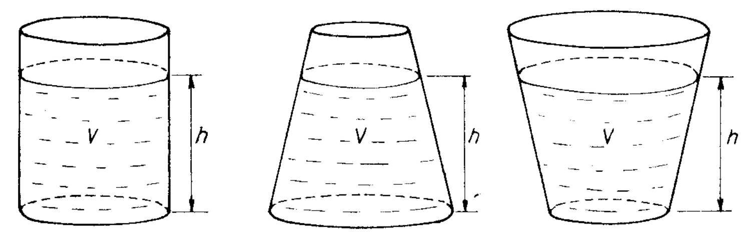
d) a lyuk területének relatív növekedését,

e) válaszoljunk az előző kérdésekre, ha a gyűrű hőmérséklete nem 30 °C-ra hanem 30 °C-kal emelkedik!

(Az acél vonal menti hőtágulási együtthatója $11 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.)

15.31. **Egy edény térfogata 0 °C-on pontosan 1000 cm³. Ezen a hőmérsékleten az edényt higannyal töltjük tele, majd egy nagyobb tálba állítjuk, és az egészet melegíteni kezdjük. 100 °C-on a tálban már 15,2 cm³ kiömlött higany van. A higany térfogati hőtágulási együtthatója $182 \cdot 10^{-6}$ 1/°C. Határozzuk meg az edény anyagának lineáris hőtágulási együtthatóját!**

15.32. **Az ábrán látható három edényt 100 °C hőmérsékletű, azonos térfogatú vízzel töltenek meg. Hogyan változik a fenéknyomás az egyes edényekben szobahőmérsékletre való lehűléskor, ha kezdetben a víz felszínének az edény aljától való távolsága mindhárom edényben ugyanakkora?**



15.33. **Melyik az a hőmérséklet, amelynek a kelvin- és a celsius-skálán kifejezett értéke 1%-nál kevesebbel tér el egymástól?**

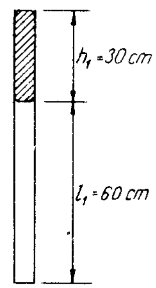
15.34. **Egy platinaellenállás-hőmérő elektromos ellenállása mint a hőmérséklet függvénye a következő formával adható meg:**

$$R_t = R_0\,(1 + At + Bt^2),$$

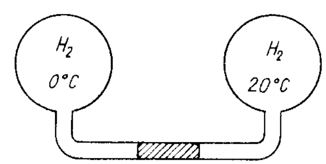
ahol R_0; A és B állandók, t pedig a hőmérséklet °C-ban. Legalább hány fixpontra van szükség a platinaellenállás-hőmérő kalibrálásához?

15.35. Zárt henger terét egy könnyen mozgó, hőáteresztő dugattyú két részre osztja. Az egyikbe m tömegű, a másikba $2m$ tömegű ugyanazon minőségű gázt töltünk. Az egész henger térfogatának hányad részét foglalja el a nagyobb tömegű gáz, amikor a dugattyú már egyensúlyban van?

15.36. Egyik végén beforrasztott függőleges üvegcsőben a levegőt az ábra szerint higany zárja el. A csövet óvatosan megfordítjuk úgy, hogy a nyitott vége legyen alul. Eközben a higany egy része kifolyik. Milyen hosszú a csőben maradó higanyoszlop, ha a külső légnyomás 750 mm magas Hg-oszlop nyomásával tart egyensúlyt?

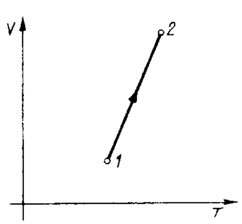


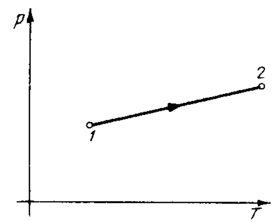
15.37. Az ábrán látható két azonos térfogatú tartályt, melyeket vékony cső köt össze, hidrogéngázzal töltöttek meg. Az egyikben a hőmérséklet 0 °C, a másikban +20 °C. Elmozdul-e a vízszintes csőben levő higanyoszlop, ha a hőmérsékletet mindkét tartályban 10 °C-kal növeljük?



15.38. Dugattyús szivattyú hengerének térfogata $1V$. Határozzuk meg, hogy hány szívás után csökken a ritkítandó levegőt tartalmazó, V térfogatú edény nyomása p_0-ról p-re! A szivattyúzás folyamatát tekintsük izotermikusnak.

15.39. Nőtt vagy csökkent az ideális gáz nyomása abban a folyamatban, amelyet a $(V-T)$ diagramon az ábrán látható *1–2* szakasz ábrázol?

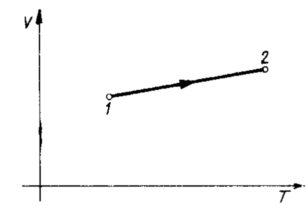




15.40. A 12. oldal utolsó ábráján látható nyomás–hőmérséklet diagramot egy ideális gáz melegítésekor vették fel. A diagramról döntsük el, hogy a gáz tágult vagy összenyomódott, miközben az *1* állapotból a *2*-be jutott!

15.41. Két egyenlő térfogatú edényt ugyanolyan gázzal töltünk meg. Az egyikbe m a másikba $2m$ tömegű került. Mindkettőt állandó térfogaton melegítjük. Ábrázoljuk egy grafikonon mindkét gáz nyomását a hőmérséklet függvényében!

15.42. Az ábrán dugattyúval hengerbe zárt levegő állandó nyomás melletti melegítése során készült $(V-T)$ diagram látható. A levegő lassú be- vagy kiáramlása lehetséges a dugattyú pontatlan illeszkedése miatt. A diagramról állapítsuk meg, hogy a hengerben levő levegő tömege növekedett vagy csökkent a melegítés során!



15.43. Két könnyen mozgó dugattyúval lezárt henger egyikében m tömegű, p nyomású, M molekulasúlyú, a másikban m tömegű, p nyomású és $2M$ molekulasúlyú gáz van. Mindkét gázt állandó nyomáson melegítjük. Vázoljuk fel egy ábrán mindkét gáz $V-T$ diagramját!

15.44. Egy 2 m³ térfogatú tartályban 4 kg tömegű, 29 °C hőmérsékletű oxigéngáz van. Határozzuk meg a gáz nyomását!

15.45. Egy 30 literes palackban 20 °C hőmérsékletű, $3\cdot10^5$ Pa nyomású nitrogén van. A szelepet kinyitva, majd visszazárva a bezárt gáz egy részét kiengedjük. Miután a bentmaradt gáz újra felvette a szoba 20 °C-os hőmérsékletét, a nyomásmérő csupán $2{,}4\cdot10^5$ Pa nyomást jelez. Hány gramm nitrogént engedtünk ki?

15.46. Két gramm egyatomos gáz 0 °C-on és $8\cdot10^5$ Pa nyomáson 1417 cm³ térfogatú. Melyik ez a gáz?

15.47. 110 liter térfogatú ballonban 0,8 kg hidrogén- és 1,6 kg oxigéngáz van. Mekkora a keverék nyomása, ha hőmérséklete 27 °C?

15.48. Számítsuk ki a normál állapotú levegő sűrűségét felhasználva, hogy a levegő tömegének 2/9 része oxigén 7/9 része nitrogéngáz!

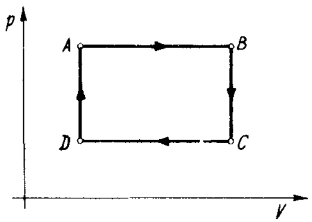
16. Hőtan II.

Bevezető feladatok

16.1. Mennyi hőmennyiséget kell közölnünk 3 kg vízzel, ha hőmérsékletét 20 °C-ról 50 °C-ra akarjuk növelni?

16.2. 20 °C hőmérsékletű, 40 gramm tömegű rézdarabot 200 gramm 80 °C-os vízbe helyezünk. Mennyi lesz a közös hőmérséklet? A réz fajhője $3{,}85 \cdot 10^{2}\ \frac{J}{kg\ °C}$.

16.3. Az ábrán ideális gázzal végzett *körfolyamat* látható. Mely szakaszokon történt hőfelvétel, és melyekben hőleadás? A felvett vagy a leadott hő volt több összesen az egész körfolyamat során?



16.4. Milyen magasra lehet felemelni 100 N súlyú terhet $4{,}1868 \cdot 10^{3}$ J munkával?

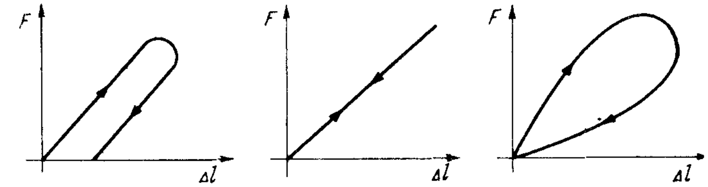
Gyakorló feladatok

16.5. Mitől melegedhet fel egy test?

16.6. Egy ejtőernyős kiugrik 2000 méter magasságban a vízszintes irányban repülő gépből. A repülőgép sebessége 100 m/s. Az ejtőernyős sebessége földet éréskor 5 m/s. Határozzuk meg a nehézségi erő és a súrlódási erő által végzett munka nagyságainak arányát!

16.7. Egy 20 m/s sebességgel mozgó test rugóba ütközik, és összenyomja a rugót. Ezután a rugó kitágul, és a testet visszalöki, de csak 15 m/s sebességgel.

a) Eredeti mozgási energiájának hányad részét veszítette el a test?
b) Az ábrán látható 3 grafikon közül melyik felel meg a feladat feltételeinek? A görbék a rugó által kifejtett F erő és a rugó Δl összenyomódása között feltételezett kapcsolatokat ábrázolják.



16.8. Két méter hosszú, 100 mm² keresztmetszetű vörösréz rudat szeretnénk egy mm-rel megnyújtani.
Mennyi energiát kell közölni ehhez
a) hőközléssel,
b) nyújtási munkavégzéssel?
(A szükséges adatokat a táblázatból kell kikeresni!)

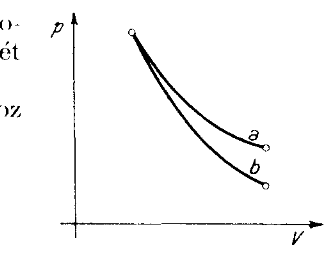
16.9. Egy réztömb 40 méter magasból egy hőszigetelő lapra esik. Hány fokkal lesz melegebb? A réz fajhője $3{,}85 \cdot 10^{2}\ \frac{J}{kg\ °C}$.

16.10. Egy 2 kg tömegű, $1{,}76 \cdot 10^{3}\ \frac{J}{kg\ °C}$ fajhőjű folyadékba merülő elektromos melegítő 15 perc alatt növeli a folyadék hőmérsékletét 10 °C-kal. Legalább hány watt a melegítő teljesítménye?

16.11. *a)* Igaz-e, hogy súrlódáskor, valamint egy gáz adiabatikus összenyomásakor „hő keletkezik"?

b) Igaz-e, hogy a gáz izotermikus összenyomása közben nincs hőcsere a gáz és környezete között?

16.12. A diagram ugyanazon gáznak egy izotermikus és egy adiabatikus kiterjedését ábrázolja.
Melyik görbe melyik állapotváltozáshoz tartozik?



16.13. Egy kg oxigéngázt adiabatikusan összenyomunk, ennek következtében hőmérséklete 20 °C-ról 500 °C-ra nő. Számítsuk ki
a) a gáz belső energiájának változását,
b) a gáz összenyomására fordított munkát.
Az oxigéngáz állandó térfogaton mért fajhője

$$c_v = 6{,}53 \cdot 10^2 \frac{\text{J}}{\text{kg °C}}.$$

16.14. Bizonyos mennyiségű ideális gáz állandó nyomáson kétszeres térfogatra tágul, majd állandó térfogaton nyomását felére csökkentjük. Egy másik esetben először nyomását csökkentjük felére állandó térfogat mellett, majd a nyomást állandónak tartva térfogatát kétszeresére növeljük.
a) Ha ugyanabból a kezdeti állapotból indultunk ki mindkét esetben, mit mondhatunk a végállapotokról?
b) Melyik esetben végzett a gáz több munkát?
c) Melyik esetben végeztünk a gázon több munkát?

16.15. 1 kg tömegű −32 °C hőmérsékletű jéggel 250 $\cdot 4{,}1868 \cdot 10^3$ J hőt közlünk állandó, $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson. Mi történik? Ábrázoljuk a hőmérséklet-változást a felvett hő függvényében!

16.16. Egy gramm 100 °C-os vízgőzt vezetünk 1 gramm 0 °C-os jégre.
a) Mi lesz a végállapot hőmérséklete?
b) Mennyi víz keletkezik?

Házi feladatok

16.17. Fejezzük ki SI-egységben a következőket:
a) a víz fajhője $1 \dfrac{\text{kcal}}{\text{kg°C}}$;
b) a víz fagyáshője 0 °C-on $80 \dfrac{\text{kcal}}{\text{kg}}$;
c) a víz párolgáshője 1 atm nyomáson $540 \dfrac{\text{kcal}}{\text{kg}}$;
d) a jég fajhője $0{,}5 \dfrac{\text{kcal}}{\text{kg°C}}$.

16.18. Mitől olvadhat fel egy test?

16.19. Egy 80 méter magasból leejtett 10 kg tömegű test 32 m/s sebességgel ért földet. Mennyi munkát végzett a közegellenállás?

16.20. 0,05 kg tömegű rézlap konstans sebességgel 8 métert csúszik egy 30°-os lejtőn. Feltételezve, hogy a lejtő tökéletes hőszigetelő, mennyivel emelkedik a rézlap hőmérséklete? A réz fajhője $3{,}85 \cdot 10^2 \dfrac{\text{J}}{\text{kg °C}}$.

16.21. Legalább hány wattos merülőforralóval lehet 2,5 dl 20 °C-os vizet 5 perc alatt forrásba hozni?

16.22. V_1 térfogatú ideális gáz V_2 térfogatra tágul
1. állandó nyomáson;
2. állandó hőmérsékleten;
3. adiabatikusan.
a) Ábrázoljuk a folyamatokat a $(p-V)$ diagramon!
b) Melyik folyamat esetén végzi a gáz a legkevesebb munkát?
c) Milyen előjelű a belső energia változása az egyes folyamatoknál?

16.23. 1,6 kg tömegű, $4 \cdot 10^5$ N/m² nyomású, kezdetben 17 °C hőmérsékletű oxigént melegítünk állandó nyomáson. Mekkora a végső hőmérséklet, ha a gáz által tágulás közben végzett munka $4 \cdot 10^4$ joule?

16.24. Dugattyúval ellátott hengeres edényben levő gázzal sorrendben a következő állapotváltozásokat végeztük:
1. állandó térfogaton növeltük a nyomást;
2. állandó nyomáson növeltük a térfogatot;
3. állandó hőmérsékleten növeltük a térfogatot;
4. állandó nyomáson visszavittük a kezdeti állapotba.
Ábrázoljuk a $p-V$ síkon a gáz állapotváltozásait, és vizsgáljuk meg, hogy az állapotváltozások során történt-e hőfelvétel, illetve hőleadás!

16.25. Mennyi 300 °C-os rezet kell 0,4 kg 30 °C-os olajba tenni ahhoz, hogy 40 °C közös hőmérséklet alakuljon ki? A réz fajhője $3{,}85 \cdot 10^2 \dfrac{\text{J}}{\text{kg °C}}$, az olaj fajhője $2{,}72 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg °C}}$.

16.26. Kaloriméterbe, amely 250 g tömegű és 15 °C hőmérsékletű vizet tartalmaz, 20 g vizes havat dobunk. A hőmérséklet a kaloriméterben ennek következtében 5 °C-kal csökken. Mennyi vizet tartalmazott a hó?

16.27. Normál légköri nyomáson a cseppfolyós hélium 4,2 K hőmérsékleten forr. Párolgási hője $1{,}67 \cdot 10^4 \frac{J}{kg}$. Milyen állandó teljesítménnyel lehet elgőzölögtetni óránként 1 kg 4,2 K-es héliumot?

16.28. A háziasszony az elektromos vízmelegítőbe 20 °C-os vizet öntött, és a melegítőt bekapcsolta. A víz hőmérséklete 20 perc alatt forráspontig emelkedett („felforrt").
Ekkor megérkezett a háziasszony barátnője, aki elhívta őt. A háziasszony egy óra múlva tért vissza. Talált-e vizet a vízmelegítőben? A melegítés hatásfokát és a melegítő által felvett teljesítményt tekintsük állandónak.

Ajánlott feladatok

16.29. Egy termodinamikai gépben a körfolyamatot végző anyag legalacsonyabb hőmérséklete 27 °C; a legmagasabb hőmérséklete 227 °C.
a) Ha ez a gép hőerőgép, legfeljebb mekkora lehet a termodinamikai hatásfoka?
b) Ha ez a gép hűtőgép, legfeljebb mennyi lehet a termodinamikai jósági tényezője?

16.30. Egy hűtőgép a hálózatból 1 kW teljesítményt vesz fel, s a hűtendő térből percenként $6 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3$ J hőt von el. Milyen teljesítménnyel fűti azt a helyiséget ahol áll?

16.31. 1 MW névleges teljesítményű villamos generátor 95% hatásfokkal működik. A generátort levegő hűti, melynek hőmérséklete 20 °C. A hűtőn másodpercenként átáramló levegő tömege 1,5 kg. Ebben a folyamatban a levegő fajhője 600 $\frac{J}{kg\ °C}$. Milyen hőmérsékletű levegő áramlik ki a hűtőből?

16.32. Egy olajtüzelésű mozdony 735,5 kW átlagos hasznos teljesítménnyel dolgozik. Hány liter nyersolajat fogyaszt óránként, ha az égéskor felszabaduló energiának csak 15%-át hasznosítja? (A nyersolaj fűtőértéke4, $61 \cdot 10^7$ J/kg; sűrűsége $8{,}5 \cdot 10^2$ kg/m³).

16.33. Egy hőmérőt, melynek hőkapacitása 33,49 J/°C és 25,00 °C hőmérsékletet mutat, belehelyezünk egy 4186,8 J/°C hőkapacitású és 40,00 °C hőmérsékletű folyadékba. A termikus egyensúly beálIta után milyen hőmérséklet olvasható le a hőmérőről?

16.34. Nyolc termoszban a következő – egyaránt 10 °C hőmérsékletű – folyadékokat helyezünk el:

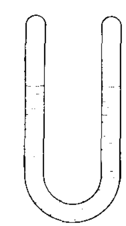
1. 0,15 kg víz;	*5.* 0,15 liter higany;
2. 0,30 kg víz;	*6.* 0,30 liter higany;
3. 0,15 kg higany;	*7.* 0,15 liter víz;
4. 0,30 kg higany;	*8.* 0,30 liter víz.

Valamennyire ráöntünk másfél-másfél deci 70 °C-os vizet.
Határozzuk meg a kialakuló közös hőmérsékleteket!
A higany sűrűsége 13,6-szerese a víz sűrűségének, fajhője harmincad része a víz fajhőjének. A sűrűség és a fajhő hőmérsékletfüggését elhanyagolhatjuk.

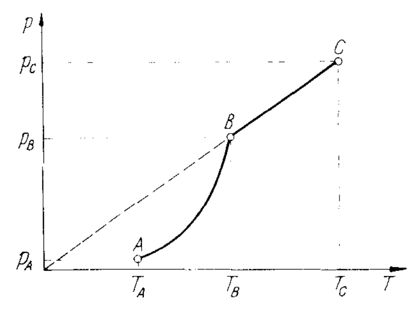
16.35. Kaloriméterben egy folyadék két különböző hőmérsékletű rétegben helyezkedik el. Alul a hidegebb, felül a melegebb. Megváltozik-e az egész folyadék térfogata, miközben a hőmérsékletek kiegyenlítődnek?

16.36. Három különböző folyadékot keverünk össze kaloriméterben. Tömegeik m_1; m_2; m_3; fajhőik c_1; c_2; c_3; hőmérsékleteik t_1; t_2; t_3. Mi lesz a közös hőmérséklet?

16.37. Az ábrán látható zárt cső mindkét ágában víz van. Hogyan lehet eldönteni, hogy a víz felett levegő vagy csak vízpára van?



16.38. A diagramon egy zárt térben levő gőz nyomásának hőmérséklettől való függése látható. Az ábra alapján mit lehet mondani az edényben lejátszódó párolgás folyamatáról?



16.39. Párologhat-e a szilárd test?

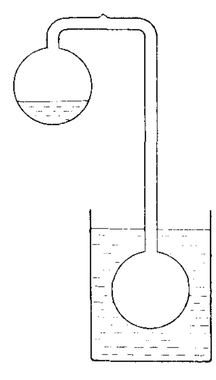
16.40. Mennyi 100 °C hőmérsékletű vízgőz felhasználásával melegíthetjük 80 °C hőmérsékletre, 15 kg víz és 5 kg jég 0 °C hőmérsékletű keverékét? (A jég olvadáshője $3{,}35\cdot10^5$ J/kg, a víz forráshője $2{,}26\cdot10^6$ J/kg).

16.41. Mi az, ami nagyobb tömegű (mi „nehezebb") egy köbméter 100 °C-os telített vízgőz, vagy egy köbméter 100 °C-os, $1{,}01\cdot10^5$ Pa nyomású levegő?

16.42. Egy $A = 0{,}01$ m^2 keresztmetszetű és $m = 5$ kg tömegű dugattyúval ellátott függőleges hengert ideális gáz tölt ki. A gáz kezdetben $V_0 = 25$ m^3 térfogatú, kezdeti hőmérséklete $t_0 = 0$ °C. A külső légköri nyomás $p_0 = 10^5$ N/m^2. Lassú melegítéssel a hőmérsékletet $t = 20$ °C-ra emeljük. Feltéve, hogy a dugattyú szabadon, súrlódásmentesen mozoghat s a lassú melegítés miatt a dugattyú sebessége, mozgási energiája elhanyagolható, mennyi hőt kell közölni a gázzal? Rögzített dugattyú esetén a gáz hőkapacitása: $c_v m = 14\,000$ joule/fok.

16.43. Könnyen mozgó, súlytalan dugattyúval elzárt tartályban 27 °C hőmérsékletű, $m = 0{,}5$ kg tömegű héliumgáz van. Nyomása $1{,}01\cdot10^5$ Pa. A gázzal $Q = 4{,}19\cdot10^5$ J hőt közlünk állandó nyomáson. Hőmérséklete 187 °C-ra emelkedik. Mennyi munkát végez a táguló gáz, és mekkora belső energiájának megváltozása?

16.44. Egy gramm 100 °C hőmérsékletű víz elpárolgásához $2{,}26\cdot10^3$ J hőre van szükség. Felhasználva, hogy a 100 °C-os vízgőz sűrűsége $6\cdot10^{-4}$ g/cm^3, határozzuk meg, hogy a közölt hő hányad része fordítódik a belső energia növelésére és hányad része az $1{,}01\cdot10^5$ Pa légköri nyomás ellen végzett tágulási munkára!



16.45. Az ábrán két üveggömbből és azokat összekötő üvegcsőből álló berendezés látható. A berendezésből a levegőt kiszivattyúzták, majd miután vizet töltöttek bele, beforrasztották. Ha a vizet teljes egészében a felső gömbbe öntjük, és az alsót folyékony levegőbe helyezzük, bizonyos idő elteltével a víz a felső gömbben megfagy. Magyarázzuk meg a jelenséget!

17. Elektrosztatika

Bevezető feladatok

17.1. Mekkora töltés taszítja a vele egyenlő nagyságú töltést 1 métertől 10^{-3} N erővel?

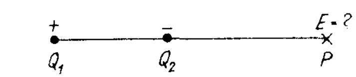
17.2. Mekkora az elektromos térerősség a pontszerű 10^{-5} C pozitív töltéstől 1 m távolságban, vákuumban? Milyen felületen vannak azok a pontok, amelyekben a térerősség ugyanakkora? Milyen irányú a térerősség?

17.3. Mekkora töltés tölti fel a 16 μF-os kondenzátort 350 V feszültségre?

Gyakorló feladatok

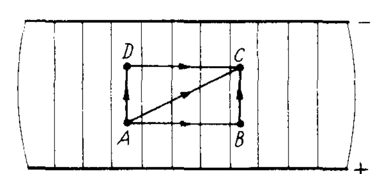
17.4. Két pozitív, pontszerű töltés, Q és $4Q$, egymástól l távolságban van rögzítve. Hol kell elhelyezni egy pontszerű Q töltést, hogy egyensúlyban legyen?

17.5. Két pontszerű töltés egymástól 0,5 m távolságban van rögzítve. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a töltések összekötő egyenesében, a negatív töltéstől 2 m távolságban jobbra? ($Q_1 = 2\cdot10^{-6}$ C; $Q_2 = -2\cdot10^{-6}$ C.)



17.6. Homogén elektrosztatikus tér pontjaiban a térerősség 10^5 V/m. Mekkora erő hat a térben levő $2\cdot10^{-8}$ C töltésű kicsi fémgolyóra? Mennyi a golyó gyorsulása, ha tömege 5 g?

17.7. Síkkondenzátor homogén elektromos terében a térerősség 1000 N/C. Az ábra szerinti elrendezés esetén, az AD és BC szakaszok 1 cm hosszúságúak.



a) Mennyi munkát végeznek az elektromos erők, ha $5 \cdot 10^{-6}$ C pozitív töltés az *A* pontból a *C* pontba: az *ABC*; vagy az *ADC*; vagy közvetlenül az *AC* úton mozdul el?
b) Mennyivel kisebb a *B*; *C*; *D*; pontban a potenciál, mint az *A* pontban?
c) Mennyi a kondenzátor lemezei között a feszültség, ha a lemezek távolsága 3 cm?

17.8. Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, homogén elektrosztatikus térben, *s* úton az eredetileg nyugvó elektromos részecske? ($m = 10^{-6}$ g; $Q = 10^{-7}$ C; $E = 10^{4}$ V/m; $s = 10$ cm.)

17.9. Feltöltött fémgolyó homogén elektrosztatikus térben felgyorsulva E_k mozgási energiára tesz szert. Mekkora mozgási energiához jutna, ha felgyorsulás közben félúton centrálisan és tökéletesen rugalmasan ütközne egy egyébként ugyanilyen, de töltetlen és nyugalomban levő másik fémgolyóval?

17.10. Mekkora a térerősség és a potenciál egy tömör, töltött fémgömb belsejében?

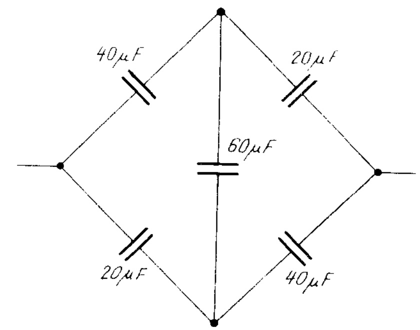
17.11. Fémből készült, töltetlen gömbhéj középpontjában $+Q$ pontszerű töltés helyezkedik el.
a) Hogyan helyezkednek el a megosztott töltések a gömbhéjon?
b) Rajzoljuk meg vázlatosan az erővonalakat a gömbön belül és kívül!
c) Hat-e erő a gömbön kívül levő töltésre?
d) A gömböt leföldelve, hogyan változik meg a töltések eloszlása?

17.12. Két (nem pontszerű) fémgolyó között fellépő elektromos kölcsönhatás nagyobb, ha ellentétesen töltjük fel őket, mint azonos előjelű, ugyanolyan mértékű feltöltés esetén. Hogyan lehetséges ez?

17.13. Sorosan kapcsolunk egy 4 μF-os és egy 6 μF-os kondenzátort. Mekkora töltéstől töltődik fel a rendszer 220 V-ra?

17.14. Két azonos kapacitású kondenzátor egyikét feltöltjük 100 V-ra, a másikat 200 V-ra. Ezután párhuzamosan kötjük őket:
a) azonos pólusaikkal;
b) ellentétes pólusaikkal.
Mekkora lesz a kondenzátorok feszültsége?

15. Számítsuk ki az ábra szerint összekapcsolt kondenzátorok eredő kapacitását!



16. Egy *C* kapacitású kondenzátorra *Q* töltést visznek, majd lekapcsolják a telepről. Hogyan változik a kondenzátor elektrosztatikus energiája, ha lemezeit távolítják egymástól?

17. Síkkondenzátor sarkait akkumulátorra kötjük. Ha a fegyverzeteket távolítjuk egymástól, munkát kell végezni, mert a lemezek vonzóerővel hatnak egymásra. Mi történik a kondenzátor energiájával?

18. Mire fordítódik a kondenzátor lemezeinek távolításához szükséges munka a *17.17.* feladatban vázolt körülmények között?

19. Két ellentétesen feltöltött gömb áll egymástól meghatározott távolságban. Hogyan változik meg az egyes gömbökre ható erő, ha közéjük egy szigetelőrudat helyezünk?

Házi feladatok

20. Egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban azonos előjelű és nagyságú *Q* töltés helyezkedik el. Mekkora és milyen előjelű töltés van a háromszög szimmetriacentrumában, ha mind a négy töltés egyensúlyban van?

21. Négyzet csúcsaiban egyenlő *Q* pontszerű töltések helyezkednek el. Mekkora és milyen előjelű töltés van a négyzet átlóinak metszéspontjában, ha az egész rendszer egyensúlyban van?

22. Két egynemű ponttöltés 25 cm távolságra van egymástól. A töltések értéke $Q_1 = 10^{-8}$ C és $Q_2 = 15 \cdot 10^{-9}$ C. Van-e olyan pont, ahol a térerősség zérus?

17.23. Két pontszerű töltés egymástól 0,5 m távolságban van rögzítve. Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a töltéseket összekötő egyenesszakasz felező merőlegesén, a szakasztól 1 méter távolságban? ($Q_1 = 2\cdot10^{-6}$ C; $Q_2 = -2\cdot10^{-6}$ C.)

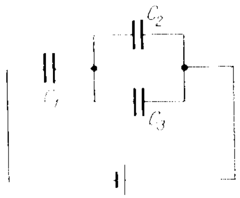
17.24. Mekkora sebességre gyorsul fel vákuumban, $U = 500$ V feszültség hatására az $m = 10^{-5}$ g tömegű, $Q = 10^{-8}$ C elektromos töltésű, eredetileg nyugvó részecske?

17.25. Mennyi annak a kondenzátornak a kapacitása, amelyet $2{,}5\cdot10^{-8}$ C töltés 20 V feszültségre tölt fel?

17.26. Mekkora eredő kapacitást kapunk, ha 2 μF és 3 μF kapacitású kondenzátort
a) sorba,
b) párhuzamosan kapcsolunk?

17.27. Két sorba kötött kondenzátorra, amelyek kapacitása $C_1 = 2$ μF és $C_2 = 4$ μF; 120 V feszültséget kapcsolunk. Mekkora az egyes kondenzátorokra jutó feszültség?

17.28. Három kondenzátort az ábra szerint rákapcsolunk egy $U = 12$ V feszültségű telepre. Mekkora az egyes kondenzátorokon levő töltés? ($C_1 = 1$ μF; $C_2 = 2$ μF; $C_3 = 3$ μF.)



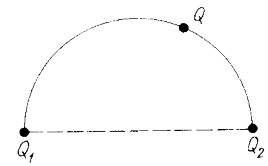
17.29. Milyen határok között változtathatjuk az eredő kapacitást, ha 400 pF-os kondenzátorral egy olyan forgókondenzátort kapcsolunk;
a) párhuzamosan;
b) sorosan,
melynek saját kapacitása 100 pF-tól 500 pF-ig terjed?

17.30. Ismeretlen kapacitású, 80 V-ra feltöltött kondenzátor sarkait összekapcsoljuk egy 16 V-ra feltöltött, 60 μF kapacitású kondenzátor sarkaival. Határozzuk meg az ismeretlen kapacitást, ha az összekapcsolás után a kondenzátorok közös feszültsége 20 V; és összekötéskor az
a) egyező pólusokat;
b) ellentétes pólusokat kapcsoltuk össze!

Ajánlott feladatok

17.31. Egymástól l távolságban van rögzítve egy pontszerű negatív $-2Q$ és egy pontszerű pozitív Q töltés. A töltéseket összekötő egyenes mely pontjában lesz egyensúlyban egy harmadik pontszerű pozitív Q' töltés? Milyen jellegű ebben a pontban az egyensúly, ha a harmadik töltés csak a töltéseket összekötő egyenes mentén mozdulhat el?

17.32. 10 cm sugarú félkör átmérőjének végpontjaiban $2\cdot10^{-8}$ C és 10^{-8} C nagyságú pontszerű töltések vannak. A félkörön súrlódásmentesen csúszhat egy pontszerű pozitív töltés. Hol lesz egyensúlyi helyzetben? Milyen jellegű ez az egyensúlyi helyzet?



17.33. Két kis méretű vezetőgömb egy pontban felfüggesztett két hosszú szigetelőfonálon lóg. A gömbök egyenlő mennyiségű, azonos előjelű töltéseik hatására egymástól d távolságra eltávolodnak. Az egyik gömbről a töltést elvezetjük. Mi történik ezután?

17.34. Négy, egyenként $Q = \frac{1}{3}\cdot10^{-9}$ C nagyságú, egynemű pontszerű töltés úgy van rögzítve, hogy bármelyik kettő egymástól való távolsága $a = 5$ cm. Mekkora és milyen irányú erővel hat valamely.kre a többi három? Mi történik, ha a rögzítéseket egyszerre feloldjuk?

17.35. Derékszögű háromszög csúcsaiban $+10^{-9}$ C nagyságú pontszerű töltések vannak. A háromszög befogói 40 cm és 30 cm. Mekkora az elektromos térerősség az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasságvonal metszéspontjában?

17.36. Kifeszítetlen, függőleges rugóra, melynek végei kezdetben rögzítettek, egy Q pozitív töltéssel rendelkező m tömegű golyót függesztenek. A golyó E térerősségű homogén elektrosztatikus térben van. (A térerősség függőlegesen lefelé irányul.) Ezután a rugó töltés felőli végét elengedik. Határozzuk meg a golyó új egyensúlyi helyzetét, és számítsuk ki az új egyensúlyi helyzetbe való átmenet során fellépő energiaváltozást! Magyarázzuk meg a kapott eredményt!

18. Egyenáram I.

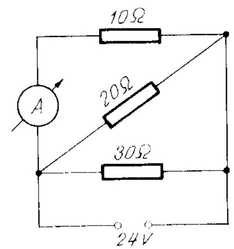
Bevezető feladatok

18.1. Zseblámpaizzó üzemi ellenállása 12 ohm. Milyen erős áram megy át rajta 4,5 V feszültség hatására?

18.2. Mekkora az áram erőssége működés közben abban az izzólámpában, amelyen 60 W és 110 V felírás olvasható?

18.3. Mekkora lesz az eredő ellenállás, ha 16 ohm és 24 ohm ellenállásokat
a) sorosan, majd
b) párhuzamosan kapcsolunk?

18.4. Mekkora áramerősséget jelez a műszer az ábra szerinti kapcsolásban? (A műszer belső ellenállása elhanyagolható.)



Gyakorló feladatok

18.5. Egy 220 V-os feszültségre készült izzót 110 V-ra kapcsolunk. Hány százalékkal változik meg a teljesítmény a névleges teljesítményhez viszonyítva, ha az izzó ellenállásának változásától eltekintünk?

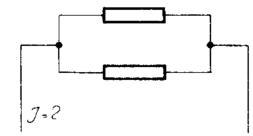
18.6. A 100 W-os vagy a 60 W-os izzólámpa ellenállása nagyobb, ha ugyanakkora feszültségre készültek?

18.7. Mekkora az ellenállása a 2,4 mm átmérőjű, 30 m hosszú vörösréz huzalnak? $\left(\text{A fajlagos ellenállás } 0{,}017\ \dfrac{\text{ohm mm}^2}{\text{m}}.\right)$

18.8. Feszültségforrásra sorosan kötött ellenállások közül az egyik ellenállást megváltoztatjuk. Változnak-e a részfeszültségek?

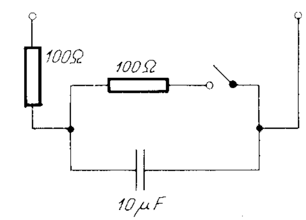
18.9. Két ellenállás közül az egyik 40 000 ohmos és 4 W névleges teljesítményű, a másik 10 000 ohmos és ugyancsak 4 W-os. Mekkora feszültséget kapcsolhatunk a rendszer sarkaira, ha a két ellenállást sorba kötjük?

18.10. Az ábrán látható kapcsolásban az egyik ellenállás 10 000 ohm és 4 W-ra terhelhető, a másik 3000 ohm és névleges teljesítménye 7,5 W. Mekkora áram folyhat át a rendszeren?

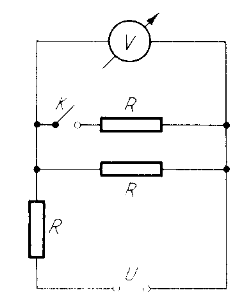


18.11. Egy $C = 10\ \mu F$ kapacitású kondenzátort $U = 200$ V egyenfeszültségű áramforrás sarkaihoz kapcsolunk. Mi történik? Mekkora lesz a kondenzátor feszültsége, töltése, energiája?

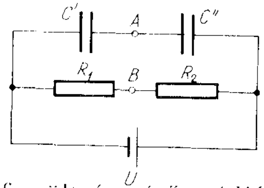
18.12. Elhanyagolható belső ellenállású, 100 V elektromotoros erejű telepet kapcsolunk az ábrán látható hálózatra.
a) Számítsuk ki a kondenzátor energiáját a kapcsoló zárt és nyitott állása esetén!
b) Számítsuk ki a telep által állandóan leadott teljesítményt a kapcsoló zárt és nyitott állása esetén!



18.13. Az ábrán látható (igen nagy belső ellenállású) feszültségmérő a K kapcsoló zárása után 50 V-tal kisebb feszültséget jelez, mint a kapcsoló nyitott állása esetén. Mekkora a telep feszültsége, ha a telep belső ellenállása elhanyagolható? Mekkora a telep által leadott teljesítmény a kapcsoló nyitott, illetve zárt állása esetén?
($R = 25$ ohm.)

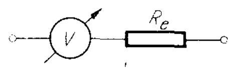


18.14. Határozzuk meg az A és B pontok közötti feszültséget az ábrán látható kapcsolásban, ha az U feszültségű, egyenáramú áramforrás belső ellenállása elhanyagolható!

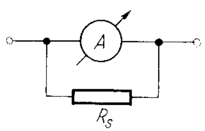


18.15. Mi történik, ha tévedésből az árammérőt feszültségmérő módjára, vagy a feszültségmérőt árammérő módjára kapcsoljuk?

18.16. Az 5 V méréshatárú (végkitérésű), 800 ohm ellenállású feszültségmérővel sorbakapcsolunk egy $R_e = 15\,200$ ohmos előtét-ellenállást. Most meddig mérhetünk feszültséget az eszközzel?



18.17. A 2 amper méréshatárú (végkitérésű), 0,1 ohm ellenállású áramerősség-mérővel párhuzamosan kapcsolunk egy $R_s = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ ohm ellenállású söntöt. Most meddig mérhetünk áramerősséget eszközünkkel?



Házi feladatok

18.18. Hány százalékkal változik az állandó ellenállású fogyasztó teljesítménye, ha a hálózati feszültség ± 10 százalékkal ingadozik?

18.19. Mi lesz a következménye annak, ha a villanyfőzőben levő melegítő ellenálláshuzalt megrövidítjük?

18.20. Mekkorára kell választanunk a rézhuzal keresztmetszetét, hogy a feszültség 1 kilométer hosszú huzalon, 1 A áramerősség esetén se legyen nagyobb, mint 10 V?

$$\left(\text{A réz fajlagos ellenállása } \varrho = 0{,}018\,\frac{\Omega\ \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}.\right)$$

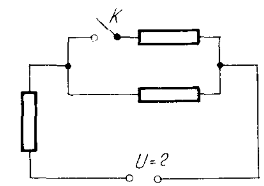
18.21. Három egyenlő hosszúságú, azonos anyagú, 1 mm², 2 mm² és 3 mm² keresztmetszetű huzalból készült, sorba kapcsolt ellenállást 220 V-os feszültségforrásra kötünk. Határozzuk meg az egyes huzaldarabokra jutó feszültséget!

18.22. Sorbakapcsolt, 300 ohm és 200 ohm ellenállású fogyasztókra 200 V feszültséget kapcsolunk. Mennyi a feszültség az egyes ellenállásokon?

18.23. Egy 110 V-os, 100 W-os és egy 110 V-os, 40 W-os izzólámpát sorbakötve 220 V-ra kapcsolunk. Melyik izzó ég ki?

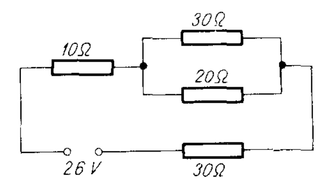
18.24. Két azonos anyagú huzalt iktatunk párhuzamosan egy áramkörbe. A huzalok egyike 25 ohm ellenállású, keresztmetszete 1 mm². Ez a huzal 10^{-6} W teljesítményt vesz fel. A másik huzal hossza az előbbinek tízszerese, ellenállása pedig 100 ohm. Mennyi áram folyik át e huzal keresztmetszetének 1 mm²-es részén?

18.25. Az ábrán látható áramkörben minden ellenállás 10 ohmos. Mekkora az áramkör ellenállása nyitott, illetve zárt kapcsoló esetén? Mekkora a kapocsfeszültség, ha a kapcsoló zárása után az áramkör teljesítménye 15 W-ot változik? (A kapocsfeszültség a terheléstől független.)

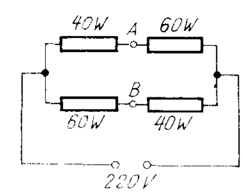


18.26. A 220 V-os hálózatra 110 V-os 60 W-os, 40 W-os és 25 W-os izzókat akarunk kötni. Milyen kapcsolásban köthetjük az izzókat az áramforrásra, hogy „teljes fénnyel" világítsanak, és egyik izzólámpa se menjen tönkre?

18.27. Mennyi a 20 ohmos ellenálláson az elektromos teljesítmény az ábra szerinti kapcsolásban?



18.28. Négy db ellenállást az ábra szerint kapcsoltunk 220 V-ra. Mennyi az A és B pontok közötti feszültség? Mi történik, ha az A és B pontokat rövidre zárjuk?



18.29. Feszültségmérő méréshatára 5 V, ellenállása 800 ohm. Mekkora előtét-ellenállást kell sorbakapcsolnunk vele, hogy 500 V-ig mérhessünk feszültséget?

18.30. A 2 A méréshatárú, 10^{-1} ohm ellenállású áramerősség-mérővel párhuzamosan kapcsolt söntnek mekkora legyen az ellenállása, hogy a műszerrel 50 A-ig mérhessünk áramerősséget?

18.31. A merülőforralót csak akkor célszerű bekapcsolni, amikor már vízbe merítettük. Miért?

Ajánlott feladatok

18.32. Mennyivel csökken a 12 V-os akkumulátor elektromos energiája, ha a rákapcsolt 12 V-os és 25 W-os izzó 10 órán át világít?

18.33. A 4,5 V-os zseblámpatelep a 0,3 A áramfelvételű izzót 8 órán át képes izzítani. Mennyi energiát tudna szolgáltatni a telep, ha feszültsége a használat közben nem változna?

18.34. Két körkeresztmetszetű, egyenlő hosszú és azonos anyagú vezető ellenállásának aránya 1:2. Melyik vezető nehezebb és hányszor?

18.35. Szénszálat és ugyanolyan vastag vashuzalt sorosan kapcsolunk. Hosszaik milyen arányánál lesz független az eredő ellenállás a hőmérséklettől?
(A szén és a vas ellenállásának hőmérsékleti tényezője: $\alpha_1 = -0{,}8\cdot 10^{-3}$ °C^{-1}; $\alpha_2 = 6\cdot 10^{-3}$ °C^{-1}; a 0 °C hőmérséklethez tartozó fajlagos ellenállások: $\varrho_1 = 40\,\frac{\text{ohm}\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$;
$\varrho_2 = 1{,}2\cdot 10^{-1}\,\frac{\text{ohm}\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$.)

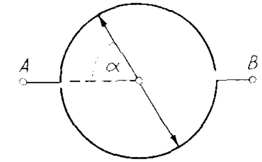
18.36. Egy 110 V-os, 25 W-os izzólámpa kevesebb áramot fogyaszt, mint 3,5 V-os, 0,3 A-t fogyasztó zseblámpaizzó. Miért ad mégis erősebb fényt?

18.37. Hogyan szereljük össze egy folyosó egylámpás megvilágításának kapcsolását úgy, hogy a folyosó bármelyik végén belépő személy a folyosó közepén függő lámpát bekapcsolhassa függetlenül attól, hogy milyen állású a folyosó másik végén a kapcsoló?

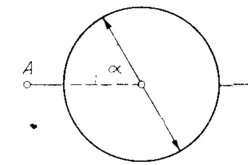
18.38. Iskolai színpad világítását egy 36 izzólámpából álló füzérrel oldották meg. Mindegyik izzó 6 V feszültségre készült, és az összes sorosan volt kapcsolva a 220 V feszültségű hálózatra. Az egyik izzó kiégett, és tartalék nem volt kéznél. Ekkor az egyik tanuló a hibás izzót rövidre zárta. Hogyan változott meg ekkor a színpad világítása az eredetihez viszonyítva? Helyesen járt-e el a diák?

18.39. Mikor kapunk több fényt: ha két azonos izzólámpát ugyanarra a feszültségre sorosan vagy párhuzamosan kapcsolunk?

18.40. Az ábrán látható félkör alakú ellenállások mindegyike R = 100 ohm nagyságú. Hogyan függ az A és B pontok közötti ellenállás a rövidre záró csúszka α szögétől?



18.41. Az ábrán látható kör alakú ellenállás félkörívének ellenállása R = 360 ohm nagyságú. Hogyan függ az A és B pontok közötti ellenállás a rövidre záró csúszka α szögétől?

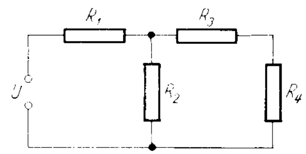


18.42. A 220 V feszültségű áramforrástól 100 méterre levő helyen három, egyenként 220 V-ra méretezett, 200 W-os fogyasztót működtetünk. Az odavezető alumínium huzal átmérője 2 mm, fajlagos ellenállása $0{,}029\,\frac{\text{ohm}\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$.

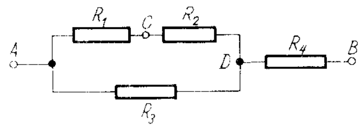
Mekkora a párhuzamosan kapcsolt fogyasztók sarkain a feszültség? Hogyan változik ez a kapocsfeszültség, ha a fogyasztók számát növeljük?

18.43. Két ismeretlen nagyságú ellenállást sorosan kötünk, majd ezt a rendszert 120 V feszültségre kapcsoljuk. Az áramerősség 3 A. Ha párhuzamosan kötve kapcsoljuk az ellenállásokat 120 V-ra, akkor az áramerősség 16 A. Mekkorák az egyes ellenállások?

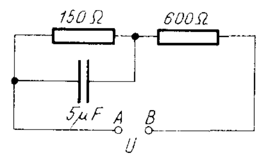
18.44. Mekkora az ábra szerinti kapcsolásban a telep kapocsfeszültsége, ha az R_4 ellenállás által felvett teljesítmény 40 W? (R_1 = 10 ohm, R_2 = 40 ohm, R_3 = 20 ohm, R_4 = 10 ohm.)



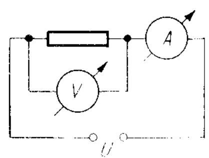
18.45. Az ábra szerinti kapcsolásban az A és B pontok között a feszültség 240 V. Mekkora a feszültség a C és D pontok között? Mekkora az egyes ellenállásokon az áramerősség? (R_1 = R_3 = 50 ohm, R_2 = 150 ohm, R_4 = 80 ohm.)



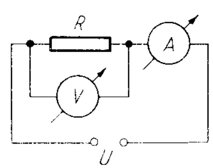
18.46. Az ábra szerinti kapcsolásban az AB pontokra 225 V feszültséget kapcsolunk. Mekkora a töltés a kondenzátoron?



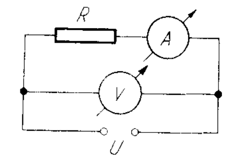
18.47. R = 40 ohm nagyságú ellenállást U = 3 V-os feszültségforrásra kapcsolunk, és üzemi adatait a rajz szerinti kapcsolásban 10 ohm ellenállású áramerősségmérővel és 800 ohm ellenállású feszültségmérővel mérjük. Mennyit mutatnak a műszerek?



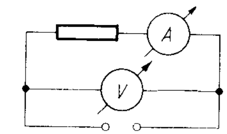
18.48. Meg akarjuk határozni, hogy egy 3 V-ra kapcsolt ellenállás hány ampert vesz fel. Az ábra szerinti kapcsolásban a 10 ohm ellenállású áramerősségmérővel és a 800 ohm ellenállású feszültségmérővel 0,117 A áramerősséget és 1,83 V feszültséget mérünk. Mennyi volna az áramerősség, ha műszerek nélkül kapcsolnánk az ellenállást a feszültségforrásra?



18.49. Az R = 40 ohmos ellenállást U = 3 V feszültségre kapcsoljuk, és üzemi adatait az ábra szerinti kapcsolásban 10 ohm ellenállású árammérővel és 800 ohm ellenállású feszültségmérővel mérjük. Mennyit mutatnak a műszerek?



18.50. Az ábra szerinti kapcsolásban ellenállást mérünk. A 10 ohm ellenállású áramerősségmérő és a 800 ohm ellenállású feszültségmérő 0,18 A áramerősséget illetve 3 V feszültséget mutat. Mekkora az ismeretlen ellenállás?



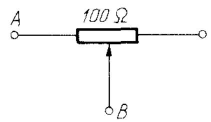
18.51. Az 50 mV végkitérésű, 20 kiloohm belső ellenállású feszültségmérővel 100 V-ig akarunk feszültséget mérni. Milyen védőellenállást alkalmazzunk? Mekkora a mért feszültség, amikor a műszer mutatója 30 mV-nak megfelelő skálaosztásnál állapodik meg?

18.52. A 10 mA végkitérésű, 10^{-2} ohm belső ellenállású áramerősségmérővel 2 A-ig akarunk áramerősséget mérni. Milyen védőellenállást alkalmazzunk? Mekkora a mért áramerősség, amikor a műszer mutatója a 3 mA-nek megfelelő skálaosztásnál állapodik meg?

19. Egyenáram II.

Bevezető feladatok

19.1. A csúszó érintkezők eltolásával az A és B pontok közötti ellenállás változtatható.



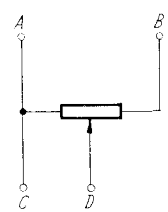
a) Milyen határok között lehet az ellenállást változtatni, ha a csúszka az ellenállás végei között bárhová beállítható?

b) Az A és B pontokra 100 V feszültséget kapcsolva, milyen határok között változtathatjuk az A és B pontok közötti áramerősséget?

19.2. Egy elemre, amelynek elektromotoros ereje 2 V és belső ellenállása 5 ohm, 15 ohm ellenállású fogyasztót kapcsolunk. Mekkora az áramerősség és kapocsfeszültség?

Gyakorló feladatok

19.3. A zérus ohmtól 100 ohmig változtatható ellenállású feszültségosztó A és B pontjai között 100 V a feszültség.

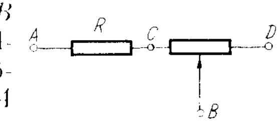


a) Milyen határok között változtathatjuk a feszültséget a C és D pontok között?

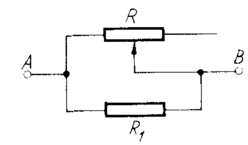
b) Mekkora a C és D közötti feszültség, ha a csúszka az ellenállás közepén áll? (A potenciométer egyenletes keresztmetszetű huzalból készült.)

19.4. Mekkora a feszültség a *19.3.* feladat szerinti feszültségosztó C és D pontja között, ha a két pont közé 200 ohmos terhelő ellenállást kötünk, és a csúszka középen áll?

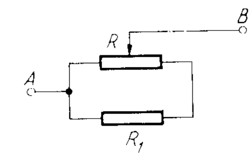
19.5. A csúszó érintkező mozgatásával a C és B pontok között 0-tól 100 ohmig lehet változtatni az ellenállást. Milyen határok között lehet változtatni az ellenállást az A és B pontok között, ha $R = 50$ ohm?



19.6. Milyen határok között lehet változtatni az ellenállást az A és B pontok között az ábra szerinti elrendezésben, ha $R_1 =$ $= 50$ ohm, R pedig 0-tól 100 ohmig változtatható?



19.7. Az $R_1 = 50$ ohm nagyságú ellenállást párhuzamosan kapcsoljuk egy tolóellenállással, melynek ellenállása 0-tól 100 ohmig változtatható.

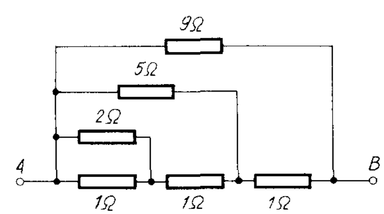


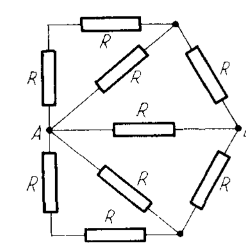
a) Mekkora az ellenállás az A és B pontok között a csúszka két véghelyzetében?

b) Mekkora az A és B pont közötti ellenállás, ha a csúszka az R ellenállás feléhez mutat?

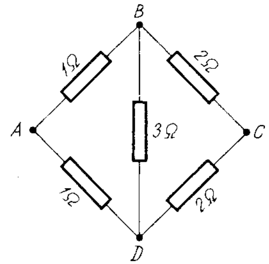
19.8. A 200 V-os feszültségforrásról potenciométer (feszültségosztó) alkalmazásával 50 V-os és 100 W teljesítményű fogyasztót akarunk üzemeltetni. Rendelkezésünkre áll egy 1000 ohmos, 1 A-rel terhelhető és egy 100 ohmos, 5 A maximális terhelésű tolóellenállás. Melyiket használjuk, és hova állítsuk be a csúszkát?

19.9. Számítsuk ki az A és B pontok közötti eredő ellenállást az ábra szerinti kapcsolások esetén!

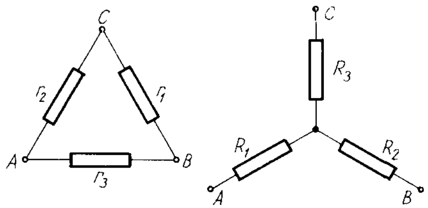




19.10. Mekkora az eredő ellenállás az ábrán látható kapcsolás $A-B$; $B-C$; $C-D$; $D-A$ és $A-C$ pontjai között?



19.11. Egy áramkör „delta" kapcsolásban tartalmazza az r_1; r_2; r_3 ellenállásokat. Számítsuk ki azokat az R_1; R_2; R_3; ellenállásokat, melyeket „csillagkapcsolásban" elrendezve az előbbivel egyenértékű kapcsolást kapunk: azaz bármely két pont (AB: BC vagy AC) között mindkét esetben ugyanaz az ellenállás!



19.12. Galvánelemet 25 ohmos ellenállással terhelve, a kapocsfeszültség az elektromotoros erő 80%-a lesz. Mennyi az elem belső ellenállása?

19.13. Galvánelem elektromotoros ereje 1 V, belső ellenállása 100 ohm. Ábrázoljuk

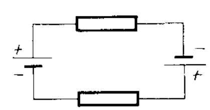
a) az áramerősséget,

b) a kapocsfeszültséget,

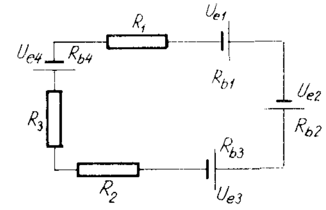
c) a fogyasztó teljesítményét a külső ellenállás függvényében!

19.14. Három, egyenként 1,5 V elektromotoros erejű és 4,5 ohm belső ellenállású elemet párhuzamosan kötve 11,5 ohmos külső ellenállásra kapcsolunk. Mekkora a kapocsfeszültség és az áramerősség a külső ellenálláson?

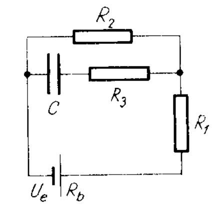
19.15. Két darab, egyenként 2 V-os és 8 ohm belső ellenállású elemet az ábra szerinti kapcsolásban 2 db 5 ohmos ellenállásra sorosan kapcsolunk. Mekkora az áramerősség?



19.16. Mekkora az áramerősség az ábra szerint összekapcsolt áramkörben? ($R_1 = 20$ ohm; $R_2 = 40$ ohm; $R_3 = 10$ ohm; $U_{e1} = U_{e2} = 10$ V; $U_{e3} = 6$ V; $U_{e4} = 20$ V; $R_{b1} = 0,2$ ohm; $R_{b2} = R_{b3} = 0,1$ ohm; $R_{b4} = 0,01$ ohm.)



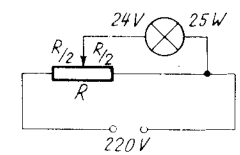
19.17. Folyhat-e át egyenáram a kondenzátoron?



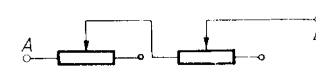
19.18. Mekkora feszültségre töltődik fel az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor? ($U_e = 3,6$ V; $R_b = 10$ ohm; $R_1 = 40$ ohm; $R_2 = 70$ ohm; $R_3 = 30$ ohm.)

Házi feladatok

19.19. Mekkora legyen az ábrán látható R ellenállás, hogy az izzólámpa üzemi feszültségen égjen?



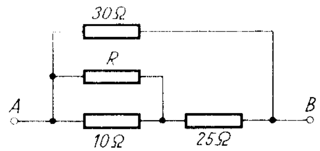
19.20. A 10 ohmtól 100 ohmig változtatható és 20 ohmtól 200 ohmig változtatható tolóellenállásokat az ábra szerint kapcsoljuk. Milyen határok között változtatható az ellenállás az A és B pontok között az egyik és másik esetben?



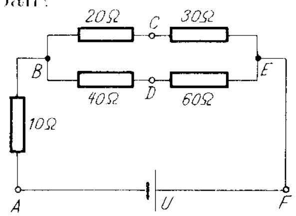
19.21. A 24 V-os és 25 W-os izzólámpát 110 V-os áramforrásra kívánjuk kapcsolni. Hogyan iktathatjuk be a rendelkezésünkre álló 100 ohmos tolóellenállást az áramkörbe ahhoz, hogy az izzó ne menjen tönkre? Legalább mekkora áramerősségre készült tolóellenállást kell alkalmaznunk?

19.22. Folyhat-e áram két pont között, ha a pontokban a potenciál egyenlő? (A szupravezetéstől most tekintsünk el!)

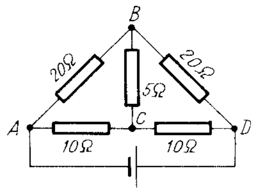
19.23. Mekkora az R ellenállás, ha az ábrán látható kapcsolásban az A–B kapcsok között 15 ohm ellenállást mérhetünk?



19.24. Mely pontok között zérus a feszültség az ábra szerinti kapcsolásokban?

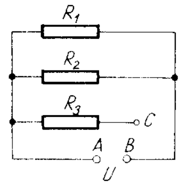


a,



b,

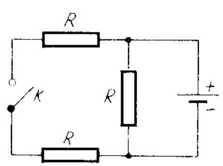
19.25. Mi történik az ábra szerinti áramkörben?



19.26. Galvánelem elektromotoros ereje 1,8 V, belső ellenállása 15 ohm. Mennyi a kapocsfeszültség és az áramerősség, ha az elemet 10 ohm ellenállással terheljük?

19.27. Három darab, egyenként 1,5 V elektromotoros erejű és 4,5 ohm belső ellenállású elemet sorosan kötve 11 ohmos külső ellenállásra kapcsolunk. Mekkora a kapocsfeszültség és az áramerősség?

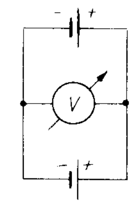
19.28. Az ábra szerinti kapcsolásban a K kapcsoló nyitott állásánál 0,1 A, zárt kapcsolóállás esetén pedig 0,133 A erősségű áram folyik az elemet tartalmazó ágban. Mekkora az elem elektromotoros ereje és belső ellenállása?
(R = 18 ohm.)



19.29. Az elektrosztatikában azt tanultuk, hogy a fém ekvipotenciális felület (a fém pontjai között a feszültség zérus). Az elektromos árammal átjárt vezető pontjai között a feszültség nem zérus. Nincs-e itt ellentmondás?

19.30. Egy áramkörre vonatkozó számítások során azt kaptuk, hogy pl. $I_5 = -5$ A. Helyes lehet-e ez az eredmény?

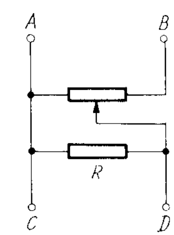
19.31. Az U_{e1} = 1,5 V elektromotoros erejű elemet és az U_{e2} = 2 V elektromotoros erejű elemet az ábra szerint kapcsoljuk egy feszültségmérőre, amely 1,7 V feszültséget jelez. Határozzuk meg az elemek belső ellenállásainak arányát! (A feszültségmérő belső ellenállását „végtelen nagynak" tekintjük!)



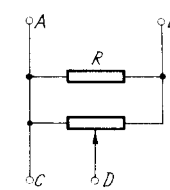
19.32. Két villanyoszlop között kifeszített huzalon áram folyik. A vezetékre madár száll rá. Mi történik a madárral?

Ajánlott feladatok

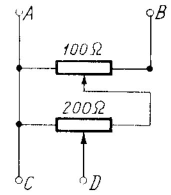
19.33. A 10 ohmtól 100 ohmig változtatható ellenállású feszültségosztót párhuzamosan kapcsoljuk az R = 50 ohmos ellenállással. Ha az A és B pontok között állandóan 100 V a feszültség, akkor C és D pontok között mekkora a feszültség a csúszka egyik és másik szélső helyzetében?



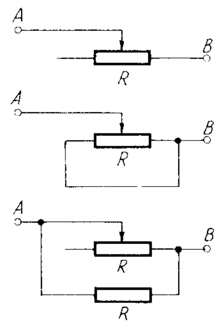
19.34. A 10 ohmtól 100 ohmig változtatható ellenállású feszültségosztót az ábra szerint párhuzamosan kapcsoljuk az R = 50 ohmos ellenállással. Ha az A és B pontokra 100 V feszültséget kapcsolunk, akkor a C és D pontokon milyen határok között változtathatjuk a feszültséget?



19.35. A 10 ohmtól 100 ohmig és a 20 ohmtól 200 ohmig változtatható ellenállású feszültségosztókat az ábra szerint párhuzamosan kapcsoljuk. Ha az A és B pontokra 100 V feszültséget kapcsolunk, akkor a C és D pontok között mekkora a feszültség a csúszkák véghelyzeteiben?



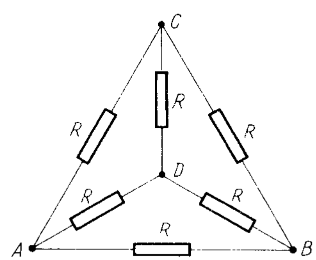
19.36. Ábrázoljuk az A és B pontok közötti ellenállást mint a csúszó érintkező és a tolóellenállás jobb oldali vége közötti ellenállás függvényét az ábrán látható mindhárom kapcsolás esetén!



19.37. Milyen az ún. logaritmikus potenciométer?

19.38. A 12 V-os akkumulátorra 12 V-os, 25 W-os fogyasztót és vele sorosan 100 ohmos tolóellenállást kapcsolunk. Hogyan változik a fogyasztón folyó áram erőssége, amikor az érintkező mozgatásával az ellenállást változtatjuk?
Ábrázoljuk diagramban a fogyasztón folyó áram erősségét a változó ellenállás függvényében!

19.39. Hat darab 1 ohmos ellenállásból mint élekből tetraédert állítunk össze. Mekkora ellenállást mérhetünk két csúcs között?



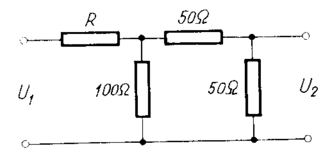
19.40. Tizenkét db 1 ohmos ellenállásból mint élekből kockát állítunk össze. Mennyi ellenállást mérhetünk:
a) egy testátló két végpontja között;
b) egy lapátló két végpontja között;
c) valamely él két végpontja között?

19.41. Galvánelem elektromotoros ereje 2 V, belső ellenállása 1 ohm. Az elemre kapcsolt fogyasztó teljesítménye 0,75 W. Mekkora erősségű áram folyik az áramkörben?

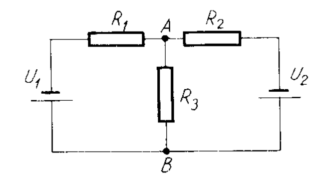
19.42. Galvánelem belső ellenállása 4 ohm. Az elemre 8 ohmos fogyasztót kapcsolunk, majd egy R ellenállásúval kicseréljük. A fogyasztó teljesítménye mindkét esetben ugyanakkora. Határozzuk meg az R ellenállás nagyságát!

19.43. Egy autóakkumulátort töltés céljából 13 V elektromotoros erejű és 0,09 ohm belső ellenállású töltőre kapcsolunk. Az akkumulátor belső ellenállása 0,01 ohm, elektromotoros ereje 12 V
a) Mekkora a töltőáram?
b) Mennyi a töltő által leadott teljesítmény?
c) Mennyi az akkumulátor és a töltő melegítésére fordítódó teljesítmény?
d) Mennyi az akkumulátor töltésére fordítódó teljesítmény?

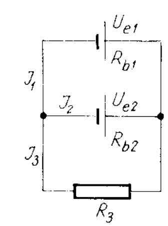
19.44. Mekkorának válasszuk az ábrán látható kapcsolásban R és U_1 értékét, hogy $U_2 = 100$ V és a teljes felvett teljesítmény 880 W legyen?



19.45. Az ábrán látható hálózatban az ellenállások értéke $R_1 = 50$ ohm; $R_2 = 80$ ohm és $R_3 = 100$ ohm. A telepek elektromotoros ereje $U_1 = 1{,}5$ V; $U_2 = 1$ V és belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az AB ágban folyó áram erősségét!



19.46. Az ábra szerinti kapcsolásban $U_{e1} = U_{e2} = 2$ V; $R_{b1} = 1$ ohm; $R_{b2} = 2$ ohm. Mekkora a fogyasztó R_3 ellenállása, ha az első elemen átfolyó áram erőssége $I_1 = 1$ A?
Mekkora a másik elemen átfolyó I_2 és a fogyasztón átfolyó I_3 áramerősség?



19.47. U_e elektromotoros erejű, R_b belső ellenállású telepre R ellenállást kapcsolunk. Milyen R érték mellett maximális az ellenállásra jutó teljesítmény?

19.48. A természetben megfigyelhető villámokat a következő átlagértékek jellemzik: 100 ezer volt potenciálkülönbség (két felhő vagy a felhő és a Föld között), 15 ezer amper áramerősség, 0,02 másodperc időtartam. Az egész Földön a villámlások száma másodpercenként átlagosan 100.

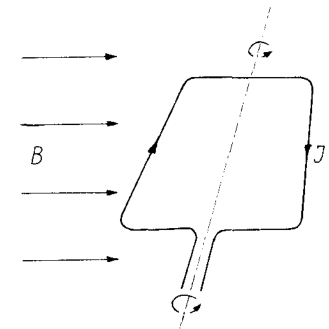
a) Határozzuk meg egy villám közepes teljesítményét!

b) Határozzuk meg az összes villámok teljesítményét, és hasonlítsuk össze az egyik legnagyobb: a krasznojarszki vízerőmű 5000 MW-os teljesítményével!

20. Elektromágnesesség

Bevezető feladatok

20.1. Homogén mágneses térben levő 2,5 cm² felületű vezetőkeretben 4 A erősségű áram folyik. A mágneses tér $2 \cdot 10^{-4}$ Nm forgatónyomatékkal hat a keretre, amikor annak síkja a mágneses térerősséggel párhuzamos és a keret forgástengelye merőleges a térerősségre. Mekkora a mágneses indukció?

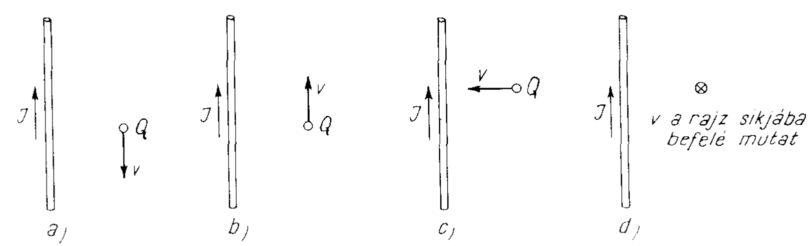


20.2. Egyenes vezető 20 cm hosszú szakasza $0{,}1\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú mágneses térben van. Mekkora és milyen irányú erő hat erre a szakaszra, ha az indukcióvektorra merőlegesen helyezkedik el, és benne 5 A erősségű áram folyik?

20.3. Az áramra ható erő melyik síkra merőleges?

20.4. A mágneses tér gyorsíthatja-e az elektromos töltést?

20.5. Egyenes vezető mágneses terében pozitív, pontszerű töltés mozog. Határozzuk meg a töltésre ható erő (Lorentz-erő) irányát az ábrán látható négy esetben!



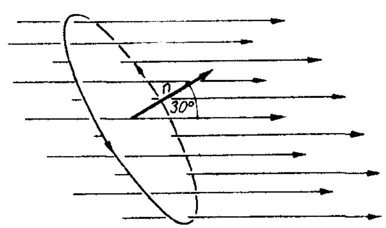
20.6. 50 cm^2 területű vezetőkeret áll a $0{,}2\ \frac{Vs}{m^2}$ indukciójú homogén mágneses térben úgy, hogy az indukcióvektor párhuzamos a keret síkjával. A keretet 0,01 s alatt átfordítjuk olyan helyzetbe, hogy a keret síkja merőleges legyen az indukcióvektorra (90°-os elforgatás). Mekkora az átlagos indukált feszültség?

Gyakorló feladatok

20.7. Két, külsőleg teljesen egyforma acélrúd egyike mágneses. Hogyan lehet megállapítani, hogy a két rúd közül melyik a mágneses?

20.8. Miért mozog körpályán a B-re merőleges irányban belőtt töltés, ha homogén mágneses térbe kerül?

20.9. Mekkora forgatónyomaték hat a 100 cm^2 felületű vezetőkeretre, ha benne 2 A erősségű áram folyik, és a $0{,}2\ \frac{Vs}{m^2}$ indukciójú homogén mágneses térben úgy helyezkedik el, hogy síkjának normálisa (síkjára merőleges vektor) az indukcióvonalakkal 30°-os szöget zár be?



20.10. Kör alakú merev vezetőhurkot, melyen áram folyik, homogén mágneses mezőbe helyezzük. Milyen helyzetekben lesz a hurok egyensúlyban? Milyen jellegűek ezek az egyensúlyi állapotok?

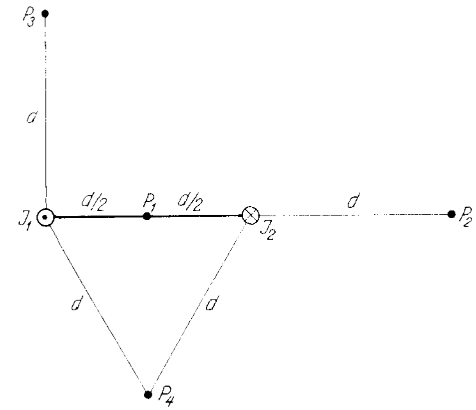
20.11. Mekkora erővel hat a $0{,}5\ \frac{Vs}{m^2}$ indukciójú homogén mágneses tér az egyenes vezető 1 m hosszú szakaszára, ha abban 20 A erősségű áram folyik, és

a) a vezető merőleges az indukcióvonalakra;
b) a vezető párhuzamos az indukcióvektorral;
c) a vezető 30°-os szöget zár be az indukcióvonalakkal?

20.12. Mekkora a mágneses térerősség egy igen hosszú egyenes vezetőtől 0,5 m távolságban, ha benne 100 A erősségű áram folyik?

20.13. Igen hosszú egyenesen méterenként $2 \cdot 10^{-8}$ C töltés helyezkedik el egyenletesen.
Mekkora a mágneses térerősség az egyenestől 10 cm távolságban, ha az 20 m/s sebességgel mozog hosszirányban?

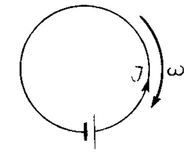
20.14. Határozzuk meg a H mágneses térerősség értékét az ábrán megjelölt P_1; P_2; P_3; P_4 pontokban. Az I_1 és I_2 ellenkező irányú, 20 A erősségű áramok, melyek az ábra síkjára merőleges, egymástól d = 20 cm távolságra levő végtelen hosszúnak tekinthető egyenes vezetőkben folynak.



20.15. Telepet kapcsolunk egy téglalap alakú vezetőkeret két szemközti csúcsához. Mekkora a keret középpontjában, a keret oldalain folyó áramok által létrehozott mágneses térerősség?

20.16. Mekkora a mágneses térerősség az 1,5 cm sugarú, 0,5 A erősségű árammal átfolyt körvezető középpontjában?

20.17. Egy kör alakú vezetőben I áram folyik. Változik-e az áram által létrejövő mágneses tér, ha a kört ω szögsebességgel forgatjuk?

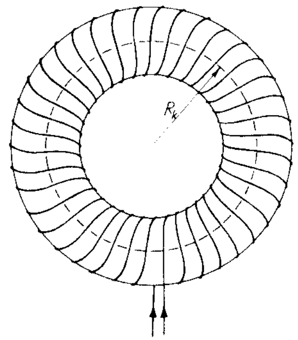


20.18. Egy 6 cm hosszú, 300 menetű tekercsben 1 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség és az indukció a tekercs belsejében?

20.19. Toroid tekercs középkörének sugara 10 cm, a menetek száma 1500, és a tekercsben folyó áramerősség 1 A, a tekercs keresztmetszetének területe 4 cm². Mekkora a tekercs belsejében a mágneses indukció és az indukciófluxus, ha:

a) a tekercs belsejét levegő tölti ki;

b) a tekercs belsejét lágyvas tölti ki? (A lágyvas relatív permeabilitása $\mu_r = 200$.)



20.20. Homogén, B indukciójú mágneses térben a B-re merőlegesen l hosszúságú vezetőszakasz mozog állandó, a hosszára merőleges v sebességgel.

a) Mekkora és milyen irányú elektromos térerősség lép fel a vezetőben?

b) Mekkora a vezető két vége között a feszültség?

20.21. Homogén mágneses térben, melynek mágneses indukciója $10^{-2}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ nagyságú, az indukcióvonalakra merőleges síkban egy 10 cm hosszúságú egyenes vezető mozog, sebessége merőleges a vezetőre. Adjuk meg az indukált feszültséget az idő függvényében, ha a vezető

a) 10 m/s állandó sebességgel mozog;

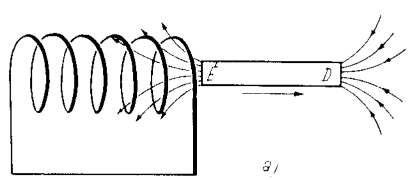
b) zérus kezdősebességről 1 m/s² gyorsulással növeli sebességét.

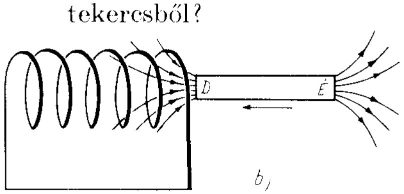
20.22. Milyen irányú áram indukálódik a tekercsben ha a mágneses rúd

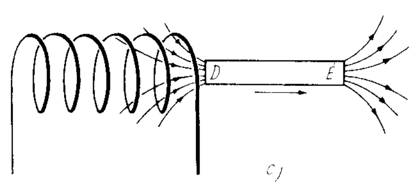
a) északi sarkát húzzuk ki a tekercsből;

b) déli sarkát toljuk be a tekercsbe;

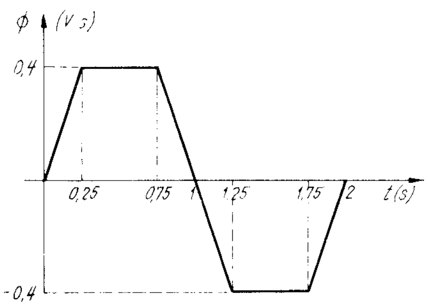
c) déli sarkát húzzuk ki a tekercsből?







20.23. Változzék a fluxus egy vezetőkörben a diagramon látható módon. Ábrázoljuk az indukált feszültséget az idő függvényében!



20.24. $0{,}2\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú mágneses térben egy 10 cm átmérőjű gyűrű forog valamely átmérőjének meghosszabbítását képző és a mágneses tér indukcióvonalaira merőleges tengely körül $3000\,\frac{1}{\mathrm{min}}$ fordulatszámmal. Mekkora a gyűrűben folyó áram legnagyobb értéke, ha annak ellenállása 0,1 ohm?

20.25. Mekkora az önindukció-együtthatója annak a tekercsnek, amelyben 0,5 s alatt egyenletesen bekövetkező 0,5 A áramerősség-változás 0,12 V önindukciós feszültséget hoz létre?

20.26. Rézgyűrű bizonyos magasságból leesve, egyszer farúdra, egyszer mágnesesrúdra fűződik fel. Mindkét rúd függőleges. Azonos sebességgel esik-e a gyűrű az asztalra a két esetben?

Házi feladatok

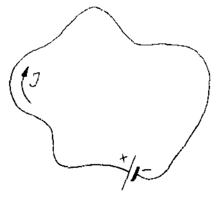
20.27. A 0,1 m oldalhosszúságú, négyzet alakú vezetőhurok normálisa 30°-os szöget zár be az $1{,}5\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú mágneses tér indukcióvektorával. A hurokra ható forgatónyomaték 0,05 Nm. Mekkora a hurokban folyó áramerősség?

20.28. Mi a feltétele annak, hogy a mágneses térben levő áramra ne hasson erő?

20.29. Hosszú tekercs belsejében a tengellyel párhuzamosan mozog egy töltés. Képes-e a mozgás irányába mutató térerősség a töltést gyorsítani?

20.30. Végtelen hosszú egyenes vezetőben I áram folyik. Egy tőle d távolságban elhelyezkedő, vele párhuzamos vezetőben az előzővel egyező irányú nI erősségű áram folyik. Az első vezetőtől milyen távolságban lesz az eredő H mágneses térerősség nulla?

20.31. Adott egy tetszőleges alakú, zárt síkgörbe mentén fekvő vezető, amelyben I áram folyik. Határozzuk meg a mágneses térerősség irányát a síknak:



a) a görbén belüli;

b) a görbén kívüli pontjában!

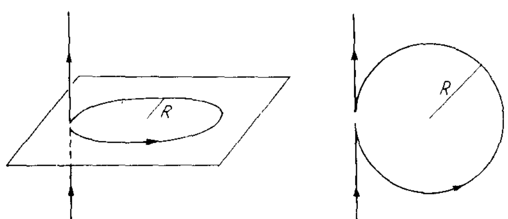
20.32. Egyenlő hosszú vezetődarabokból kockát forrasztunk össze. Az egyik testátló szemközti végére telepet kapcsolunk. Mekkora a kocka középpontjában a H mágneses térerősség?

20.33. Ugyanabból a vezetőből készítsünk először R sugarú kört, majd $\frac{R}{2}$ sugarú, kétmenetű tekercset. A vezeték végeit mindkét esetben ugyanahhoz a telephez kötjük. Melyik esetben és hányszor nagyobb a középpontban kialakuló mágneses térerősség nagysága?

20.34. Egy nagyon hosszú egyenes vezetőben 50 A erősségű áram folyik. Az ábrán látható módon egy $R = 10$ cm sugarú hurkot alkotunk a vezetőre. Mekkora a mágneses térerősség a hurok középpontjában, ha:

a) a hurok síkja merőleges az egyenesre;

b) az egyenes a hurok síkjában fekszik?



a) b)

20.35. Tekercs belsejében $0{,}12\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú mágneses teret létesítünk. A tekercs keresztmetszetének területe 30 cm². Mekkora az indukciófluxus a tekercs belsejében?

20.36. Tekercs hossza 15 cm, meneteinek száma 850. A tekercs huzalának vastagsága 0,3 mm, fajlagos ellenállása $0{,}0175\ \frac{\mathrm{ohm\ mm^2}}{\mathrm{m}}$. Egy menet hossza 6 cm. Mekkora a mágneses térerősség a tekercs belsejében, ha sarkaira 20 V feszültséget kapcsolunk?

20.37. Hosszú egyenes vezetőben I erősségű áram folyik. Az egyenes vezetőt rá merőleges síkban, szimmetrikusan egy N menetszámú, R középsugarú toroid veszi körül. Mekkora a toroidban az áram erőssége, ha középköre mentén a mágneses térerősség zérus? ($I = 10$ A; $N = 100$.)

20.38. Egy áramkör 10 cm hosszú egyenes vezetőből álló része $0{,}5\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú homogén mágneses térben van úgy, hogy az áram iránya 30°-os szöget zár be a „tér irányával".
Mekkora erővel hat a mágneses tér erre az egyenes vezetőre, ha benne 10 A erősségű áram folyik?

20.39. Miért lemezekből készítik a transzformátor vasmagját?

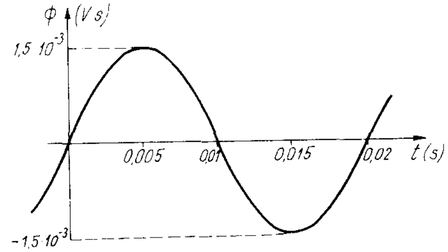
20.40. $10^{-2}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú mágneses térben egy 10 cm hosszúságú egyenes vezető 50 cm amplitúdójú, 1 s rezgésidejű rezgőmozgást végez az indukcióvonalakra merőleges síkban, a vezető vonalára merőleges irányban. Adjuk meg az indukált feszültséget az idő függvényében!

20.41. Egy 20 cm hosszú, 1,5 cm átmérőjű, 300 menetes tekercsben 5 A áram folyik. Az áramkört hirtelen megszakítva, az áram 0,01 s alatt nullára csökken. Mekkora feszültség indukálódik a tekercsben, ha az áram csökkenését egyenletesnek tekintjük?

20.42. Egy 500 menetű, 80 cm² keresztmetszetű tekercs percenként 300 fordulatot tesz a forgástengelyre merőleges $\frac{10^5}{2\pi}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ erősségű homogén mágneses erőtérben. Számítsuk ki a tekercsben indukált feszültséget, amikor a tekercs síkja:

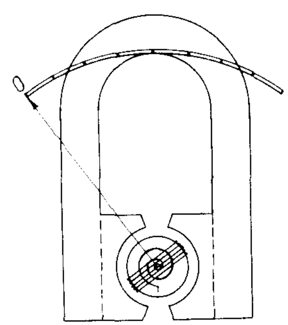
a) 0°;
b) 30°;
c) 60°;
d) 90°-os szöget zár be a térerősséggel!

20.43. A diagram egy tekercs egy menetének fluxusát ábrázolja az idő függvényében. Ábrázoljuk az 1000 menetű tekercsben indukált feszültséget az idő függvényében!

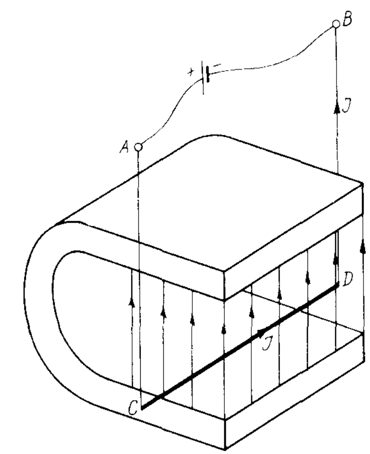


Ajánlott feladatok

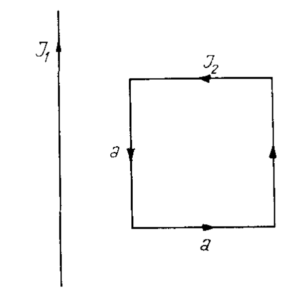
20.44. Az ábrán forgótekercses árammérő vázlatos rajza látható. Az állandó mágnes sarkainál elhelyezett saruk és a tekercs hengeres lágyvasmagja közötti légrésben előállított mágneses tér B indukciója állandó nagyságú és sugárirányú. Ha a tekercsben áram folyik, a mágneses tér forgatónyomatékot fejt ki a tekercsre, melynek hatására az elfordul addig, amíg a forgástengelyhez rögzített csavarrugó visszatérítő forgatónyomatéka az áram okozta nyomatékot kiegyensúlyozza. Mekkora a műszerrel mérhető áram legnagyobb értéke, ha a mutató teljes kitérése esetén a csavarrugó $3 \cdot 10^{-5}$ Nm forgatónyomatékot fejt ki? A 300 menetű tekercs 2 cm oldalú négyzet, és a mágneses tér indukciója a légrésben $0{,}25\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$.



20.45. Az ábra szerinti elrendezésben a homogén mágneses mezőben felfüggesztett vezetőben $I = 2$ A erősségű áram folyik. A CD egyenes vezető súlya $G = 0{,}1$ N és a mágneses mezőbe merülő része $l = 20$ cm hosszú. Hány fokkal lendülnek ki a függőlegestől az A; B pontokban rögzített felfüggesztőhuzalok, ha a mágneses tér indukciója $B = 0{,}25\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$?



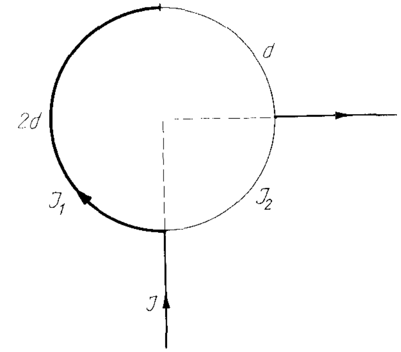
20.46. Igen hosszú egyenes vezetőben $I_1 = 30$ A erősségű áram folyik, a vezető mellett egy 2 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú vezetőkeret van az ábra szerint rögzítve. Mekkora erővel hat az egyenes vezető árama a keretre, ha abban $I_2 = 10$ A erősségű áram folyik, és az egyenes vezetőhöz közelebbi oldala attól 1 cm távolságra van?



20.47. Vezetőkeret síkja párhuzamos a homogén mágneses tér indukcióvonalaival, forgástengelye merőleges azokra. Mekkora forgatónyomatékkal hat a tér a keretre, ha abban 0,4 A erősségű áram folyik, és az indukcióvonalak fluxusa $3{,}2 \cdot 10^{-4}$ Vs?

20.48. Tekercs készítéséhez a szigeteléssel együtt 1 mm átmérőjű huzal áll rendelkezésünkre, amelyben maximálisan 6 A erősségű áram folyhat. Hány rétegből áll a tekercs, ha belsejében $3 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ indukciójú mágneses teret kell gerjesztenünk? A menetek szorosan illeszkednek.

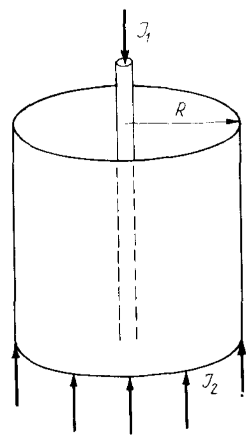
20.49. Azonos hosszúságú, d és $2d$ átmérőjű részhuzalokat összeforrasztunk, és körvezetőt képezünk belőle, majd az ábrán látható módon csatlakoztatjuk két hosszú, egyenes vezetőhöz, melyekben 15 A erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses **indukcióvektor** nagyságát és irányát a kör középpontjában, ha annak sugara 3 cm!



20.50. Az ábrán látható koaxiális kábel közepén húzódó vezetékében $I_1 = 3$ A erősségű áram folyik lefelé, a külső hengeres vezetőben pedig $I_2 = 2$A áram fölfelé. A henger sugara $R = 1$ cm.

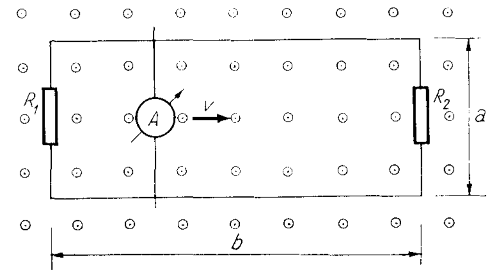
a) Mekkora a mágneses indukció értéke a középvonaltól 5 cm távolságban?

b) Mekkora a mágneses indukció értéke a középvonaltól 0,5 cm távolságban?



20.51. Ábrázoljuk a mágneses térerősséget mint a hely függvényét egy véges vastagságú hengeres vezető esetében, ha az árameloszlás a vezető keresztmetszete mentén egyenletes!

20.52. Az ábrán látható téglalap alakú vezetőkeretek a hosszúságú oldalainak ellenállása R_1; illetve R_2; a b hosszú élek ellenállása elhanyagolhatóan kicsi. Az ellenállás nélküli oldalakat rövidre záró vezető (melynek ellenállása szintén elhanyagolható) v sebességgel mozog R_1-től R_2 felé. Mekkora áramerősséget jelez az elhanya-



golható belső ellenállású áramerősségmérő, ha az elrendezés a vezetőhurok síkjára merőleges, B indukciójú homogén mágneses térben van?

20.53. Határozzuk meg egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, N menetből álló tekercs önindukciós együtthatóját, ha a tekercs belsejét μ_r relatív permeabilitású anyag tölti ki!

20.54. Két egymásba tolt tekercs mindegyikének hossza 20 cm. A tekercsek keresztmetszetének területe közel egyenlő, és $A = 8$ cm^2. A belső tekercs menetszáma $N_1 = 300$; a külsőé $N_2 = 200$. A belső tekercsben a bekapcsolás után 0,1 s alatt egyenletesen növeljük az áramot nulláról 5 A-ra.

a) Mekkora feszültség indukálódik a külső tekercsben?

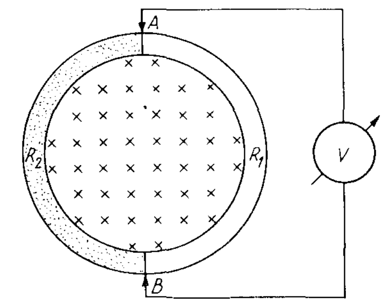
b) Mekkora a kölcsönös indukció együtthatója?

20.55. Egy vasmagban időben egyenletesen változó fluxus van. A vasmagot egy vezetőgyűrű veszi körül, amely az ábra szerint két különböző R_1 és R_2 ellenállású félgyűrűből van összetéve. Mit mutat az A, illetve B pontokhoz kapcsolt végtelen belső ellenállású feszültségmérő, ha:

a) a feszültségmérő a gyűrű jobb oldalán van elhelyezve. (Lásd az ábrát!)

b) A feszültségmérő a gyűrű bal oldalán van elhelyezve?

($R_1 = 0{,}02$ ohm, $R_2 = 0{,}43$ ohm, $\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = 4$ V)



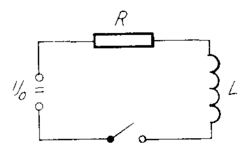
20.56. Egy soros gerjesztésű egyenáramú motort 150 V feszültségre kapcsolunk. Amíg a motor áll, 25 A áram folyik át rajta, majd amikor egy adott n fordulatszámra felgyorsult, 5 A áramot vett fel. A gépet dinamóként akarjuk felhasználni. Hány LE teljesítményt ad le a berendezés dinamóként használva, ha a tengelyét n fordulatszámmal forgatjuk, és a terhelő ellenállás 18 ohm?

20.57. 2 cm sugarú vezetőgyűrű a síkjára merőleges $\left(\frac{10^5}{\pi^2}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$ térerősségű homogén mágneses térben nyugszik. A gyűrű ellenállása 1 ohm. Mennyi töltés áramlik át a gyűrű valamely keresztmetszetén, miközben a térerősséggel párhuzamos helyzetbe forgatjuk (90°-os forgatás).

20.58. Hogyan készítik az önindukciómentes tekercseket, amelyeket például ellenállásszekrényekben alkalmaznak?

20.59. Ha két egymásba tolt tekercs egyikére áramforrást kapcsolunk, és benne az áramerősséget változtatjuk, akkor a másik rövidre zárt tekercsben indukált áram folyik. Ennek az indukált áramnak a nagysága más és más lesz attól függően, hogy a tekercs belsejét milyen anyag tölti ki. Magyarázzuk meg ezt a jelenséget!

20.60. Határozzuk meg az ábrán látható tekercs mágneses terének energiáját úgy, hogy kiszámítjuk az áramforrás munkájának azt a részét, amely a tekercs mágneses terének felépítésére fordítódik!



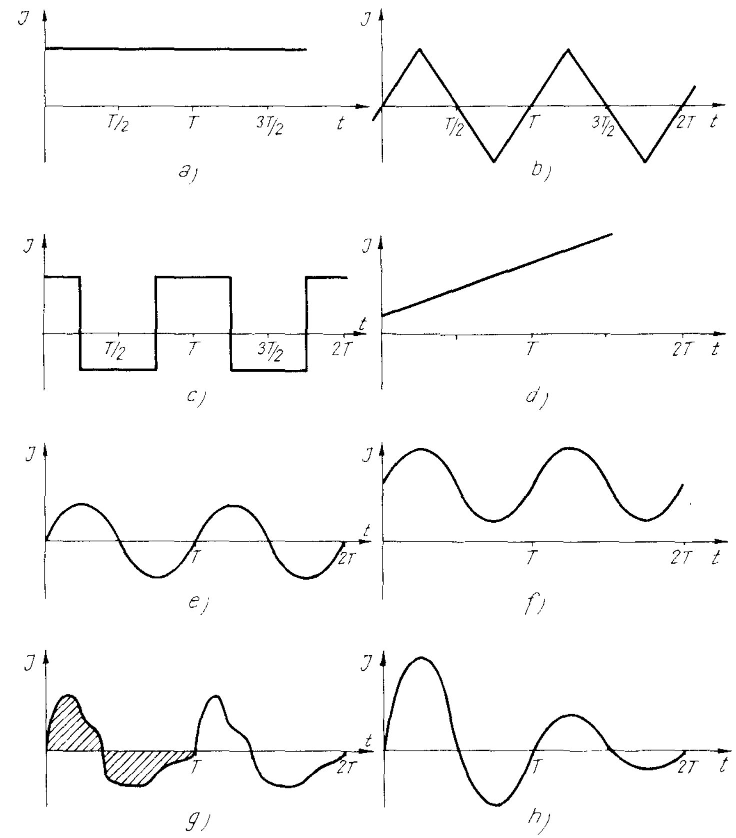
20.61. Akkumulátorból táplált áramkörbe N menetű, belül üres tekercset kapcsolunk. A tekercs hossza l. Egy tanuló $l' > l$ hosszúságúra húzza szét a tekercset.

a) A tanuló pozitív vagy negatív munkát végzett?
b) Csökkent vagy nőtt a tekercs mágneses terének energiája?
c) Mire fordítódott az indukált áram munkája?

21. Váltakozó áram

Bevezető feladatok

21.1. Az ábrán látható diagramok közül melyik ábrázol váltakozó áramot?



21.2. Váltakozó áramon szűkebb értelemben a tiszta sinusos váltakozó áramot értik. Ezt az $I = I_0 \cdot \sin(\omega_t + \delta)$ függvény írja le. Mely betűk jelentik:

a) az áram pillanatnyi értékét,
b) az áram csúcsértékét,
c) a körfrekvenciát,
d) a fázist,
e) a fázisállandót?

21.3. Az $I = 300\ \mathrm{A} \cdot \sin(314\,t + \pi/3)$ tiszta sinusos váltakozó áramnak mennyi a

a) csúcsértéke,
b) körfrekvenciája,
c) frekvenciája,
d) periódusideje,
e) kezdő fázisa?

21.4. Írjuk le, hogyan változik a dugaszoló aljzat (a „konnektor") feszültsége a 220 V-os váltakozó feszültségű hálózatban? Mekkora a feszültség egy periódusának időtartama?

21.5. Mennyi idő alatt növekszik a hálózati 50 Hz frekvenciájú feszültség 0-ról a maximális érték felére?

21.6. Változhat-e a váltóáramú ellenállása egy

a) adott önindukciós együtthatójú tekercsnek,
b) adott kapacitású kondenzátornak?

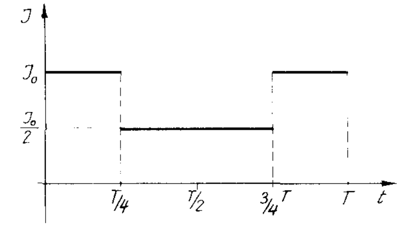
21.7. 220 V-os hálózatról táplált berendezésen átfolyó áram erőssége 2 A; a felvett teljesítmény 300 W.

a) Mekkora az áram és feszültség fáziskülönbsége?
b) Mekkora a berendezés váltóáramú ellenállása (impedanciája)?
c) Mekkora a berendezés ohmikus ellenállása?

Gyakorló feladatok

21.8. Vezetőkeretet homogén mágneses térben, a tér indukcióvektorára merőleges tengely körül egyenletesen forgatva, benne váltakozó feszültség indukálódik. Az elfordulás szögét attól a helyzettől mérjük, amikor az indukált feszültség nulla.
Mekkora az elfordulás szöge, amikor a pillanatnyi feszültség először megegyezik az effektív feszültséggel?

21.9. R ellenálláson átfolyó áram erőssége az ábrán látható módon periodikusan változik. Határozzuk meg az áram effektív értékét!



21.10. A 21.9. feladatbeli árammal t_1 idő alatt lehet egy akkumulátort feltölteni. Mekkora egyenárammal lehet ugyanezt az akkumulátort ugyanannyi idő alatt feltölteni? ($t_1 \gg T$.)

21.11. Működik e váltakozó árammal az elektromos csengő?

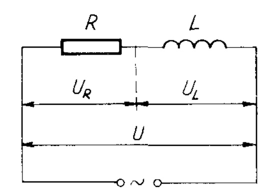
21.12. Mit mutat a hőhuzalos, lágyvasas és elektrodinamikus mérőműszer váltakozó áram esetén?

21.13. Tisztán induktív ellenállású, 200 mH önindukciós együtthatójú tekercset 220 V hálózati váltakozó feszültségre kapcsoljuk.

a) Mekkora áram folyik a tekercsben?
b) Ábrázoljuk a feszültséget és az áramerősséget az idő függvényében!
c) Rajzoljuk fel a feszültséget és az áramerősséget ábrázoló forgó vektorokat a $t_1 = 0$; $t_2 = 0{,}0025$ s-ban!

21.14. Sorosan kapcsolunk egy elhanyagolható ohmikus ellenállású, 0,5 H önindukciójú tekercset 50 ohmos ohmikus ellenállással, majd rákapcsoljuk 220 V-os váltakozó feszültségű hálózatra.

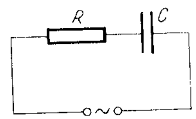
a) Mekkora a kör ellenállása (impedanciája)?
b) Mekkora áram folyik a körben?
c) Mekkora az ohmikus ellenállásra, illetve a tekercsre jutó feszültség?
d) Mekkora az áram és feszültség közötti fáziskülönbség?



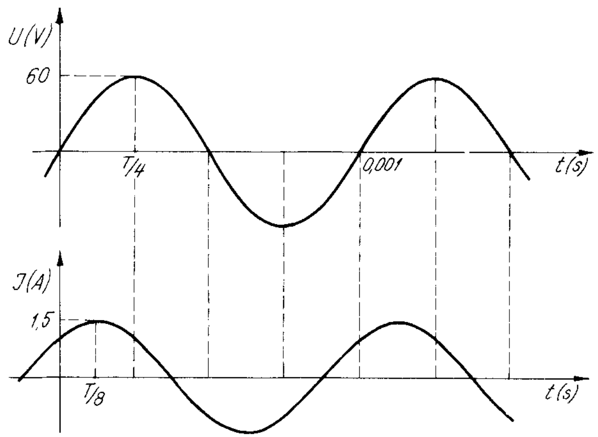
21.15. Hogyan mérhetjük meg feszültség- és árammérő műszerek segítségével egy kondenzátor kapacitását?

21.16. Az ábrán látható kapcsolásban $C = 100\ \mu\mathrm{F}$ és $R = 50$ ohm. A kapcsokon 220 V-os hálózati váltakozó feszültség van.

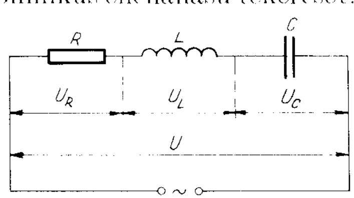
a) Mekkora az eredő impedancia?
b) Mekkora az áramerősség?
c) Mekkora feszültséget mérhetünk az egyes elemeken?
d) Mekkora a kapocsfeszültség és az áram fázisának különbsége?



21.17. A diagramon sorosan kapcsolt R ohmos ellenállás és C kapacitású kondenzátor pillanatnyi feszültségét és áramát ábrázoltuk. Határozzuk meg
a) az áram és a feszültség fázisának különbségét,
b) az R ohmos ellenállást,
c) a kondenzátor C kapacitását!



21.18. 110 V feszültségű, 50 Hz frekvenciájú hálózatra sorbakapcsolunk 50 ohm ohmos ellenállást, egy 100 μF-os kondenzátort, és egy 0,5 H önindukciójú elhanyagolható ohmikus ellenállású tekercset.
a) Mekkora az eredő ellenállás?
b) Mekkora a körben folyó áram effektív értéke?
c) Mekkora az egyes elemekre jutó feszültség effektív értéke?
d) Mekkora az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség?



21.19. Egy fogyasztót, melynek üzemi adatai 70 V és 0,1 A, 220 V-os, 50 Hz frekvenciájú hálózatból akarunk táplálni. Mennyi energiát takarítunk meg 4 órás üzem esetén, ha ohmikus ellenállás helyett kapacitív előtétet alkalmazunk? Mekkora legyen az előtétként használt kapacitás?

21.20. Transzformátor tekercseit primer, illetve szekunder tekercseknek nevezik. A menetek számától, vagy a bekötéstől függ-e az, hogy melyik a primer és melyik a szekunder tekercs?

21.21. Melyik esetben nagyobb a transzformátor primer tekercsének feszültsége és árama közötti fáziskülönbség, ha
a) a szekunder tekercs nyitott,
b) a szekunder tekercs terhelve van?

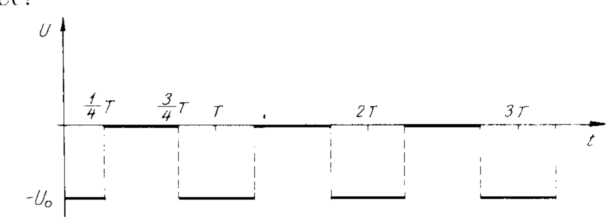
21.22. Veszteség nélküli transzformátor primer tekercsén 600, szekunder tekercsén 1000 menet van. A primer tekercset 110 V-ra kötjük. Mekkora ellenállással terheltük a szekunder kört, ha a primer tekercsen 25 mA erősségű áram folyik?

Házi feladatok

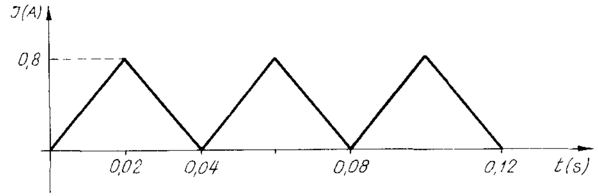
21.23. Szinuszosan váltakozó feszültség periódusideje 0,02 s; csúcsértéke 500 V.
a) Mekkora a frekvencia?
b) Mekkora a körfrekvencia?
c) Mekkora a pillanatnyi feszültség értéke 0,001 s-mal azután, hogy 0 volt?
d) Mekkora a pillanatnyi feszültség értéke 0,001 s-mal a csúcsérték felvétele után?

21.24. Váltó feszültség esetén a periódusidő hányad részében nagyobb a feszültség abszolút értéke az effektív értéknél?

21.25. Határozzuk meg az ábrán látható váltakozó feszültség effektív értékét!

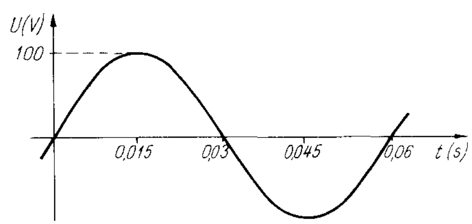


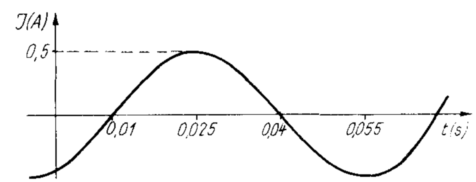
21.26. Az ábra szerint változó árammal mennyi idő alatt lehet feltölteni egy 8 amperóra töltési kapacitású akkumulátort?



21.27. Mennyit késik a szinuszos váltóáram a feszültséghez képest
a) az ideális tekercsen,
b) az ideális kondenzátoron?

21.28. Az ábrán egy váltakozó árammal működő eszköz kapcsain levő feszültséget és a berendezésen átfolyó áramot tüntettük fel az idő függvényében.
a) Mekkora a feszültség és az áram effektív értéke?
b) Mennyi a feszültség és az áram frekvenciája, körfrekvenciája?
c) Mennyi az áram és a feszültség fázisának különbsége?
d) Mennyi a berendezés ellenállása az adott váltakozó árammal szemben?



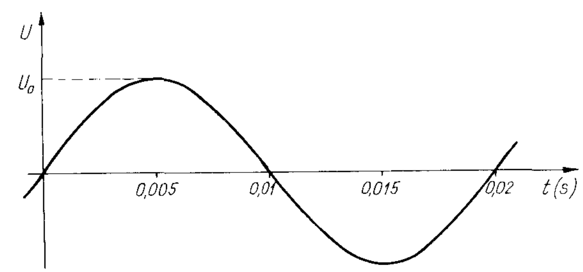


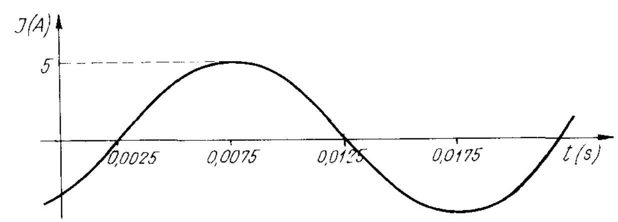
21.29. Mekkora annak a tekercsnek az induktivitása, amelyet a 220 V-os, 50 Hz frekvenciájú hálózatra kapcsolva, a rajta átfolyó áram csúcsértéke 3 A? (Az ohmikus ellenállás elhanyagolható.)

21.30. Sorbakötünk egy ohmikus ellenállást és egy indukciós tekercset, majd 220 V-os hálózati váltófeszültségre kapcsoljuk. Az árammérő 5 A-t, az ellenállás sarkaira kötött feszültségmérő 150 V feszültséget mutat.
a) Mekkora feszültséget mutat az indukciós tekercsre kapcsolt voltmérő?
b) Mekkora az ohmikus ellenállás és az önindukciós együttható értéke?

21.31. Valamely tekercs egyenáramú ellenállása 25 ohm. 220 V hálózati feszültség (50 Hz) esetén az átfolyó áram 8 A. Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója?

21.32. Egy veszteséges tekercset 220 V-os hálózati váltakozó feszültségre kapcsolunk. Az ábra feltünteti a tekercs sarkain a feszültséget és a tekercsben folyó áramot az idő függvényében. Az ábra alapján határozzuk meg
a) a tekercs ohmos ellenállását;
b) a tekercs önindukciós együtthatóját.





21.33. Egy soros *RC* körben 220 V-os, 50 Hz frekvenciájú váltakozó feszültség hatására 5 A az effektív áramerősség. A hatásos teljesítmény 500 W. Mekkora *R* és *C* értéke?

21.34. Soros *RLC* körben az induktivitás 1 H; a kapacitás 50 μF. Mekkora frekvencián észlelhető a feszültségrezonancia az áramkörben?

21.35. Mekkora ohmikus ellenállást kössünk előtétként a sorosan kapcsolt 0,1 H önindukciójú tekercsünk és 20 μF-os kondenzátorunk elé, ha generátorunk feszültsége 110 V; az áramkör feszültségi rezonancián áll és a kondenzátorra eső megengedett maximális feszültség 75 V?

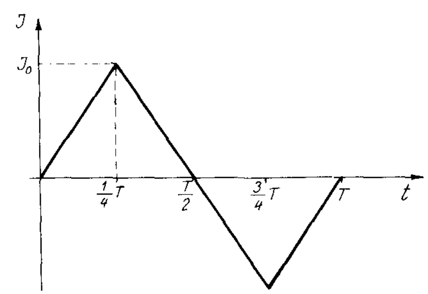
21.36. 220 V-os hálózati váltakozó feszültségre sorbakapcsolunk egy ohmos ellenállást, melynek nagysága 50 ohm, és egy kondenzátort, melynek ellenállása 50 Hz frekvenciánál 100 ohm.
a) Mekkora a kondenzátor kapacitása?
b) Mekkora a feszültség az egyes elemeken?
c) Mekkora a feszültség és az áram közötti fáziskülönbség?

21.37. Transzformátor primer körét 120 V hálózati feszültségre kapcsoljuk. Az 1000 menetű terheletlen szekunder tekercs sarkain 600 V a feszültség.
Hány menetből áll a primer tekercs?

Ajánlott feladatok

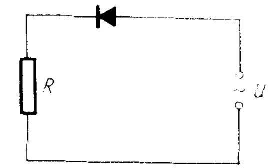
21.38. Váltakozó feszültség a csúcsértékének feléről növekedve eléri csúcsértékét, majd ismét csökkenve a csúcsérték felét. Közben 0,0033 s telik el.
Mekkora a frekvencia?

21.39. Váltakozó áramnak az ábrán látható alakja van. Határozzuk meg az áram effektív értékét!

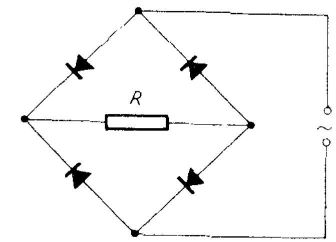


21.40. Határozzuk meg a tiszta sinusos $I = I_0 \cdot \sin \omega t$ váltakozó áram effektív értékét!

21.41. Mekkora az ábrán látható kapcsolásban az $R = 50$ ohm ellenállású fogyasztó átlagos teljesítménye?
($U = 220$ V; $f = 50\ s^{-1}$.)



21.42. Mekkora egyenfeszültséget kellene az *R* ellenállású fogyasztóra kapcsolni, hogy $t = 1$ óra alatt ugyanannyi töltés folyjék át rajta, mint az ábrán látható kapcsolásban?
($R = 100$ ohm; $U = 220$ V; $f = 50\ s^{-1}$.)

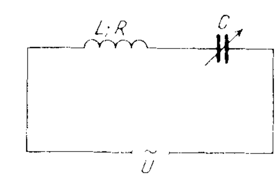


21.43. Miért nevezzük a kis ohmikus ellenállású és nagy induktivitású tekercset fojtótekercsnek?

21.44. 220 V-os hálózati váltakozó feszültségre sorosan kapcsolunk egy 50 ohm ohmikus ellenállást és egy 50 μF kapacitású kondenzátort.
Mekkora az áramerősség azokban a pillanatokban, amikor a feszültség nulla?

21.45. Két indukciós tekercset készítünk, melyeknek önindukciós együtthatója egyenlő. A felhasznált huzal hossza és anyaga mindkét esetben azonos, de az egyik tekercsnél a huzal átmérője kétszeres. 110 V-os hálózati váltakozó feszültségre kapcsolva az egyik tekercsen 1,08 A, a másikon 0,86 A az átfolyó áram effektív értéke.
Mekkora a fáziskülönbség az áram és a tekercsre kapcsolt feszültség között az egyik, illetve a másik esetben?

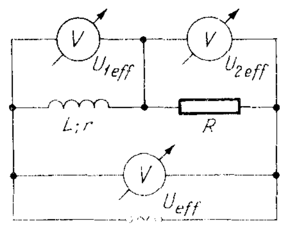
21.46. Sorbakapcsolt veszteséges tekercset és veszteségmentes, változtatható kapacitású kondenzátort 220 V feszültségű, 50 Hz frekvenciájú hálózatról táplálunk. A kondenzátor kapacitását változ-



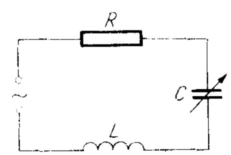
tatva, a felvett legnagyobb áramerősség 150 mA. Ekkor a tekercs kapcsain 350 V feszültséget mérhetünk. Mekkora a tekercs ellenállása és önindukciós együtthatója?

21.47. Bizonyítsuk be, hogy a sinusos váltakozó áram átlagos teljesítménye $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$, ha φ a fogyasztó sarkain levő feszültség és az áram fázisának különbsége!

21.48. Határozzuk meg az ábrán látható kapcsolásban a három feszültségmérőről leolvasott U_{1eff}; U_{2eff} és U_{eff} adatok és R ismeretében a tekercsen (veszteséges) a váltakozó áram teljesítményét!



21.49. Az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor kapacitása széles határok között folytonosan változtatható. Határozzuk meg, hogyan függ a kapacitás nagyságától az áramkör teljesítménye! A kapacitás mely értékénél maximális a teljesítmény?



21.50. Az elektromos erőművektől távol levő fogyasztókhoz távvezetéken továbbítják a generátor által termelt energiát. A távvezetéknek az erőműnél levő két végét azonban nem közvetlenül a generátorra kapcsolják, hanem egy közbeiktatott transzformátor szekunder tekercsére, amelynek feszültsége lényegesen nagyobb, mint a generátor viszonylag alacsony feszültsége. Miért szükséges ez?

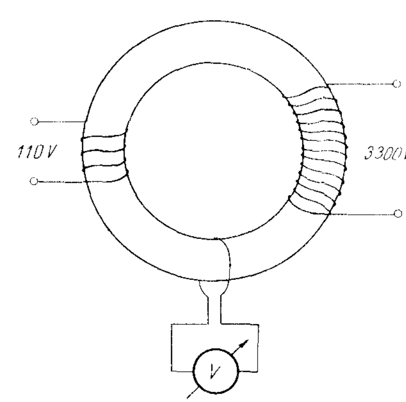
21.51. Egy generátor által szolgáltatott 1 kW teljesítményt továbbít a fogyasztóhoz a 10 ohm ellenállású távvezeték. A teljesítmény hány százaléka jut el a fogyasztóhoz, ha a távvezeték

a) 220 V-os,

b) 10 000 V-os?

21.52. Egy transzformátornak, amely a váltakozó feszültséget 100 V-ról 3300 V-ra növeli, gyűrű alakú zárt vasmagja van. A gyűrűt egy vezeték veszi körül, amelynek végei feszültségmérőhöz kapcsolód-

nak. A műszer 0,5 V-ot mutat. Hány menete van a transzformátor primer és szekunder tekercsének?



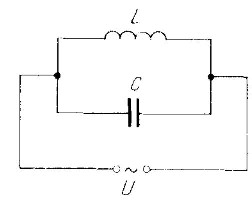
21.53. Az ábrán látható módon kapcsoljuk az $L = 0{,}1$ H induktivitású tekercset és a $C = 1{,}27$ μF kapacitású kondenzátort váltakozó feszültségre, melynek effektív értéke 220 V és frekvenciája 500 Hz.

a) Határozzuk meg a tekercs áramát (I_L) az idő függvényében!

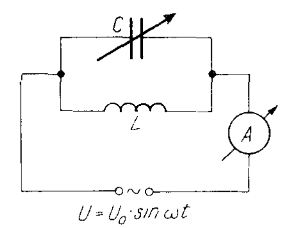
b) Határozzuk meg a kondenzátor áramát (I_C) az idő függvényében!

c) Határozzuk meg a főágban folyó áramot az idő függvényében!

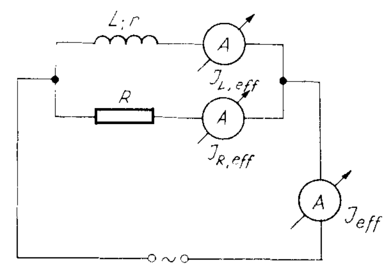
d) Határozzuk meg a párhuzamos LC kör impedanciáját!



21.54. Az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor kapacitása változtatható. A kapacitás mely értékénél nem jelez az áramerősség-mérő? ($L = 0{,}2$ H; $f = 1000$ Hz.)



21.55. Határozzuk meg az ábrán látható kapcsolásban a veszteséges tekercs teljesítményét a három műszer által mutatott áramerősség és R ismeretében! ($R = 10$ ohm; $I_{L\,eff} = 5$ A; $I_{R\,eff} = 10$ A; $I_{eff} = 15$ A.)



21.56. Adott két műszerünkkel egyen- és váltakozó feszültséget, valamint áramot egyaránt mérni tudunk. Hogyan határozhatjuk meg egy veszteséges (átvezetéses) kondenzátor kapacitását?

22. Molekuláris fizika

Bevezető feladatok

22.1. Lehet-e a higany gáz?

22.2. Hány molekula van valamely normál állapotú (T = 273 K p = 1,01 · 10^5 Pa), ideális gáz 22,4 liternyi térfogatában?

22.3. Számítsuk ki az O_2 molekula tömegét!

22.4. Miben tér el molekuláris szempontból az ideális gáz a valódi gázoktól?

Gyakorló feladatok

22.5. Az alumínium sűrűsége 2,7 g/cm³. Mennyi a tömege egy 10^{-10} méter élhosszúságú alumínium kockának?

22.6. Mennyi a térfogata annak a vízmennyiségnek, amelyben 6 · 10^{23} számú vízmolekula van?

22.7. Mi az „hőmozgás"?

22.8. Érvényesek-e a mechanika törvényei a gázmolekulákra?

22.9. Ha a belső energia a molekulák mozgási (és helyzeti) energiáinak összege, akkor mi a különbség egy felmelegedett, nyugvó labda és egy hideg, sebesen mozgó labda között?

22.10. Milyen különbség van molekuláris szempontból a hőközlés és a munkavégzés között?

22.11. Mennyi lehet egy molekula hőmérséklete?

22.12. A légüres térben elhajított test parabolapályán mozog. Milyen pályán mozog egy oxigénmolekula a levegőben?

22.13. A légkört alkotó oxigén-, nitrogén- stb. gázmolekulák miért nem esnek le a Föld felszínére?

22.14. Megváltozik-e az űrhajóban levő levegő nyomása a súlytalansági állapot beálltakor?

22.15. Mennyi a nyugvó edényben levő ideális gáz molekuláinak átlagos mozgásmennyisége? (Vigyázat: a mozgásmennyiség vektor!)

22.16. Azt a távolságot, amelyet a molekula a gázban két ütközés között megtesz, s z a b a d ú t h o s s z n a k nevezzük. A levegőben, 1,01 · 10^5 Pa nyomás mellett, a szabad úthossz középértéke 10^{-7} méter nagyságrendű, és 1 másodperc alatt egy molekula átlagban 10^9-szer ütközik.
a) Határozzuk meg az előbbi adatokból a molekula átlagsebességének nagyságrendjét!
b) Milyen jármű mehet ilyen nagyságrendű sebességgel?

22.17. Függ-e a hőmérséklettől, valamint a festékszemcsék méretétől a mikroszkópban megfigyelhető Brown-mozgás élénksége?

22.18. Hogyan lehet meghatározni a folyadékmolekula kötési (potenciális) energiáját a folyadékban, ha tudjuk a molekulasúlyt s a gőzsűrűség és a párolgáshő ismert nyomáson mért értékeit?

22.19. A levegővel szabadon érintkező víz 100 °C alatt is párolog, de csak 100 °C-on forr. Miért?

22.20. Folyadékcsepp van, „gázcsepp" nincs. Miért?

Házi feladatok

22.21. Hány hidrogénmolekula található 1,55 liter 27 °C-os, 10^5 Pa nyomású hidrogéngázban?

22.22. Ha egy neonatom tömege 3,35 · 10^{-23} gramm, mennyi a normál állapotú neongáz sűrűsége?

22.23. Hány H_2O molekula van 3 cm³ vízben?

22.24. Tegyük fel, hogy egy pohár víz minden molekuláját valahogy meg tudjuk jelölni. Öntsük ki az így megjelölt pohár vizet a Balatonba. Tegyük fel azt is, hogy a megjelölt molekulák a tóban egyenletesen elkeverednek. Ezután merítsünk egy pohárral a Balaton vizéből. Becsüljük meg, hány megjelölt molekula lesz ebben a pohár vízben!

22.25. A víz párolgáshője 100 °C-on $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg. Ennek felhasználásával határozzuk meg a víz molekulái között fellépő kötési energiát eV-ben.

22.26. A homok sűrűsége a víz sűrűségének több mint háromszorosa. Mi az oka annak, hogy még a legerősebb orkánok is csak jelentéktelen mennyiségű vízcseppet képesek kiragadni a tengerből, amikor pedig a közepes erősségű szél is súlyos homokszemekből kialakuló homokfelhőket sodor magával a sivatagban?

Ajánlott feladatok

22.27. Lehet-e egy fém átlátszó?

22.28. Állítsuk nagyság szerint sorrendbe a következő távolságokat:
a) a sárga színű fény hullámhossza,
b) a Na- és Cl-ionok távolsága a kősókristályban,
c) a Na-atom sugara.

22.29. Nincs-e ellentmondás abban a kijelentésben, hogy egyensúlyi állapotban levő anyag részecskéi állandó rendszertelen mozgást végeznek?

22.30. Miből van a láng?

22.31. Soroljunk fel olyan, a tapasztalatból jól ismert jelenségeket, amikor valamilyen anyag világít (látható fényt bocsát ki), és töltsük ki az alábbi táblázatot:

A fényforrás halmazállapota	A fényforrás molekuláinak (atomjainak, ionjainak) mozgása	
	Teljesen rendezetlen	Részben rendezett
Szilárd		
Folyadék		
Gáz		

22.32. **Mekkora élhosszúságú kocka térfogatát töltené ki normál állapotban az az ideális gáz, melyben a molekulák száma megegyezne Magyarország lakosságának mintegy tízmilliós számával?**

22.33. A legjobb vákuum, amit jelenleg elő tudunk állítani, 10^{-13} Pa nagyságrendű. Vajon ennek az úgynevezett légüres térnek 1 cm^3-ében hány molekula található? A csillagközi (intersteláris) tér cm^3-enként körülbelül 1 protont tartalmaz.

22.34. **Hány molekula van**
a) **2 gramm hidrogéngázban;**
b) **2 gramm héliumgázban;**
c) **3 cm^3 jégben;**
d) 3 cm^3 127 °C-os $8{,}14 \cdot 10^4$ Pa nyomású vízgőzben? A vízgőz ideális gáznak tekinthető.

22.35. Egy edényben 0 °C hőmérsékletű és $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomású ideális gáz van. Gondolatban osszuk fel az edényt annyi egybevágó kockára, ahány molekula van benne!
a) **Mennyi egy ilyen kis kocka élhosszúsága?**
b) **Legalább hányszorosa ez egy atom átmérőjének?**

22.36. **Egy mol víz 18 cm^3 térfogatú. Gondolatban osszuk fel a víz által kitöltött térrészt annyi egybevágó kockára, amennyi a molekulák száma.**
a) **Mennyi egy ilyen kis kocka élhosszúsága?**
b) **Hasonlítsuk össze ezt a *22.35.* és a *22.34. c)* feladat eredményeivel!**

22.37. **Szobahőmérsékletű szilárd testben a kristályrács egy atomja 10^{-10} m amplitúdójú és 10^{13} Hz frekvenciájú rezgést végez.**
a) **Mennyi ennek az atomnak a maximális sebessége rezgés közben?**
b) **Mennyi a maximális gyorsulása?**

22.38. **Hogyan lehet molekulanyalábot előállítani?**

22.39. **Miért csökken a molekulanyaláb intenzitása (vagyis a nyalábban mozgó részecskék száma), miközben a nyaláb gázon halad át?**

22.40. **A szobahőmérsékletű és légköri nyomású hidrogéngázban egy molekula átlagsebessége mintegy 2 km/s. Tegyük fel, hogy egyetlen ilyen molekula van csak jelen egy 10 cm élhosszú-**

ságú, kocka alakú edényben. Ez a molekula két szemközti fal között pattog.
Átlagosan mekkora erőt fejt ki az egyik falra?
Útmutatás: ismételjük át az I. kötetből a *3.10.* és a *3.16.* feladatok megoldását!

22.41. Egy molekulanyaláb, mely egyaránt $5{,}4 \cdot 10^{-26}$ kg tömegű molekulákból áll, a sebességre merőleges falba ütközik. A molekulák 460 m/s sebességgel csapódnak a falhoz, és ugyanekkora sebességgel pattannak vissza róla. Mennyi a fal egységnyi területére gyakorolt átlagos erő, ha a nyaláb cm^3-enként $1{,}5 \cdot 10^{14}$ számú molekulát tartalmaz?
Útmutatás: ismételjük át az I. kötetből a *3.10.* és a *3.16.* feladatok megoldását!

22.42. Értelmezzük az ideális gáz nyomását molekulárisan!
Útmutatás: A számítások egyszerűsítése végett tegyük fel, hogy az edény téglatest alakú, valamennyi molekula v sebességgel mozog, és az összes molekula $\frac{1}{6}$ része megy egy-egy fal irányába.
A megoldáshoz csak a *22.40.* és a *22.41.* feladatok megoldása után fogjunk hozzá!

22.43. Határozzuk meg 1 mol egyatomos gázban a molekulák összes mozgási energiáját mint a nyomás és a térfogat függvényét! (Az edény nem végez makroszkopikus mozgást.)
Útmutatás: használjuk fel a *22.42.* feladat eredményét!

22.44. 10 literes edényben $2 \cdot 10^5$ Pa nyomású egyatomos gáz van. Mennyi a molekulák összes mozgási energiája? (Az edény nem végez makroszkopikus mozgást.)

22.45. Határozzuk meg 1 mol egyatomos gázban a molekulák összes rendezetlen mozgási energiáját mint a *hőmérséklet* függvényét!
Útmutatás: használjuk fel a *22.43.* feladat eredményét és az ideális gáz állapotegyenletét!

22.46. Mennyi 1 mol He-gázban a molekulák összes rendezetlen mozgási energiája:
a) 300 K hőmérsékleten;
b) 100 K hőmérsékleten;
c) 900 K hőmérsékleten?

22.47. Mennyi az egyatomos gáz *egy molekulájának* átlagos mozgási energiája 300 °K hőmérsékleten? A kapott eredményt fejezzük ki eV-ban is!

22.48. *a)* Mennyi a normálállapotú neongázban ($M = 20{,}2$) egy molekula átlagos mozgási energiája?
b) Mennyi a sebességnégyzet átlaga?
c) Mennyi a sebességnégyzet átlagának négyzetgyöke? (Ezt szokás „átlagsebesség"-nek tekinteni.)

22.49. Hogyan lehet megmérni a gázmolekulák átlagsebességét?

22.50. Bizonyítsuk be, hogy két azonos hőmérsékletű egyatomos molekulájú ideális gázban az átlagsebességek a molekulasúlyok négyzetgyökével fordítottan arányosak!

22.51. Határozzuk meg az ideális gáz molekuláris modellje segítségével a héliumgáz *állandó térfogat* melletti fajhőjét!

22.52. Határozzuk meg az ideális gáz molekuláris modellje segítségével a héliumgáz *állandó nyomás* melletti fajhőjét!

22.53. Igazoljuk, hogy egyatomos, ideális gáz esetén
$$c_p : c_v = 5 : 3.$$

22.54. Magyarázzuk meg a szemléletes molekuláris modell alapján azt a jelenséget, amikor a gáz egy izzó fémhuzallal érintkezve felmelegszik!

22.55. Milyen hőmérsékletű argongázban érné el a molekulák átlagsebessége az első kozmikus sebességet ($v = 7{,}8$ km/s)? Az argon atomsúlya (kerekítve) 40.

22.56. Egy palack 0 °C-os hélium-neon gázkeveréket tartalmaz.
a) Mennyi a He-molekula átlagos mozgási energiája?
b) Mennyi a Ne-molekula átlagos mozgási energiája?
c) Mennyi a He-molekula átlagsebessége?
d) Mennyi a Ne-molekula átlagsebessége?

22.57. A molekulák átmenete a folyadékból a gázba és a gázból a folyadékba két ellentétes irányú folyamat.
a) Befolyásolja-e egymást a két egyidejűleg lejátszódó folyamat?
b) Lehet-e valamelyiket külön megfigyelni?

22.58. A Brown-mozgással kapcsolatban feleljünk a következő kérdésekre:
a) Átmeneti vagy időben állandó jelenség?
b) Függ a folyadék kémiai összetételétől?
c) Az edény rezgéseinek következtében lép fel?
d) Áramlásjellegű vagy rendezetlen?
e) Az átlagsebesség függ a részecske tömegétől?
f) Az átlagos mozgási energia függ a részecske tömegétől?
g) Az átlagsebesség függ a hőmérséklettől?
h) Az átlagos mozgási energia függ a hőmérséklettől?

22.59. A vízben oldott festékszemcsék Brown-mozgásáról mikroszkópon keresztül filmet készítünk. A film felvételeit kiértékelve lemérhetjük és kiszámíthatjuk a festékszemcsék látható mozgásának átlagsebességét.
a) Az így kapott sebességérték megegyezik-e a vízmolekulák átlagsebességével?
b) A látható mozgás átlagsebessége megegyezik-e a valódi mozgás átlagsebességével?

22.60. Milyen színű egy festékmolekula?

23. Atomfizika

Bevezető feladatok

23.1. *a)* Hány atom van 12 gramm szénben? (Szorítkozzunk a $^{12}C_6$ izotópra!)
b) Hány elektron van 12 gramm szénben?
c) Hány proton van 12 gramm szénben?
d) Hány neutron van 12 gramm szénben?

23.2. Másodpercenként hány elektron halad át egy vezető adott keresztmetszetén 8 A áramerősség esetén?

23.3. Két proton tömegénél fogva vonzza egymást, töltésénél fogva taszítja egymást. Melyik a kisebb erőhatás? Hányszor kisebb? Egy proton tömege $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; töltése $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. A gravitációs állandó $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$; a Coulomb-törvényben szereplő állandó $9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$.

23.4. Mutassuk meg, hogy az elektron nyugalmi energiája 0,511 MeV.

23.5. Hány joule, illetve hány eV energiával rendelkezik a vákuumban $5 \cdot 10^{-7}$ m hullámhosszú fénykvantum (foton)?

Gyakorló feladatok

23.6. Milyen tapasztalati, kísérleti tényből következik, hogy az elektromosság akkor és csak akkor atomos szerkezetű (vagyis van „elemi töltés"), ha maga a kémiai anyag is atomos szerkezetű? (Éppen ezt az „elemi kémiai anyag"-ot nevezték el „atom"-nak.)

23.7. Magyarázzuk meg a következő fogalmak jelentését:
a) gerjesztési energia,
b) ionizációs energia!

23.8. Soroljuk fel az atom és a belőle keletkezett ion

a) egyező,
b) eltérő legfontosabb tulajdonságait!

23.9. Mennyi a réz elektrokémiai egyenértéke, ha atomsúlya 63, vegyértéke pedig 2?

23.10. Hány amper erősségű áram kell ahhoz, hogy a réz-szulfát-oldatot két órán át elektrolizálva 10 gramm réz váljék ki az elektródon?

23.11. Függőleges tengelyű hengerkondenzátor fegyverzetei közé elektrolitot öntünk. Mi történik, ha a kondenzátorra feszültséget kapcsolunk, s az egészet függőleges irányú homogén mágneses térbe helyezzük?

23.12. Valamely elektron 1 V potenciálkülönbségen át gyorsul. Mennyivel növekszik a kinetikus energiája? Számítsuk ki ugyanezt egy protonra!

23.13. A $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg tömegű elektronra $4 \cdot 10^{-17}$ N erő hat. Feltételezve, hogy az elektron kezdeti mozgási energiája elhanyagolható:

a) Mennyi idő alatt jut az elektron 4 cm messzire?
b) Mennyi itt a sebessége?
c) Befolyásolja-e a jelenséget az elektronra ható földi nehézségi erő?

23.14. Elektrosztatikus eltérítésű katódsugárcsőben az elektronsugár becsapódási helyének az ernyő közepétől való távolsága (az ún. „eltérítés") a következő mennyiségektől függ:

a) az eltérítő lemezpár lemezeinek nagysága;
b) az eltérítő lemezpár lemezeinek távolsága egymástól;
c) az eltérítő lemezpár távolsága az ernyőtől;
d) az eltérítő lemezpárra kapcsolt feszültség;
e) az elektronokat felgyorsító anódfeszültség.

Vizsgáljuk meg, hogy a felsorolt mennyiségek *növelése* hogyan befolyásolja az eltérítést!

23.15. Az orvosi röntgenkészülék ernyőjén miért nem keletkezik éles kép?

23.16. A foton nyugalmi tömege zérus. Mennyi a mozgási energiája?

23.17. Tantálfémre a legnagyobb hullámhossz, amely még fotoelektront képes kiváltani, 2974 Å. Számítsuk ki a kilépési munkát!

23.18. Egy proton egy aranyatommal ütközik, és eredeti mozgásirányával 70°-os szöget bezáró irányban repül tovább („szóródik"). Sebességének nagysága gyakorlatilag változatlan. Az ütközés következtében milyen irányba mozdult el („lökődött vissza") a protonnál sokkal nagyobb tömegű aranyatom?

23.19. Mikor stabil egy atommag?

23.20. Adott 10^6 radioaktív atommag T felezési idővel. Közelítőleg hány mag marad meg $2T$ idő után?

Házi feladatok

23.21. Hány elektron van 3 cm³ vízben?

23.22. Mennyivel nő a rézelektród tömege réz-szulfát-oldatban, ha az elektrolizáló egyenáramú generátor 12 V feszültséget szolgáltat, és 1,8 kW teljesítményt ad le? A berendezés 7 órán át működik.

23.23. 6 V-os áramforrást használva, ezüst-nitrát-oldatból másfél óra alatt 1,14 gramm ezüst vált ki.

a) Mennyi töltés haladt át a vezetőn?
b) Mekkora volt az áramerősség?

23.24. Egy diódában a katód és az anód között 200 V a feszültség. Legalább mekkora az anódra érkező elektronok sebessége?

23.25. Egy triódában a katódon, a rács helyén és az anódon a potenciál rendre 0 V, − 2 V és 300 V. Egy elektron a katódot elhagyva 3 eV mozgási energiával rendelkezik.

a) Mekkora az elektron mozgási energiája, miközben áthalad a rácson?

b) Mekkora az elektron mozgási energiája, amikor becsapódik az anódba?

c) Mekkora rácsfeszültség szükséges ahhoz, hogy a 3 eV-os elektron ne jusson el az anódhoz?

23.26. Két függőleges, párhuzamos, elektromosan töltött fémlemez között egy proton gyorsulása $4 \cdot 10^{11}$ m/s² vízszintesen jobb felé.

A proton kilép a bal oldali (pozitívan töltött) lemezről $4 \cdot 10^{4}$ m/s sebességgel; kezdősebessége 60°-os szöget zár be a vízszintessel. A két lemez távolsága 4 cm.
a) Mennyi a repülési idő?
b) Hol csapódik be a proton a jobb oldali lemezbe? A földi gravitációs erőtér hatása elhanyagolható.

23.27. Egy betatronban a felgyorsított elektron a fénysebesség 90%-ával egyenlő sebességgel 2 m sugarú körpályán kering. Mennyi a sugárirányú gyorsulása?

23.28. Számítsuk ki, hogy 10 kV potenciálkülönbség befutása közben mekkora sebességre gyorsul fel
a) egy proton;
b) egy deuteron?
A kezdősebesség mindegyik esetben elhanyagolható.

23.29. A proton tömege az elektron tömegének 1836-szorosa. Milyen sebességű protonnak van
a) ugyanannyi mozgási energiája, mint egy 5000 eV-os elektronnak;
b) ugyanannyi mozgásmennyisége (impulzusa), mint egy 5000 eV-os elektronnak?
(Az elektron tömege $9{,}1 . 10^{-31}$ kg.)

23.30. Vízszintesen keletről nyugat felé mozgó elektron mágneses térbe kerül, és lefelé eltérül. Milyen irányú a mágneses térerősség?

23.31. Egy foton energiája 1 MeV.
a) Mennyi a vákuumbeli hullámhossz?
b) Milyen sugárzásról van szó?

23.32. Kisebb vagy nagyobb valamely atommag tömege az őt alkotó nukleonok tömegének összegénél?

Ajánlott feladatok

23.33. Miből vannak az elektronmikroszkóp lencséi?

23.34. Határozzuk meg a 3 mm² keresztmetszetű rézhuzalban az elektronok átlagos rendezett sebességét 4 A áramerősség esetén, ha minden rézatom a fémben egy „szabad elektronnal" rendelkezik. A réz atomsúlya 64, sűrűsége 8,9 g/cm³.)

23.35. Alumínium-oxid és kriolit olvadékból hány kWh elektromos energia befektetésével lehet 1 kg alumíniumot kiválasztani? A felhasznált energia 40%-a az elektrolizálásra, 60%-a az olvadék lehűlésének és megdermedésének megakadályozására fordítódik. Az elméleti kiválasztási feszültség 2,5 V.

23.36. Gyenge savval töltött elektrolitkádra 40 V feszültséget kapcsolunk. A katódon keletkező hidrogéngáz 400 cm³ térfogatú térben gyűlik össze. Bizonyos idő után ebben a térben 1,2 atmoszféra nyomás alakul ki. A hőmérséklet 20 °C. Mennyi az áramforrás által végzett munka?

23.37. Síkkondenzátor vízszintes síkú lemezei között a távolság 2,5 cm, a feszültség 3000 V. Egy olajcsepp, amely $1{,}6 . 10^{-19}$ C (1 elektronnyi) töltést kapott, éppen lebeg az elektromos térben. Mekkora ennek az olajcseppnek a tömege, ha a lemezek között levegő van? A levegő sűrűsége az olaj sűrűségének másfél ezreléke.

23.38. Mutassuk meg, hogy mágneses erőtér hatására nem változhat meg a mozgó töltött részecske sebességének nagysága!

23.39. Milyen gyorsítófeszültség hatására érheti el egy elektron a fénysebesség 80%-át? Vegyük figyelembe, hogy nagy sebességek esetén a tömeg sebességfüggése már nem hanyagolható el!

23.40. Az $U = 340\,000$ V potenciálkülönbséget befutó elektron végsebességének számításánál egy tanuló nem vette figyelembe a tömeg sebességfüggését. Mekkora hibát követett el? (L. *23.39.* feladat!)

23.41. Egy gyorsítócsőben a céltárgyra 200 keV energiájú deuteronnyaláb érkezik, az áramerősség 300 μA. Mennyi energiát kell másodpercenként elvezetni a céltárgyról, hogy ne melegedjék?

23.42. A hidrogénatomban a $9 \cdot 10^{-31}$ kg tömegű és $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C töltésű elektron a Bohr-modell szerint körpályán kering a nyugalomban levő, nála 1836-szor nagyobb tömegű proton körül. A körpálya sugara $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m, az elektron sebessége ezen a pályán $2{,}2 \cdot 10^{6}$ m/s.
a) Mekkora gravitációs vonzóerővel hat a proton az elektronra?
b) Mekkora vonzóerőre van szükség az elektron körpályán tartásához?
c) Mekkora elektromos vonzóerővel hat a proton az elektronra?

23.43. Hidrogénmolekulában a két hidrogénatommag („proton") egyensúlyi helyzetének távolsága $7 \cdot 10^{-11}$ m. Ha a két proton ennél közelebbre vagy távolabbra kerül egymástól, fellép egy visszatérítő erő, amely arányos az elmozdulással. Ha például a protonok egyenként 10^{-11} m-re távolodnak az egyensúlyi helyzettől, mindegyik protonra $1{,}1 \cdot 10^{-8}$ N erő hat. Mennyi a hidrogénmolekula rezgésének frekvenciája? A proton tömege $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

23.44. Az emberi szem már alig veszi észre azt a sárga ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m) fényt, amely másodpercenként $1{,}7 \cdot 10^{-18}$ J energiát szállít a retinához. Hány foton jut ekkor a szembe másodpercenként?

23.45. Az alábbiakban felsoroljuk néhány fémre a kilépési munka értékét:
Cs: 2,00 eV; Cu: 4,00 eV; Zn: 3,6 eV

a) Határozzuk meg mindegyik esetben a fényelektromos hatás kiváltásához szükséges maximális hullámhosszat!

b) Látható fény esetén melyik esetben léphet fel a fényelektromos hatás?

23.46. Mekkora U feszültségen működik az a röntgencső, amelynek legrövidebb kisugárzott hullámhossza 0,2 Å?

23.47. Egy 50 kV feszültségen 2 mA áramot felvevő röntgencső másodpercenként $5 \cdot 10^{13}$ számú fotont sugároz ki. A csőre jellemző átlagos sugárzási hullámhossz 10^{-4} μ. Számítsuk ki a cső energetikai hatásfokát! Magyarázzuk meg, hogy mire fordítódik a felvett energia többi része!

23.48. A *23.46.* feladatban említett röntgencső sugárzásának intenzitását 1 cm vastag alumínium vagy 0,01 cm vastag ólomlemez csökkenti a felére. Ugyanakkor a rádium γ-sugárzását 50 cm vastag alumínium vagy 1,3 cm vastag ólomlemez csökkenti a felére.

a) Hányad részére csökkenti a röntgensugár intenzitását az 50 cm vastag alumínium és az 1,3 cm vastag ólomlemez?

b) Hányad részére csökkenti a rádium γ-sugárzásának intenzitását az 1 cm vastag alumínium, illetve a 0,01 cm vastag ólomlemez?

23.49. Ha a rádium felezési ideje 1600 év, akkor valamely rádiummennyiségnek hányad része bomlik el 1000 év alatt?

23.50. A 238-as tömegszámú uránmag nem stabil, 234-es tömegszámú tóriummaggá és α-részecskévé bomlik el. Az α-részecske $1{,}4 \cdot 10^6$ m/s sebességgel emittálódik. Feltételezve, hogy a bomlás pillanatában az uránmag nyugalomban volt, számítsuk ki a tóriummag „visszalökési" sebességét!

23.51. A 60-as tömegszámú nikkelizotóp nem stabil. Radioaktív bomlása során γ-fotont emittál. Közben a mag visszalökődik $6{,}6 \cdot 10^3$ m/s sebességgel. Mennyi a γ-foton mozgásmennyisége (impulzusa)? A ^{60}Ni-mag tömege $9{,}9 \cdot 10^{-26}$ kg.

23.52. Egy $1{,}5 \cdot 10^7$ m/s sebességű α-részecske nyugalomban levő aranyatom magjával ütközik. Számítsuk ki az aranyatom magjának visszalökődési sebességét, ha

a) az α-részecske az ütközés után ellenkező irányban repül gyakorlatilag változatlan nagyságú sebességgel;

b) az α-részecske eredeti mozgásirányával 30°-os szöget bezárva repül tovább, eredeti sebességével.

Az aranyatom magjának tömege 197 atomi tömegegység, az α-részecske tömege 4 atomi tömegegység.

23.53. Amikor a radioaktív rádiumatommag sugároz, egy α-részecske és egy radonatommag keletkezik:

$$^{226}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}\mathrm{Rn} + {}^{4}\mathrm{He}.$$

(Az α-részecske héliumatommag.) A bomláskor felszabaduló nukleáris energia 4,87 MeV. Mennyi a kibocsátott α-részecske mozgási energiája?

23.54. A bizmut radioaktív atommagja α-részecske kibocsátása mellett bomlik tellúriummaggá:

$$^{212}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{208}\mathrm{Tl} + {}^{4}\mathrm{He}.$$

Ha az α-részecske mozgási energiája 6,2 MeV; akkor:

a) mennyi a tellúriumatommag mozgási energiája?

b) Mennyi a folyamatban felszabaduló nukleáris energia?

23.55. Egy 235-ös tömegszámú uránnal működő atomreaktor 100 kW teljesítményt szolgáltat. Tudva, hogy egy uránmag hasadásakor $2 \cdot 10^8$ eV energia szabadul fel, határozzuk meg:

a) a maghasadások másodpercenkénti számát;

b) azt az időt, amely alatt az uránatomok eredeti száma 1%-kal csökken, ha a reaktorban 1,2 kg urán volt.

23.56. Eredetileg különálló proton- és neutron ütközés után deuteronná egyesül. Az atomi tömegegységekben kifejezett nyugalmi tömegek:
proton: 1,00728; neutron: 1,00866; deuteron: 2,01355. Mennyi a reakciónál kisugárzott elektromágneses sugárzás energiája?

23.57. A neutron szabad állapotban nem stabilis. Tizenkét perces felezési idővel elektronkibocsátás mellett protonná alakul át. Azt jelenti ez, hogy a neutron elektronból és protonból tevődik össze? (Vagyis hogy a neutron „elektronból és protonból áll"?)

23.58. Miért van szükség lassú neutronok előállítására?

23.59. *a)* Miért alkalmas a víz és a paraffin (sok H-atomot tartalmazó anyagok) a gyors neutronok lelassítására?
b) Lecsökkenhet-e lassítás közben tetszőleges kis értékre a neutronok átlagos mozgási energiája?

23.60. Mi az antirészecskéje a következő elemi részecskéknek:
a) pozitron,
b) antineutron,
c) neutrino,
d) foton?

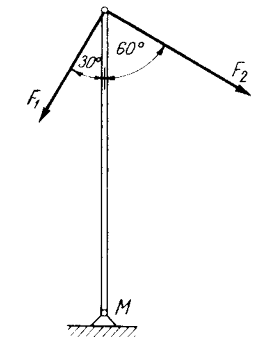
24. Ismétlő feladatcsoportok I.

Felvételi feladatok
(Egy feladatcsoport megoldásának időtartama 120 perc.)

A.1. Az ábra szerinti két erő eredő forgatónyomatéka az M pontra zérus.

a) Határozzuk meg a két erő nagyságának arányát!

b) Milyen irányú lesz ekkor az eredő erő?



A.2. Egy gázpalackban 30 °C-nál $8 \cdot 10^6$ Pa nyomású gáz van. A palackot melegítve, mekkora hőmérsékletnél lép működésbe a $8{,}5 \cdot 10^6$ Pa nyomásra beállított biztosító szelep?

A.3. 25 kg tömegű testet húznak 30°-os lejtőn felfelé, a lejtővel párhuzamos 250 Newton erővel.

a) Mekkora gyorsulással mozog a test, ha a számításoknál a súrlódást elhanyagolhatjuk?

b) Mekkora lesz a sebesség 5 m út megtétele után?

c) Mekkora a gyorsulás, ha a súrlódást is figyelembe vesszük? A súrlódási együttható 0,2.

A.4. Fényképezőgépünk 5 cm gyújtótávolságú lencséjével a lencse állítása révén 50 cm és ∞ közti tárgyakról kaphatunk éles képet a filmsíkban.

a) A lencsétől mekkora távolságban keletkezik az 50 cm-re levő tárgy éles képe?

b) Milyen minimális hosszúságú közgyűrűt kell a lencse és a film közé iktatnunk, hogy 15 cm távolságban levő tárgyakról éles képet nyerjünk?

A.5. Egy váltakozó áramú kör teljesítménye 500 watt, feszültsége 1000 V, árama 0,8 A.
a) Mekkora a fázisszög?
b) Mekkora az impedancia?
c) Mekkora az ohmos ellenállás?

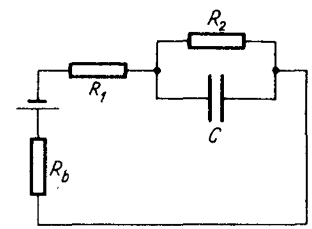
A.6. A 0,8 Vs/m^2 indukciójú homogén mágneses térben az 50 cm hosszú vezető 20 cm sugarú körpályán forog miközben állandóan párhuzamos marad az indukcióvonalakra merőleges forgástengellyel. A fordulatszám 3000/perc.
a) Mekkora a feszültség maximális értéke?
b) Írjuk le a feszültség időbeli lefolyását!
c) Mennyit mutat egy elektrodinamikus műszer, ha ezt a feszültséget rákapcsoljuk?

B.1. 6 kg tömegű testet nyugalmi helyzetéből teljesen sima, vízszintes síkon, állandó 5 N vízszintes erővel húzunk.
a) Mekkora gyorsulással mozog a test?
b) Mekkora sebességre gyorsul fel az indulástól számított 80 cm-es út végére?

B.2. Egy váltóáramú elektromotor hasznos teljesítménye 5 kW, hatásfoka 80%, a $\cos \varphi = 0{,}87$.
Milyen erősségű áramot vesz fel a 220 V-os hálózatból?

B.3. 10 m nagyságú tárgyról 0,001 nagyítású fényképet akarunk készíteni olyan fényképezőgéppel, melynek objektívje 7,5 cm gyújtótávolságú gyújtólencséből készült.
a) Milyen messze kell a fényképezőgép tárgylencséjét a tárgytól elhelyezni?
b) A lencsétől mekkora távolságra keletkezik a kép, és mekkora lesz a tárgy képe a fényképen?

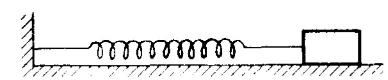
B.4. $U_e = 1{,}8$ volt elektromotoros erejű telepre sorosan kapcsolunk egy $R_1 = 4$ ohm, majd ehhez $R_2 = 8$ ohm ellenállást és egy 2 μF kapacitású kondenzátort párhuzamos kötésben az ábra szerinti elrendezésben. A telep belső ellenállása 1 ohm.



a) Mekkora feszültségre töltődik fel a kondenzátor?
b) Mekkora lesz a kondenzátor töltése?

B.5. Egy 5 literes, csappal ellátott tartályban levő levegőt $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson, nyitott csap mellett 100 °C-ra hevítünk, majd a csapot lezárjuk és a benne levő levegőt lehűtjük 0 °C-ra.
a) Mekkora lesz a nyomás?
b) Mennyi hőmennyiséget adott le a gáz a lehűlés során?
A normálállapotú levegő sűrűsége 0,0013 g/cm^3. A levegő fajhője állandó térfogaton $7{,}12 \cdot 10^2$ J/kg °C.

B.6. Egy teljesen sima, vízszintes síkon rugóra erősített tömeg 30 min^{-1} frekvenciájú rezgést végez.
a) Mennyi idő alatt jut a nyugalmi helyzetből a szélső helyzetbe?
b) Mekkora a maximális kitérés, sebesség és gyorsulás, ha a nyugalmi helyzetből 0,1 s alatt 1 cm-es utat tesz meg?
c) Ábrázoljuk a kitérés, a sebesség és a gyorsulás változását az idő függvényében!



C.1. Egy súlytalannak tekinthető, középen alátámasztott deszka (mérleghinta) egyik oldalán az alátámasztási ponttól 3 m, illetve 1,5 m távolságra egy-egy 450 N súlyú gyermek ül.

a) A másik oldalon az alátámasztási ponttól mekkora távolságra kell egy 650 N súlyú gyermeknek elhelyezkednie, hogy a hinta egyensúlyban legyen?

b) Mekkora ebben az esetben az alátámasztási pontra ható erő?

C.2. Egy 0,2 kg tömegű, 80 °C-os fémdarabot szigetelt edényben levő, 0,5 l térfogatú, $2{,}51 \cdot 10^3$ J/kg °C fajhőjű, $8 \cdot 10^2$ kg/m^3 sűrűségű, 20 °C-os olajba dobunk. Hőkiegyenlítődés után a közös hőmérséklet 24 °C lesz. Mennyi a fém fajhője? (Mindenféle hőveszteségtől eltekintünk.)

C.3. Egy 800 N súlyú testet nyugalmi helyzetéből indítva, állandó gyorsulással kötéllel húzunk függőlegesen felfelé. A test ily módon 5 s alatt 25 m magasra jut.

a) Mekkora erő ébred a kötélben? (A légellenállást hanyagoljuk el.)

b) Mekkora munkát végzett ez az erő, és mire fordítódott a munka? Adjuk meg az egyes energiafajták számszerű értékét is!

C.4. Valamely tárgynak 4-szeres lineáris nagyítású képét akarjuk előállítani a tőle 1 m távolságban elhelyezett ernyőn.

a) Milyen gyújtótávolságú vékony lencsét kell használnunk?

b) Mekkora távolságban kell lennie a lencsének a tárgytól?

C.5. Egy csövön percenként 3 liter víz áramlik át. A víz hőmérsékletét villamosmelegítő-berendezés segítségével 60 °C-kal kívánjuk növelni.

a) Milyen teljesítményű elektromos fűtést kell alkalmaznunk, ha a berendezés hőátadási hatásfoka 80%?

b) Mekkora legyen a fűtőszál ellenállása, ha a feszültség 220 V?

C.6. 220 V kapocsfeszültségű hálózatra sorosan kapcsolunk egy ohmikus ellenállást, egy indukciós tekercset és egy kondenzátort. Ha a periódusszám 50 Hz, feszültségi rezonanciát észlelünk. A körben ekkor 20 A áram folyik. Ha viszont a periódus 100 Hz, akkor az áram 11 A-re csökken. Mekkora az ohmikus ellenállás, a tekercs indukciós együtthatója és a kondenzátor kapacitása?

D.1. Egy 2 kg tömegű fémdarabot fonálra kötve vízbe lógatunk. Ekkor a fonalat 17 N erővel kell tartani. Mennyi a fém sűrűsége?

D.2. Alumíniumot elektrolízissel állítunk elő 30 000 amperrel, 5 volt feszültség mellett.

a) Mennyi alumínium válik ki 24 óra alatt?

b) Mennyi elektromos energiára van ehhez szükségünk?
Az alumínium elektrokémiai egyenértéke 0,000093 gramm/coulomb.

D.3. 12 cm gyújtótávolságú vékony gyűjtőlencsétől 20 cm távolságban elhelyezünk egy tárgyat.
a) Hová kell helyeznünk az ernyőt, hogy azon éles képet kapjunk?
b) E beállítás után a tárgy és az ernyő távolságát változatlanul hagyva mennyivel kell eltolnunk a lencsét, hogy ismét éles képet kapjunk?

D.4. Valamely balesetnél egy 1500 kg tömegű gépkocsi maximális fékezéssel 36 m-es fékúton állt meg. A helyszínre kiszállt rendőrség az ugyanazon gépkocsival végzett kísérlettel megállapította, hogy 54 km/h sebességről 18 m hosszú úton lehet a kocsit lefékezni.

a) Mekkora volt a kocsi sebessége a baleset előtt?

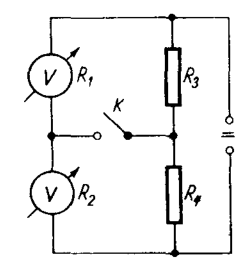
b) Mekkora volt az állandónak tekinthető fékezőerő?

D.5. 1 kg-os, 80 °C hőmérsékletű ólomlapra 30 m magasról 1 kg-os, 0 °C hőmérsékletű ólomgolyót ejtünk. Hány fokos lesz a hőmérséklet a hőkicserélődés után? A veszteségektől tekintsünk el. Az ólom fajhője 125,6 J/kg °C.

D.6. Az ábrán látható feszültségmérők belső ellenállása $R_1 = 5000$ ohm, $R_2 = 3000$ ohm. A velük párhuzamosan kötött ellenállások: $R_3 = R_4 = 4000$ ohm. A rendszerre 200 voltos állandó feszültséget kapcsolunk. Mekkora feszültséget jeleznek a műszerek, ha

a) a K kapcsoló nyitva van,

b) a K kapcsoló zárva van?

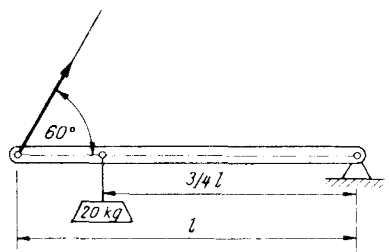


E.1. 5 kg tömegű testet 6 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítunk.
a) Mennyi induláskor a test mozgási energiája?
b) Milyen magasra emelkedik a test?
A légellenállástól tekintsünk el.

E.2. 40 m hosszú vörösrézből készült vezetéken 0,5 A erősségű áram halad át. A két végpont között a feszültség 2 V.
a) Mekkora a vezeték ellenállása?
b) Mekkora a vezeték keresztmetszete?
A vörösréz fajlagos ellenállása 0,017 ohm mm^2/m.

E.3. 2,5 [illegible] 77 °C hőmérsékletű és $2{,}424 \cdot 10^5$ Pa nyo- [illegible]
a) Mekkora az oxigéngáz tömege?
b) Hány fokos hőmérsékleten lesz a nyomás ismét 2,4 atm, ha az oxigén 40%-át elhasználjuk?
Az oxigén sűrűsége normálállapotban 1,43 g/l.

E.4. Az ábra szerinti 12 kg tömegű homogén rúd a jobb oldali végén átmenő vízszintes tengely körül elhanyagolható súrlódással foroghat. A megjelölt helyen 20 kg tömegű teher függ. Mekkora erővel kell húznunk a másik végéhez erősített zsinórt a rúddal 60° szöget bezáró irányban, hogy egyensúly legyen?



E.5. A tárgy és ernyő közötti távolság rögzített. Milyen feltételt kell a lencse fókusztávolságának kielégítenie, ha a tárgyról az ernyőn valódi képet akarunk létrehozni?

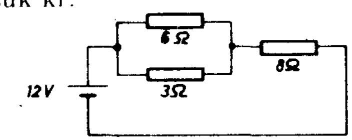
E.6. Egy 50 ohmos ellenállást egy ismeretlen önindukciójú tekerccsel sorbakötve és a 220 V, 50 periódusú hálózatra kapcsolva 2 A áramot mérünk. Ha még egy kondenzátort is sorbaiktatunk, az áramerősség akkor is 2 A marad.
a) Mekkora a tekercs önindukciója és a kondenzátor kapacitása? (Tételezzük fel, hogy a tekercsnek és a kondenzátornak nincs saját ohmos ellenállása.)
b) Mekkora teljesítményt vesz fel az áramkör kondenzátor nélkül, illetőleg kondenzátorral?

25. Ismétlő feladatcsoportok II.

Felvételi feladatok
(Egy feladatcsoport megoldásának időtartama 120 perc.)

F.1. Egy ólomlövedék becsapódásakor kinetikus energiájának 20 százaléka fordítódik saját melegítésre. Mekkora volt a sebessége, ha a lövedék 27 °C-ról 177 °C-ra melegedett?
Az ólom fajhője 125,6 J/kg °C.

F.2. A vázlat szerinti áramkörben számítsuk ki:
a) a főág áramát,
b) a telep által szolgáltatott teljesítményt.
(A telep belső ellenállása elhanyagolható.)



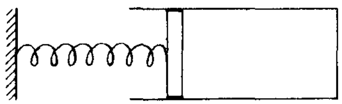
F.3. 24 mm × 36 mm nagyságú negatívról 50 mm gyújtótávolságú lencsével 6 cm × 9 cm legkisebb és 36 cm × 54 cm legnagyobb méretű képeket akarunk készíteni. A negatívtól számított milyen távolsági határok között kell a lencsének eltolhatónak lennie?

F.4. Egy 15 kg tömegű testet egy 30° hajlásszögű lejtőre helyezünk. Mekkora, a lejtővel párhuzamos irányú erővel kell hatnunk a testre, ha annak a lejtővel párhuzamosan felfelé mutató 0,5 m/s^2 gyorsulást akarunk adni és
a) a súrlódástól eltekintünk,
b) a test és a lejtő közötti csúszási súrlódást 0,2 együtthatóval figyelembe vesszük.

F.5. Sorbakapcsolt ellenállásból és önindukciós tekercsből álló kört olyan generátorra kapcsolunk, amelynek feszültségét a t idő függvényében
$U = 500 \cdot \sin 314\,t$ függvény írja le. Ezen feszültség hatására a körben folyó áramot az:
$I = 2 \cdot \sin\,(314\,t - \pi/3)$ függvény adja meg.

a) Mekkora a hatásos teljesítmény?
b) Mekkora az ellenállás és az induktivitás nagysága? (U voltban, I amperben, t másodpercben értendő)

F.6. Egy 100 cm^2 keresztmetszetű hengeres edényt egyik végén súrlódásmentesen mozgatható dugattyú zár el. Az edényben 10^5 Pa nyomású, 300 K hőmérsékletű és 1000 cm^3 térfogatú levegő van. A külső légnyomás ugyancsak 10^5 Pa. A dugattyúhoz az ábra szerint hozzáerősített rugó ezen helyzetben feszítetlen állapotban van. Mekkora lesz az edényben a nyomás, ha a benne levő levegőt 600 K-re hevítjük? A rugó 10 N erő hatására 0,1 cm-rel rövidül meg.



G.1. Egy 30°-os, súrlódásmentes lejtőn nyugalmi helyzetből elindul egy test. Mennyi idő alatt tesz meg 19,8 cm hosszú utat?

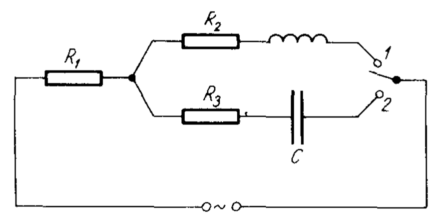
G.2. Négy darab, egyenként 1,5 volt elektromotoros erejű és 2 ohm belső ellenállású galvánelemet
a) sorbakapcsolva,
b) párhuzamosan kapcsolva 2 ohm ellenállású fogyasztóra kapcsolunk. Mekkora erősségű áram megy át mindegyik esetben a fogyasztón?

G.3. 20 °C hőmérsékletű, állandó nyomáson tartott levegőt hány fokkal kell felmelegíteni, hogy sűrűsége az eredeti érték 8%-ával csökkenjen?

G.4. Planparalel üveglemezre 60°-os beesési szöggel érkező fénysugár a lemezben 13 cm utat tesz meg. A kilépő sugár eltolódása a beesőhöz képest 5,5 cm. Mennyi az üveg törésmutatója?

G.5. Egy 5 dm^2 területű deszka a vízen úszik. Egy kődarabot a deszkára helyezve a deszka 4 mm-rel mélyebben merül be. Ugyanezt a követ alulról a deszkára akasztva a deszka bemerülése az eredetihez képest csak 2,4 mm-rel növekszik. Mennyi a kő sűrűsége?

G.6. Az ábra szerinti áramkörben $R_1 = R_2 = R_3 = 50$ ohm; $L = 1$ henry; $C = 20$ mikrofarad. Mennyi lesz az áramerősség és a felvett teljesítmény az 1 illetve 2 kapcsolóállásban
a) 50 Hz frekvenciájú, 110 V (effektív) feszültség,
b) 110 V egyenfeszültség esetén?



II.1. *a)* Mekkora az ellenállása egy 60 W, 220 V-os izzónak üzemi állapotban?

b) Hány coulomb töltés halad át rajta 1 perc alatt?

II.2. Egy szivattyú 6,2 liter vizet emel másodpercenként 7 m magasra.

a) Mekkora a szivattyú hasznos teljesítménye?

b) Mekkora teljesítményű motorra van szükség, ha a szivattyú hatásfoka 70%?

II.3. Egy gyűjtőlencse a tőle 48 cm messze levő tárgyról éles képet ad az ernyőn. Ha a tárgyat a lencsétől 30 cm-re helyezzük el, akkor az ernyőt 4 cm-rel távolabb kell vinnünk a lencsétől, hogy ismét éles képet kapjunk. Mennyi a lencse gyújtótávolsága?

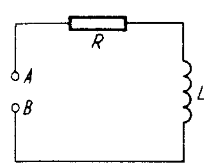
II.4. Egy 3 m/s egyenletes sebességgel felfelé mozgó lift elhaladása után 4 másodperccel egy követ hajítunk fel mellette 20 m/s kezdősebességgel.
Milyen magasságban találkozik a lift és a kő? (A számításnál a nehézségi gyorsulást 10 m/s^2 -nek vehetjük.)

II.5. Zárt lombikban 0 °C hőmérsékleten $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomású levegő van.

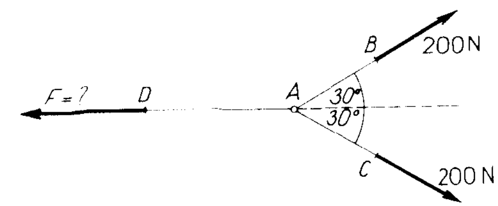
a) A lombikban levő levegőt 50 °C-ra melegítjük fel. A levegő tömegének hány százalékát kell ezen a hőmérsékleten kiengednünk, hogy a nyomás ismét $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa legyen?

b) A levegő kiengedése után a lombikot újra lehűtjük 0 °C-ra. Mennyi most benne a levegő nyomása?

II.6. R ohmos ellenállás és L önindukciójú tekercs sorba van kapcsolva. Ha az AB pontra 300 V-os egyenfeszültséget kapcsolunk, az áramkör teljesítményfogyasztása 90 W. Ha az AB pontokra 50 Hz frekvenciájú, 300 V csúcsértékű váltakozó feszültséget kapcsolunk, az áramkör által felvett hatásos teljesítmény 13 W. Mekkora az ellenállás és mekkora a tekercs önindukciója? A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható!



I.1. Az ábrán látható módon három kötelet az A pontban összekötünk. A kötelek B, illetve C végét egy-egy fiú 200 – 200 N erővel húzza. Mekkora erőt kell kifejtenie egy harmadik fiúnak a D pontban, hogy egyensúly legyen?



I.2. Egy villamos melegítő $1{,}512 \cdot 10^5$ J hőmennyiséget ad le 10 perc alatt.

a) Hány watt a teljesítménye?

b) Hány ohm a melegítő ellenállása, ha 24 V-on üzemeltetjük?

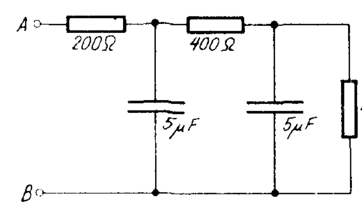
I.3. Egy 20 cm gyújtótávolságú lencsével kétszeres nagyítású képet akarunk egy tárgyról előállítani. Számítsuk ki a tárgytávolságot és a képtávolságot, ha a kép fordított állású, és arra az esetre, ha egyenes állású! A sugármenetet is vázoljuk fel!

I.4. Egy 30 l-es palackban $3 \cdot 10^6$ Pa nyomasu, egy másik 20 l-es palackban 10^6 Pa nyomású levegő van, egyaránt 57 °C hőmérsékleten.

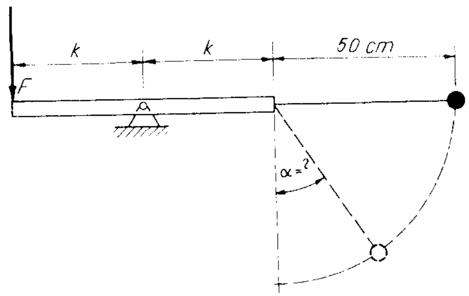
a) Ha a két palackot csővel összekötjük, mennyi lesz a keveredés után a nyomás? (A hőmérsékletet állandónak vehetjük.)

b) Mennyi az összes levegő tömege? (A levegő sűrűsége normál állapotban 1,3 g/l.)

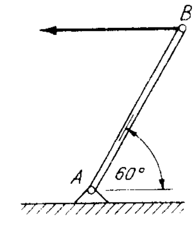
I.5. A rajz szerinti kapcsolásban az AB pontokra 40 V egyenfeszültséget kapcsolunk. Mekkora a kondenzátorok töltése?



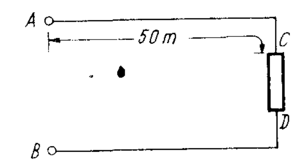
I.6. Egyenlő karú emelő egyik végére 50 cm hosszú fonálon 3 kg tömegű golyót kötünk, és ezt a golyót vízszintes helyzetből mint ingát elengedjük. Az emelő másik végét mindig akkora függőleges irányú erővel egyensúlyozzuk, hogy az emelő állandóan vízszintes marad. Az inga mely helyzetében kell éppen 30 N erővel leszorítani az emelőt?



J.1. Egy 100 N súlyú, egyenletes tömegeloszlású rúd az A pont körül függőleges síkban, súrlódás nélkül elfordulhat. Mekkora vízszintes irányú erőt kell alkalmaznunk a B pontban, ha azt akarjuk, hogy a rúd a rajzolt helyzetben egyensúlyban legyen?



J.2. Egy 220 V feszültségű villamos melegítő teljesítménye 1100 W. A melegítő az áramot két szál, egyenként 50 m hosszú 2,5 mm² keresztmetszetű vezetéken kapja úgy, hogy a melegítő CD kapcsain a feszültség 220 V. Mekkora a feszültség az AB pontokon? (A vezeték anyagának fajlagos ellenállása 0,02 ohm mm²/m.)



J.3. Egy vékony lencse segítségével kétszeres nagyítású képet állítunk elő egy tárgyról. Ezután az ernyőt 8 cm-rel közelebb viszszük a lencséhez, és a tárgy mozgatásával megkeressük az éles képet. A nagyítás ekkor 1,68. Mekkora a lencse gyújtótávolsága?

J.4. 2 liter térfogatú, normálállapotú levegővel 335 J hőmennyiséget közlünk

a) egyszer úgy, hogy térfogata marad állandó,
b) máskor úgy, hogy a nyomása marad állandó.

Mekkorák lesznek az állapotjelzők (p, V, T) az egyik, ill. a másik esetben?

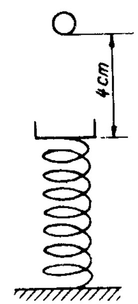
A levegő sűrűsége normálállapotban, vagyis $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson és $t = 0$ °C hőmérsékleten 1,3 kg/m³; fajhője állandó térfogaton $7{,}12 \cdot 10^2$ J/kg °C; állandó nyomáson 10^3 J/kg °C.

J.5. Egy 2000 menetszámú, 20 cm hosszú tekercs belsejében egy másik, vele azonos tengelyű, 400 menetszámú, 5 cm² keresztmetszetű tekercs van. A külső tekercsben 10 A áram folyik. A tekercsek belsejét levegő tölti ki.
Mekkora feszültség indukálódik a belső tekercs végpontjai között, ha a külső tekercs áramát 0,1 s alatt egyenletesen zérusra csökkentjük?

J.6. Az ábra szerinti függőleges tengelyű 1 N/cm rugóállandójú spirálrugóra 4 cm magasságból 0,1 kg tömegű golyót ejtünk.

a) **Mekkora lesz a rugó maximális összenvomódása?** (Az energiaveszteségektől tekintsünk el.) ($g \approx 10\ m/s^2$)

b) **Tételezzük fel, hogy a golyó a rugó súlytalannak tekinthető tányérjába beleragad. Mekkora lesz az előálló függőleges rezgés amplitúdója és frekvenciája?**



26. Ismétlő feladatcsoportok III.

Felvételi feladatok

(Egy feladatcsoport megoldásának időtartama 120 perc.)

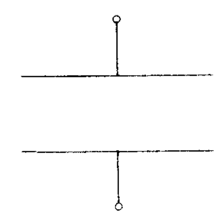
1. 100 N súlyú követ fonálon vízbe lógatunk. A kő sűrűsége $2{,}7 \cdot 10^3\ kg/m^3$.
Mekkora erővel kell a fonalat tartani?

2. 50 g tömegű, -20 °C hőmérsékletű alumíniumdarabot 0 °C hőmérsékletű vízbe dobunk.
Mennyi jég keletkezik?
Az alumínium fajhője $9{,}21 \cdot 10^2$ J/kg °C. A víz olvadáshője $3{,}35 \cdot 10^5$ J/kg. A veszteségeket hanyagoljuk el.

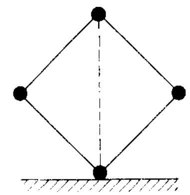
3. Izzólámpát és egy réz-szulfát-oldattal töltött elektrolizáló edényt sorosan kapcsolunk a feszültségforrásra.
A lámpa izzószálán 200 V a feszültség. A berendezés üzemeltetési ideje alatt az izzólámpa 0,016 kWh energiát fogyaszt.
Mennyi vörösréz válik ki az elektrolizáló edényben?
1 C töltés 0,33 mg vörösrezet választ le.

4. Sík-domború lencsétől 50 cm-re egy tárgyat helyezünk el, ekkor a kép a lencsétől 200 cm távolságban keletkezik.
Ha a lencse anyagának törésmutatóját 20%-kal nagyobbnak választjuk, a tárgytávolság és képtávolság egyaránt 50 cm lesz.
Mennyi a sík-domború lencse görbületi sugara?

5. Egy 100 V feszültségre töltött kondenzátor vízszintes lemezei 2 cm távolságra vannak egymástól.
Mekkora töltése van egy a kondenzátor lemezei közötti homogén elektromos erőtérben levő 10^{-15} kg tömegű olajcseppnek, ha az éppen lebeg?



K.6. 3 m élhosszúságú négyzet csúcsaiban 50 kg-os tömegek vannak. A négyzet átlója függőleges helyzetű. Ezután a négyzet saját síkjában eldől.
Mekkora az egyes tömegek sebessége, amikor a négyzet egyik oldala földet ér?



1. Vízszintes talajon 10 kg-os tömeget egyenletes sebességgel akarunk húzni.
a) Mekkora húzóerő szükséges, ha a súrlódási tényező 0,2?
b) Mennyi hő fejlődik 200 m-es vontatás folyamán?

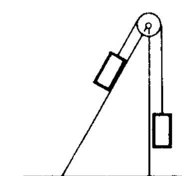
2. Mennyi idő alatt fogyaszt egy 220 V feszültségre kapcsolt, 80 ohm ellenállású villamos melegítő 10 Ft ára elektromos energiát, ha 1 kWh ára 1,50 Ft?

3. Víz alatt álló függőleges oszlop árnyéka 1 m, amikor a sugarak 45°-os szöggel érnek a víz felszínére. Milyen magas az oszlop? (A víz törésmutatója 4/3.)

4. Kaloriméterben 200 g víz-jég keverék van. Ha 40 g 100 °C-os gőzt vezetünk a keverékbe, hőkiegyenlítődés után a közös hőmérséklet 60 °C lesz. Mennyi volt a jég tömege? (A gőz forráshője $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg; a jég olvadáshője $3{,}35 \cdot 10^5$ J/kg; a kaloriméter hőkapacitása elhanyagolható.)

5. Sorbakapcsolunk egy 10 ohmos ellenállást egy 0,1 H önindukciós tényezőjű tekerccsel, amelynek ohmos ellenállása elhanyagolható. Mekkora frekvenciájú váltakozó feszültséget kell az áramkörre kapcsolnunk, ha azt akarjuk, hogy az áramerősség fele legyen az azonos feszültségű egyenáram esetén létrejövő áramerősségnek?

6. Csigán átvetett fonál egyik végén a 60°-os súrlódásos lejtőn fekvő tömeg 0,5 kg, a fonál másik végén szabadon függő tömeg 1 kg. A létrejövő mozgás gyorsulása: a. Ha viszont az 1 kg-os tömeg fekszik fel a lejtőn, és a 0,5 kg-os tömeg lóg szabadon, a létrejövő gyorsulás: $a/2$. Mekkora a súrlódási tényező?



M.1. **Egy követ 2,45 m/s kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk. Az eldobástól számítva mennyi idő múlva és mekkora távolságban lesz sebessége a kezdősebesség kétszerese?**

M.2. **Egy telep sarkaira először sorba-, majd párhuzamosan kapcsolunk két azonos nagyságú ellenállást. Számítsuk ki az áramerősségek arányát! A telep belső ellenállása elhanyagolható.**

M.3. Sima vízfelszín alatt 3 m-re levő pontból 6,8 m átmérőjű körön látunk ki. Mennyi a víz törésmutatója?

M.4. 30°-os 2,5 m hosszú lejtő tetejéről nyugalmi állapotból indulva lecsúszik egy tárgy. Sebessége a lejtő alján 2,5 m/s. Mekkora a súrlódási tényező?

M.5. Egy 10 000 m³ hidrogént tartalmazó gáztartályt függőlegesen, súrlódásmentesen mozgó fedő dugattyúszerűen zár le. A fedő súlyából származó nyomás $2{,}02 \cdot 10^5$ Pa, a légnyomás $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. A hőmérséklet a reggeli 0 °C-ról délutánra 20 °C-ra emelkedik, a légnyomás nem változik. (A hidrogén fajhője állandó nyomáson a vizsgált hőmérsékleti intervallumban: $1{,}465 \cdot 10^4$ J/kg °C; sűrűsége normálállapotban: $\varrho_0 = 0{,}09$ g/dm³; $V = 10\,000$ m³, a reggeli állapotra vonatkozik.)

a) **Mekkora hőmennyiséget vett fel a gáz reggeltől délutánig?**
b) **Mennyire változott a gáz térfogata?**

M.6. **110 V váltakozó feszültségű, 50/s frekvenciájú hálózatra sorosan kapcsolunk egy 15 μF-os kondenzátort, egy 0,5 H önindukciójú tekercset és egy 100 ohm állandó ellenállású fogyasztót.**
a) **Határozzuk meg az ohmikus ellenállású fogyasztó által felvett teljesítményt!**
b) **Üzemhiba következtében a kondenzátor rövidre záródik. Milyen módon és mekkora ellenállást kell a fogyasztóhoz kötni, hogy az áramkör teljesítménytényezője változatlan maradjon?**

N.1. Vízszintes síkon levő, 10 kg tömegű testet vízszintes irányú 10 N nagyságú erő gyorsít. A súrlódás elhanyagolható.
Mekkora utat tesz meg a test az indulástól számított 10 s alatt?

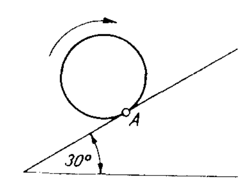
N.2. Egy 220 V feszültségű hálózatba kapcsolható 400 W teljesítményű fogyasztót készítünk 0,5 ohm mm²/m fajlagos ellenállású, 0,2 mm² keresztmetszetű fémhuzalból.
Hány méter hosszú huzalt kell vennünk? (Az ellenállás értékét a hőmérséklettől függetlennek tekinthetjük.)

N.3. Sima vízfelszín alatt 50 cm mélyen pontszerűnek tekinthető izzószálas égőt helyezünk el. A felszínre helyezett, átlátszatlan körlappal akarjuk megakadályozni az égő fénysugarainak kilépését a vízből.
Számítsuk ki a legkisebb megfelelő körlap átmérőjét! A víz törésmutatója 4/3.

N.4. Egy 5 literes edényben 27 °C kezdeti hőmérsékletű, $2{,}02 \cdot 10^5$ Pa nyomású levegőt melegítünk. $3{,}03 \cdot 10^5$ Pa nyomás elérésekor befejezzük a melegítést. Mennyi hőmennyiséget közöltünk az edényben levő levegővel? A levegő sűrűsége 0 °C-on és $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson 1,3 g/dm³, fajhője állandó térfogaton 711,76 J/kg °C.

N.5. 220 V, 50 Hz hálózatra 2 μF kapacitású kondenzátort kapcsolunk.
a) Mekkora a hatásos teljesítmény?
b) Írjuk fel és rajzoljuk meg az áramot és a feszültséget mint az idő függvényét!
c) Írjuk fel és rajzoljuk meg a pillanatnyi teljesítményt mint az idő függvényét! Az ohmos ellenállás elhanyagolható.

N.6. Megindított és magára hagyott 1 méter átmérőjű, függőleges síkú vékony gyűrű gördül felfelé a 30°-os lejtőn (csúszás nélkül). Amikor a gyűrű A-ban van, akkor a fordulatszáma 2 s⁻¹.

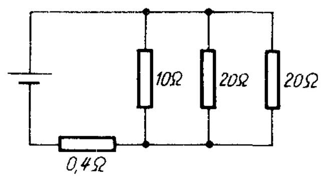


a) Mekkora utat tesz meg a gyűrű a lejtőn felfelé A-ból mérve?
b) Mennyi ideig tart ez a mozgás?

0.1. Egy tárgy súlya levegőben mérve 10 N, vízbe merítve 7,2 N egy ismeretlen sűrűségű folyadékba merítve 8 N.

a) Mennyi a tárgy anyagának sűrűsége?
b) Mennyi az ismeretlen folyadék sűrűsége?

0.2. Az ábra szerinti áramkör telepe 1,2 V elektromotoros erejű, 0,6 ohm belső ellenállású. Határozzuk meg:



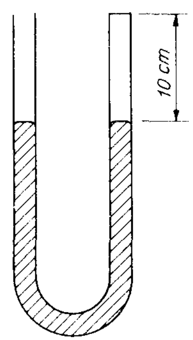
a) a telepen átfolyó áramot;
b) a 0,4 ohmos ellenállás végei közti feszültséget!

0.3. Egy diavetítővel 2 m×3 m-es képet akarunk kapni a 24 mm× ×36 mm-es diapozitívról. A lencse fókusztávolsága 50 mm.

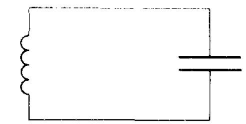
a) A vászontól milyen távolságra kell helyezni a vetítő lencséjét?
b) Hányad részére csökken a kép megvilágításának erőssége, ha ugyanezzel a vetítőgéppel 3 m×4,5 m méretű éles képet vetítünk?

0.4. Függőlegesen fellőtt 17 kg tömegű lövedék pályája legmagasabb pontján három darabra robban szét úgy, hogy minden darab vízszintes síkban levő sebességgel kezd mozogni. Egy 4 kg tömegű darab 150 m/s sebességgel északra, egy 8 kg tömegű rész pedig 60 m/s sebességgel nyugatra repül.
Határozzuk meg a harmadik darab sebességének nagyságát és irányát!

0.5. Egy állandó keresztmetszetű, U alakú cső egyik szára nyitott, a másik zárt. A benne levő higany felszíne a két szárban azonos magasságban van. Ekkor a zárt szárban a higanyoszlop feletti levegőoszlop 10 cm magas. A külső légnyomás $9{,}81 \cdot 10^4$ Pa. Hányszorosára nő a levegő térfogata, ha annyi levegőt viszünk állandó hőmérsékleten a higanyszint feletti zárt térrészbe, hogy a levegő tömege éppen megkétszereződik? A higany sűrűsége $13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3



0.6. 0,16 μF-os kondenzátorból és 4 henry-s önindukciós tekercsből álló párhuzamos rezgőkör kondenzátorát 100 V-ra töltjük, majd a rezgőkört magára hagyjuk.



a) Írjuk fel a kondenzátor feszültségét mint az idő függvényét!
b) Mennyi idő múlva lesz a kondenzátor feszültsége először 50 V? Hányad része ez a periódusidőnek? Az ohmos ellenállás elhanyagolható.

MEGOLDÁSOK

15. Hőtan I.

15.1. *a)* $l_{40} = l_0(1+\alpha t) = 100\ (1+2{,}4\cdot 10^{-5}\cdot 40)$ km $= 100{,}096$ km;
$l_{40} = 100{,}096$ km.

b) $l_{-30} = l_0(1+\alpha t) = 100\,[1+2{,}4\cdot 10^{-5}\cdot(-30)]$ km $= 99{,}928$ km;
$l_{-30} = 99{,}928$ km.

15.2. $p_1 = 1{,}616\cdot 10^5$ Pa; $V_1 = 18$ l; $T_1 = 283$ K;

$p_2 = ?$; $V_2 = 19$ l; $T_2 = 308$ °K.

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}; \quad p_2 = p_1\,\frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = 1{,}616\cdot 10^5\,\frac{18\cdot 308}{19\cdot 283}\ \text{Pa};$$

$p_2 = 1{,}67\cdot 10^5$ Pa.

15.3. Minthogy egy adott térfogaton nagyobb hőmérséklethez nagyobb nyomás tartozik a 25 °C-hoz tartozó izoterma feljebb helyezkedik el a (p – V) állapotsíkon.

15.4. Kisebb lesz, mert a lyuk maga is ugyanúgy viselkedik, mintha az illető anyaggal volna kitöltve. Hűtéskor a réz összehúzódik, tehát a rézben levő üregek, lyukak is.

15.5. Hő hatására az anyagoknak vagy a hőmérsékletük növekszik, vagy a halmazállapotuk változik. Hőmérsékletemelkedés közben a térfogat á l t a l á b a n növekszik (kivétel például a víz 0 °C és 4 °C között) tehát a sűrűség csökken. Hő hatására bekövetkező lehetséges halmazállapot-változások az olvadás, párolgás. Ezen esetekben a térfogat általában növekszik (kivétel pl. a jég olvadása) így a sűrűség ekkor is általában csökken.

15.6. Az üvegedények meleg folyadék beöntése során azért repednek meg, mert az edény nem minden pontja melegszik azonos módon, és így abban jelentős mechanikai feszültségek keletkeznek.

A kvarcedény elég nagy hőmérséklet-változás közben sem reped el, mert hőtágulási együtthatója nagyon kicsi $\left(6\cdot10^{-7}\,\frac{1}{°\mathrm{C}}\right)$, és így a nem egyenletes melegítés, vagy hűtés közben a fellépő mechanikai feszültségek sem nagyok.

15.7. *a)* Felmelegített vasrúd, ha nem lenne rögzítve $\Delta l = l\,\alpha\cdot\Delta t$-vel lenne hosszabb. A tágulásban megakadályozott rúdban akkora rugalmas feszültség lesz, amekkora az $(l+\Delta l)$ hosszú rúd l hosszúságra való összenyomásakor keletkezne: $\sigma = \frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$
(Ez a nyújtásra illetve összenyomásra vonatkozó Hooke-törvény, az anyagi minőségtől függő E állandó a Young- modulus.) A hőtágulás törvényéből $\frac{\Delta l}{l} = \alpha\cdot\Delta t$. Ezért a rúdban fellépő feszültség

$$\sigma = E\alpha\cdot\Delta t = 2\cdot10^{11}\cdot12\cdot10^{-6}\cdot30\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 7{,}2\cdot10^{7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2};$$

$$\sigma = 7{,}2\cdot10^{7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2};$$

b) A rögzítéseknél fellépő erő
$F = \sigma A = \sigma r^2\pi = 7{,}2\cdot10^7\cdot(2\cdot10^{-3})^2\pi$ newton;
$F = 904$ N.

15.8. A víz igen sajátos módon viselkedik. Melegítéskor 0 °C-tól 4 °C-ig térfogata csökken, majd 4 °C-tól növekszik. Ha vizet hőmérőfolyadékként használnánk, a folyadék szintjét és a hőmérsékletet nem lehetne kölcsönösen és egyértelműen egymáshoz rendelni. Ez a hőmérő ugyanott állna 3 °C és 5 °C esetén, 2 °C és 6 °C esetén stb., tehát 0 °C és 8 °C között a hőmérő állásából nem lehetne egyértelműen következtetni a hőmérsékletre.

15.9. Azokat a gázokat, amelyek követik a Boyle–Mariotte törvényét, [változatlan hőmérséklet mellett a gáz nyomásának és térfogatának szorzata állandó (pV = állandó), és ez az állandó csak a hőmérséklettől függ], ideális gázoknak nevezzük. Olyan gáz, amely Boyle–Mariotte törvényét teljes pontossággal követné, a valóságban nincsen, az ideális gáz tehát elképzelt anyag. A fizika viszont a valóságos világ anyagainak viselkedését vizsgálja. Mi köze van az elképzelt ideális gáznak a valósághoz, a fizikához? Röviden a következő. Mennél kisebb egy valódi gáz nyomása és

sűrűsége ($p\to0$, $\varrho\to0$), annál inkább tekinthető ideális gáznak. Nagy ritkítás mellett egy gáz sem különbözik az ideális gáztól. Különböző gázoknál más és más az a ritkítás, amely ahhoz szükséges, hogy a pV szorzat adott hőmérsékleten például egy százalék pontossággal állandó maradjon. A szén-dioxid-gáz esetében ez a szükséges ritkítás nagyobb, mint hidrogén esetében. A hidrogén közelebb áll az ideális gázhoz a szén-dioxidnál.
Erről a kérdésről más szempontból később még lesz szó. (L. a Molekuláris fizika c. 22. fejezetet!)

15.10. V = áll; $p_1 = 3{,}25\cdot10^4$ Pa; $T_1 = 373$ K; $p_2 = 4{,}75\cdot10^4$ Pa;
T_2 = ?

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};\quad T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1 = \frac{4{,}75}{3{,}25}\,373\ \mathrm{K};$$

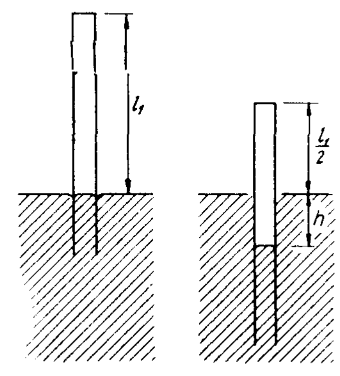
$$T_2 = 545\ \mathrm{K} = 272\ °\mathrm{C}.$$

15.11. **A higanyba süllyesztett lezárt csőben levő levegő állapotjelzői:**
$p_1 = \varrho g\,0{,}76$ m $= \varrho gH$; $V_1 = l_1\cdot A$; T_1.
(A = a cső keresztmetszetének területe, ϱ a Hg sűrűsége.)
A levegő állapotjelzői a cső további süllyesztése után:

$p_2 = (H+h)\varrho g$; $\quad V_2 = \left(\frac{l_1}{2}+h\right)A$; $T_2 = T_1$. A gáztörvény **szerint.**

$$p_2V_2 = p_1V_1;$$

$$(H+h)\left(\frac{l_1}{2}+h\right)A = Hl_1A.$$

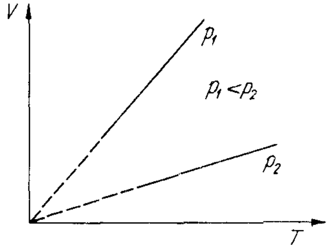


Ebből az egyenletből az adatok (H = 0,76 m; l = 0,6 m) behelyettesítése után $h \approx 0{,}183$ m adódik. Tehát a csőben levő levegőoszlop hossza a cső második süllyesztése után

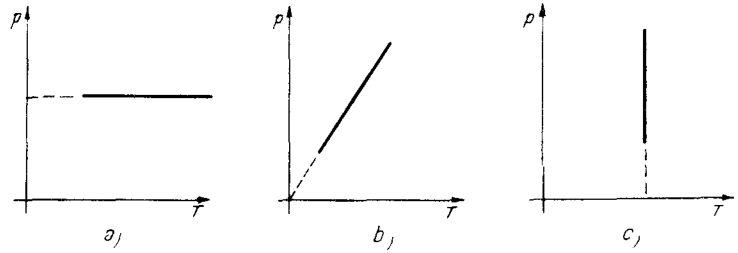
$$l_2 = \frac{l_1}{2} + h \approx 48{,}3\ \mathrm{cm}.$$

15.12. **A dugattyú két különböző terhelése azt jelenti, hogy két különböző állandó nyomáson vizsgáljuk a gáz állapotváltozását. Mindkét esetben a folyamatot egy egyenes ábrázolja a $V-T$ diagramon. Csak azt kell eldönteni, hogy melyik a meredekebb. Egy adott hőmérsékleten a nagyobb nyomású gáz térfogata kisebb,**

tehát minden T értéknél a nagyobb nyomású gáz állapotát ábrázoló pont esik közelebb a T tengelyhez, vagyis a nagyobb nyomáshoz tartozó egyenes meredeksége kisebb.



15.13.



15.14. Normálállapotúnak nevezzük a gázt, ha hőmérséklete 0 °C és nyomása $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. A tapasztalat szerint amint azt a kémiában is tanultuk, bármilyen ideálisnak tekinthető gázból 1 mol tömegűnek normál állapotban 22,414 liter a térfogata. Egy mol tömeg annyi gramm, amekkora a vegyület M molekulasúlya, illetve az elem A atomsúlya. Tehát 1 mol = M gramm (ill. A gramm).

Például 1 mol oxigén gáz tömege 32 gramm, 1 mol héliumgáz tömege 4 gramm.

Ezek szerint a normálállapotú hélium sűrűsége

$$\varrho = \frac{4\ \mathrm{g}}{22\,414\ \mathrm{cm}^3} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Megjegyzés:

Az egyesített gáztörvény szerint $\frac{pV}{T}$ = állandó, vagyis a gáz nyomásának és térfogatának szorzata osztva az abszolút hőmérsékleti skálán mért hőmérséklettel állandó, mely állandó függ a gáz tömegétől és a gáz minőségétől. Ezt a függést a feladat megoldásának elején felidézett tapasztalati törvény alapján meg tudjuk határozni.

Legyen egy m tömegű, M molekulasúlyú gáz nyomása p, térfogata V, hőmérséklete T. Ugyanezen gáz térfogata normálállapotban ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa; $T_0 = 273$ K) V_0. Ez a térfogat annyiszor 22,41 liter, ahányszor magában foglalja az m gramm 1 mol tömeget, vagyis

$V_0 = \frac{m}{M}\,22{,}41$ liter. Az egyesített gáztörvény szerint.

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\ \frac{m}{M}\ 22{,}41\ \mathrm{liter}}{273\ \mathrm{K}} =$$

$$= \frac{m}{M}\,\frac{1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{273\ \mathrm{K}}$$

Itt az $\frac{m}{M}$ szorzója állandó, már független a gáz tömegétől és minőségétől. Egyetemes gázállandónak hívják. Szokásos jele: R.

$$\left(R = 8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)$$

Az egyesített gáztörvény ezek szerint a

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M}\,R$$

alakot ölti, amely előnyösen használható feladatmegoldásokban.

15.15. Jelölje V a palack térfogatát. A palackban maradó gáz az eredeti gáz mennyiségének a 75%-a, amely eredetileg nyilván a palack térfogatának 75%-át foglalta el. Eszerint a gáz kezdeti állapotának állapothatározói

$p_1 = 4 \cdot 10^6$ Pa; $V_1 = 0{,}75$ V; $T_1 = 300$ K.

Végállapotának állapotjelzői

$p_2 = ?$; $V_2 = V$; $T_2 = 280$ K.

Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Ebből $p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{V_2 T_1} = \frac{4 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot 0{,}75\ V \cdot 280\ \mathrm{K}}{V \cdot 300\ \mathrm{K}} = 2{,}8 \cdot 10^6$ Pa

$p_2 = 2{,}8 \cdot 10^6$ Pa.

Alkalmazzuk a feladat megoldásában az egyesített gáztörvény előző (*15.14.*) feladatban megismert alakját. Ha a palackban eredetileg m tömegű gáz volt, a kiengedés után $0,75\ m$ maradt. Ezért

$$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{m}{M} R \text{ és } \frac{p_2 V}{T_2} = \frac{0,75\ m}{M} = R.$$

A két egyenlet hányadosából

$$p_2 = 0,75 \frac{T_2}{T_1} p_1 = \text{[illegible]}$$

15.16. *a)* $\underline{T = 4,17\ \mathrm{K}}$;

b) $\underline{T = 90,18\ \mathrm{K}}$;

c) $\underline{T = 600,45\ \mathrm{K}}$;

d) $\underline{T = 1336,15\ \mathrm{K}}$;

e) $\underline{T = 3653,15\ \mathrm{K}}$.

15.17. *a)* $\underline{\Delta d = 6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}}$;

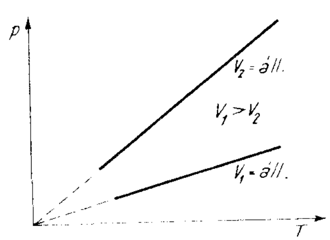
b) $\underline{\frac{\varrho}{\varrho_0} = 0,998}$.

15.18. $\varrho = 2,68 \cdot$ [illegible]

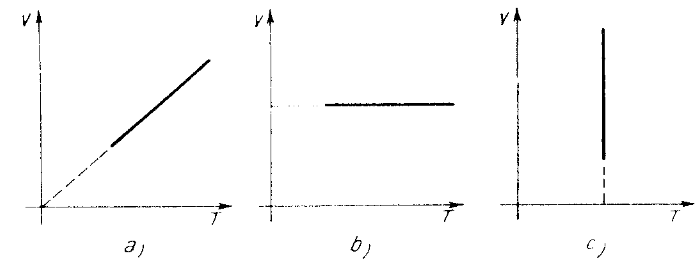
15.19. $\underline{d = 3,6\ \mathrm{mm}}$.

15.20. $\underline{h = 25\ \mathrm{cm}}$.

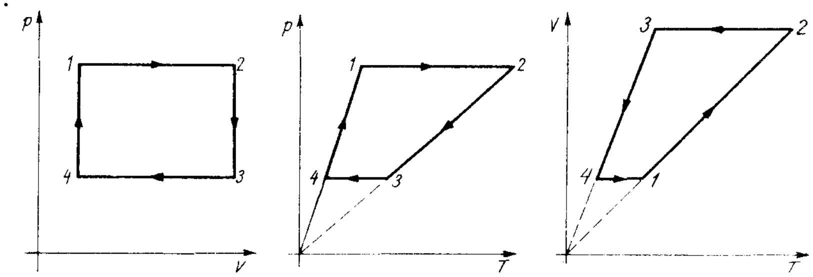
15.21.



15.22.



15.23.



15.24. A hélium nyomása 7-szerese a nitrogénének.

15.25. A levegő $\frac{1}{21}$ részét kell kiengedni. $p =$ [illegible]

15.26. Az acélszalag $l_0 = 112,5$ méteres jelzése 0 °C-on előrébb lenne a kérdéses útszakasz végénél. Az útszakasz hossza tehát egyenlő a 0 °C-on 112,5 m hosszú acélszalag 20 °C hőmérsékletű hosszával.

$$l = l_0 (1 + \alpha t) = 112,5\ (1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20)\ \mathrm{m} = 112,525\ \mathrm{m};$$

$$\underline{l = 112,525\ \mathrm{m}}.$$

A mérés abszolút hibája

$$\underline{\Delta l = l - l_0 = 2,5\ \mathrm{cm}}.$$

Relatív hibának nevezzük az abszolút hiba viszonyát a mért mennyiséghez, vagyis a

$$\underline{\text{relatív hiba} = \frac{\Delta l}{l} = 0,00022 = 0,022\ \%}.$$

15.27. A lineáris hőtágulási törvényben ($\Delta l = \alpha l_0 \Delta t$) szereplő l_0 a 0 °C-on mért hossz. Mivel a szilárd testek hőtágulási együtthatója kicsi, számításainkban elenyésző hibát követünk el, ha a 0 °C-on mért hossz helyett a tágulás előtti hosszát vesszük l_0-nak. Jelen feladat megoldásakor elsőrendű szempontnak tekintjük, hogy számítással ellenőrizzük azt, hogy a hiba valóban kicsiny.
Először számoljuk ki a távvezeték hosszát úgy, hogy l_0-nak tekintjük a 20 °C-hoz tartozó hosszt.

Nyáron $l_1 = l_{20}\ (1 + \alpha\cdot\Delta t) = 100\ \ (1 + 2{,}4\cdot10^{-5}\cdot 20)$ km $=$ $= 100{,}048$ km.

Télen $l_2 = l_{20}\ (1 + \alpha\cdot\Delta t) = 100\ [1 + 2{,}4\cdot10^{-5}\cdot(-50)]$ km $=$ $= 99{,}880$ km.

Most határozzuk meg a távvezeték hosszát 0 °C-on

$$l_{20} = l_0\,(1 + \alpha\cdot 20);\ l_0 = \frac{l_{20}}{1+\alpha\cdot 20}.$$

Ezt felhasználva a távvezeték hossza nyáron

$$l_1' = l_0\,(1 + \alpha t) = \frac{l_{20}}{1+\alpha\cdot 20}(1 + \alpha t) = \frac{100}{1{,}00048}(1 + 2{,}4\cdot$$

$\cdot 10^{-5}\cdot 40)$ km;

$\underline{l_1' = 100{,}047977 \text{ km.}}$

Télen $\quad l_2 = l_0\,(1 + \alpha t) = \dfrac{l_{20}}{1+\alpha\cdot 20}(1 + \alpha t) =$

$$= \frac{100}{1{,}00048}[1 + 2{,}4\cdot10^{-5}\,(-30)]\ \text{km};$$

$\underline{l_2 = 99{,}880058 \text{ km.}}$

A kétféle módon nyert eredmények közötti eltérés
$l_1' - l_1 = -0{,}000023$ km $= -23$ mm;
$l_2' - l_2 = 0{,}000058$ km $= 58$ mm.
Ez valóban kicsiny a hosszváltozáshoz viszonyítva!

15.28. Az óra ingáját a feladat feltételei miatt (kis méretű teher, könnyű sárgaréz huzal) tekinthetjük fonálingának. Ha a fonal hosszát 0 °C hőmérsékleten l_0-lal jelöljük a lengésidő

$$T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\,.$$

Ekkor az óra pontosan jár, tehát $T_0 = 1$ s.
Ha a hőmérséklet emelkedik az inga fonalának hossza $l = l_0\ (1 + \alpha t)$ lesz. A hosszal együtt növekszik a lengésidő.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0\,(1+\alpha t)}{g}}$$ értékre. A két lengésidő hányadosa

$$\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{1+\alpha t}\,;$$

tehát

$$T_1 = T_0\sqrt{1+\alpha t}\,.$$

Egy nap (τ másodperc alatt) a lengések száma 20 °C-on $\dfrac{\tau}{T_1}$

vagyis 20 °C-on az óra egy nap elteltével csak $\dfrac{\tau}{T_1}\cdot T_0$ időt jelez.

Tehát a 16 másodperces késés

$$\tau - \frac{\tau}{T_1}T_0 = 16.$$

Ebből

$$T_1 = \frac{\tau}{\tau - 16}T_0;$$

$$T_0\sqrt{1+\alpha t} = \frac{\tau}{\tau - 16}T_0\,.$$

Ezt α-ra megoldva

$$\alpha = \frac{\left(\dfrac{\tau}{\tau-16}\right)^2 - 1}{t} = \frac{\left(\dfrac{24\cdot 3600}{24\cdot3600 - 16}\right)^2 - 1}{20}\,\frac{1}{°\mathrm{C}} = 1{,}8\cdot10^{-5}\,\frac{1}{°\mathrm{C}};$$

$\underline{\alpha = 1{,}8\cdot10^{-5}\,\dfrac{1}{°\mathrm{C}}.}$

15.29. Az acéltengely átmérője és hőtágulási együtthatója

$$d_1 = 11{,}28\ \text{cm};\ \alpha_1 = 12\cdot10^{-6}\ \frac{1}{°\mathrm{C}}.$$

Az alumínium gyűrű belső átmérője és hőtágulási együtthatója

$$d_2 = 11{,}25 \text{ cm};\quad \alpha_2 = 28{,}7\cdot10^{-6}\ \frac{1}{°C}.$$

Az alumínium gyűrűt akkor tudjuk ráhúzni a tengelyre, ha *a)* a gyűrűt felmelegítjük úgy, hogy belső átmérője akkora legyen, mint a tengely átmérője 20 °C-on, tehát az alumínium gyűrű belső átmérője legalább d_1 legyen:

$$d_1 = d_2\,(1 + \alpha_2\cdot\Delta t).$$

Ebből

$$\Delta t = \frac{d_1 - d_2}{\alpha_2 d_2} = 93\ °C;$$

vagyis $t = (20 + 93)$ °C = 113 °C-ra kell az alumínium gyűrűt felmelegíteni.

b) a tengelyt lehűtjük, úgy hogy átmérője d_1-ről d_2-re csökkenjen:

$$d_2 = d_1\,(1 + \alpha_1\cdot\Delta t);$$

ebből

$$\Delta t = \frac{d_2 - d_1}{d_1 \cdot \alpha_1} = -221{,}7\ °C;$$

vagyis a tengelyt $t = (20 - 221{,}7)$ °C = −201,7 °C-ra kell lehűteni.

c) A tengelyt és a gyűrűt addig melegítjük, míg az átmérők egyenlők lesznek. Ez lehetséges, mert $\alpha_1 < \alpha_2$ miatt a tengely átmérője lassabban növekszik melegítéskor.

$$d = d_1\,(1 + \alpha_1\cdot\Delta t);$$

$$d = d_2\,(1 + \alpha_2\Delta t);$$

egyenletekből

$$\Delta t = \frac{d_1 - d_2}{d_2\alpha_2 - d_1\alpha_1} = 160\ °C;$$

tehát $t = (20 + 160)$ °C = 180 °C közös hőmérsékleten a gyűrű ráhúzható a tengelyre.

15.30. A belső átmérő 20 °C-on $d_{20} = 10{,}00$ cm, a hőmérséklet-változás $\Delta t = 10$ °C.

a) A belső átmérő növekedése

$$\Delta d = d_{20}\cdot\alpha\cdot\Delta t = 10\cdot11\cdot10^{-6}\cdot10 \text{ cm} = 11\cdot10^{-4} \text{ cm};$$

$$\Delta d = 1{,}1\cdot10^{-3} \text{ cm}.$$

b) A belső átmérő relatív növekedése

$$\frac{\Delta d}{d_{20}} = \alpha\cdot\Delta t = 11\cdot10^{-5},\qquad \frac{\Delta d}{d_{20}} = 11\cdot10^{-5}.$$

c) A belső kerület k_{20}: növekedése Δk. A relatív növekedése

$$\frac{\Delta k}{k_{20}} = \frac{\Delta(\pi d)}{\pi d_{20}} = \frac{\Delta d}{d_{20}},$$

ugyanannyi, mint az átmérő relatív növekedése.

d) A lyuk területének növekedése

$$\Delta A = A - A_{20} = \frac{d^2}{4}\pi - \frac{d_{20}^2}{4}\pi = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_{20}^2) =$$

$$= \frac{\pi}{4}[d_{20}^2(1 + \alpha\cdot\Delta t)^2 - d_{20}^2] = \frac{\pi}{4}d_{20}^2[1 + 2\alpha\cdot\Delta t + \alpha^2\cdot\Delta t^2 - 1] =$$

$$= A_{20}\,[2\alpha\cdot\Delta t + \alpha^2\cdot\Delta t^2];$$

$$2\alpha\cdot\Delta t = 2\cdot11\cdot10^{-6}\cdot10 = 22\cdot10^{-5};$$

$$\alpha^2\cdot\Delta t^2 = 121\cdot10^{-12}\cdot10^2 = 12{,}1\cdot10^{-9}.$$

Látható, hogy $\alpha^2\cdot\Delta t^2$ négy nagyságrenddel kisebb, mint $2\alpha\cdot\Delta t$. Teljesen jogos az $\alpha^2\cdot\Delta t^2$ tag elhagyása. Eszerint

$$\Delta A = A_{20}\,(2\alpha\cdot\Delta t).$$

Vagyis a terület növekedése melegítéskor hasonló törvény szerint megy végbe, mint a vonalas tágulás.
A különbség csak annyi, hogy az anyag minőségére jellemző állandó kétszerese a vonalas tágulás törvényében szereplőnek.
A *felületi hőtágulási együttható kétszerese a vonalas hőtágulási együtthatónak.*
A lyuk területének relatív növekedése

$$\frac{\Delta A}{A_{20}} = 2\alpha\cdot\Delta t = 22\cdot10^{-5};\qquad \frac{\Delta A}{A_{20}} = 22\cdot10^{-5}.$$

d) Minthogy az *a)*; *b)*; *d)* kérdésekben a kérdezett mennyiségek mindegyike Δt-vel arányos, minden háromszoros lesz.

15.31. Ha az edény nem tágulna $\Delta V_1 = V_0\beta_{Hg}\cdot\Delta t$ higany ömlene ki. A kiömlött higany ennél annyival lesz kevesebb, amennyivel az edény térfogata megnőtt, azaz $\Delta V_2 = V_0\beta\cdot\Delta t$-vel. Így a kiömlött higany $\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2$.
Ezek szerint

$$V_0\beta_{Hg}\cdot\Delta t - V_0\beta\cdot\Delta t = \Delta V;$$

$$\beta = \frac{V_0\beta_{Hg}\cdot\Delta t - \Delta V}{V_0\cdot\Delta t} = \frac{10^3\cdot 182\cdot 10^{-6}\cdot 10^2 - 15{,}2}{10^3\cdot 10^2}\,\frac{1}{°\mathrm{C}};$$

$$\beta = 30\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{°\mathrm{C}}.$$

15.32. A hengeres edényben a fenéknyomás nem változik, hiszen az egyenlő az edényben levő víz súlyának és a henger alapterületének hányadosával. Ez nincs ellentétben a hidrosztatikai nyomás $p = h\varrho g$ képletével, mert ahányszor kisebb lett a h, annyiszorosra nőtt a sűrűség, így a $h\varrho$ a lehűlés során állandó maradt. A víz térfogata a másik két edényben a lehűlés során ugyanúgy változik, mint a hengerben, de a folyadékszint másként csökken, ezért ezekben a fenéknyomás is változni fog. Például a felfelé keskenyedő edényben a víz térfogatának ΔV csökkenése a felszín nagyobb mértékű süllyedését eredményezi, mint ugyanez a térfogat csökkenése a hengerben, tehát a $h\varrho$ szorzat a lehűlés során csökken, vagyis a felfelé szűkülő edényben a fenéknyomás csökken. Hasonlóan okoskodva kitűnik, hogy a felfelé szélesedő edényben viszont növekszik a nyomás.

15.33. Jelölje t a keresett hőmérsékletet a Celsius skálán. Ugyanezen hőmérsékletet a Kelvin skálán $t + 273$ jelöli. A feltételünk szerint a két szám különbsége a t 1%-ánál kisebb, tehát

$$t + 273 - t < 0{,}01\ t;$$

$$t > 27\,300\ °\mathrm{C}.$$

Vagyis a 27 300 °C-nál magasabb hőmérsékleteken a Celsius, illetve a Kelvin skálán mért hőmérséklet értékének eltérése 1%-nál kevesebb.

15.34. A hőmérő kalibrálása azt jelenti, hogy minden ellenállásértékhez egyértelműen rendeljünk egy és csakis egy hőmérsékletet. Ez akkor lehetséges, ha a megadott függvényben szereplő R_0; A; B állandók ismertek. Ezek meghatározhatók, ha a három fix hőmérséklethez (t_1; t_2; t_3) tartozó ellenállást (R_1; R_2; R_3) megismerjük, és az állandókat az

$$R_1 = R_0\ (1 + At_1 + Bt_1^2);\ R_2 = R_0\ (1 + At_2 + Bt_2^2);$$

$R_3 = R_0\ (1 + At_3 + Bt_3^2)$ egyenletrendszerből kiszámítjuk.

15.35. Amikor az egyensúly már létrejött, a nyomásnak a hőmérsékletnek meg kell egyezni mindkét térrészben. Írjuk fel az egyesített gáztörvény *15.14.* feladat megoldásában megismert alakját külön az m tömegű és külön a $2m$ tömegű gázra.

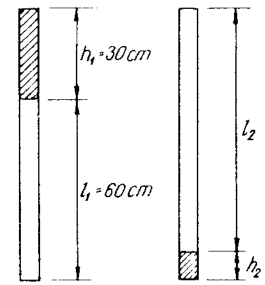
$$\frac{pV_1}{T} = \frac{M}{m}R;\ \frac{pV_2}{T} = \frac{2m}{M}R.$$

A két egyenletet elosztva egymással

$$\frac{V_2}{V_1} = 2;\ V_2 = 2V_1;\ V_2 = \frac{2}{3}(V_1 + V_2);$$

tehát a V_2 a $2m$ tömegű gáz térfogata a henger térfogatának kétharmada.

15.36. Az üvegcsőben levő gáz két állapotára írjuk fel az egyesített gáztörvényt.



$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

$T_1 = T_2 =$ a környezet hőmérséklete.

$V_1 = l_1A;\ V_2 = l_2A;$

$p_1 = (H + h_1)\varrho g;\ p_2 = (H - h_2)\varrho g.$

Itt A a cső keresztmetszetének területe és H a külső légnyomással egyensúlyt tartó Hg-oszlop magassága, ϱ a Hg sűrűsége. A gáztörvény alakja:

$$(H + h_1)\,l_1 = (H - h_2)\,l_2.$$

Behelyettesítve az adatokat $(75 + 30)\,60 = (75 - h_2)\,(90 - h_2)$.

Ezen egyenletnek fizikailag értelmes gyöke

$h_2 \approx 3$ cm.

15.37. Gondolatban rögzítsük a higanyoszlopot, vagyis a melegítést történjék mindkét edényben állandó V térfogaton. A 0 °C hőmérsékletű gázra felírhatjuk

$$\frac{p_1 V}{273} = \frac{p_2 V}{283}; \qquad p_2 = \frac{283}{273} p_1 = \left(1 + \frac{10}{273}\right) p_1;$$

a 20 °C kezdeti hőmérsékletű gázra

$$\frac{p_1 V}{293} = \frac{p_2' V}{303}; \qquad p_2' = \frac{303}{293} p_1 = \left(1 + \frac{10}{293}\right) p_1.$$

Látható, hogy $p_2 > p_2'$; tehát ha engedjük, a higanycsepp elmozdul a kisebb nyomású, vagyis a kezdetben 20 °C hőmérsékletű ballon felé.

15.38. Ha a k-adik szívás után a leszívandó V térfogatú térben p_k a nyomás, akkor a dugattyú ($k + 1$)-edik kihúzása utáni nyomás (p_{k+1}) Boyle – Mariotte törvénye alapján

$$p_{k+1}(V + \Delta V) = p_k V; \qquad p_{k+1} = p_k \frac{V}{V + \Delta V}.$$

Ezért ha a nyomás n szívás után csökken a kívánt értékre

$$p = p_n = p_{n-1} \frac{V}{V + \Delta V} = p_{n-2} \frac{V}{V + \Delta V} \cdot \frac{V}{V + \Delta V} =$$

$$= p_{n-2} \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)^2 = \ldots = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)^n;$$

$$p = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)^n.$$

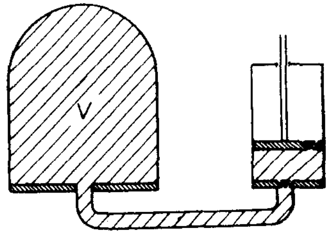
Képezzük az egyenlet mindkét oldalának logaritmusát

$$\lg p = \lg p_0 + n \lg \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right).$$

Ebből n, a szükséges szívások száma kifejezhető

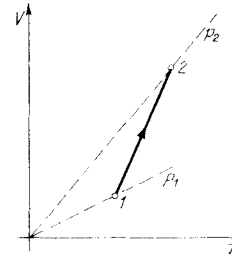
$$n = \frac{\lg \frac{p}{p_0}}{\lg \frac{V}{V + \Delta V}}.$$

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egy ilyen szivattyúval tetszőleges kis nyomás elérhető, ha elég sokszor húzzuk ki a dugattyút.

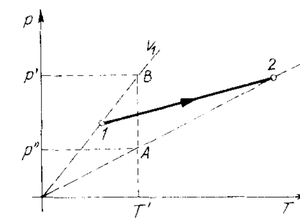


Valójában a légritkításnak itt határt szab, hogy a dugattyú és a henger alja közötti kis térben légköri levegő marad vissza. Emiatt az elérhető légritkítás az egyszerűbb szivattyúknál kb. 1 torr.

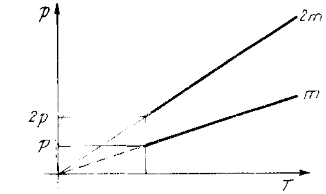
15.39. A diagram 1 és 2 pontjait összekötve az origóval, egy-egy olyan egyeneshez jutunk, amelyek mindegyike a gáz állandó nyomáson történő állapotváltozását ábrázolja. Az alsó egyenes p_1 = áll. a felső p_2 = áll. nyomáshoz tartozó diagram. Mivel az alsó egyenes átmegy 1 ponton, az 1-gyel jelzett állapotban p_1 a nyomás. Hasonlóan a 2-vel jelzett állapotban p_2 a nyomás. A *15.12.* feladatban megállapítottuk, hogy a ($V - T$) diagramon az állandó nyomású állapotváltozásokat ábrázoló egyenesek közül a kisebb nyomású egyenes a meredekebb. Ez azt jelenti, hogy $p_1 < p_2$ tehát a feladatbeli folyamat során a gáz nyomása csökkent.



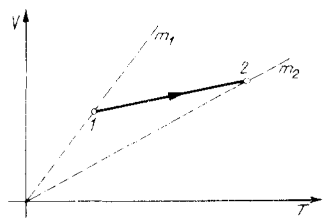
15.40. A diagram 1 és 2 pontjait összekötve az origóval két olyan egyenest kapunk, amelyek mindegyike a gáz egy állandó térfogaton végbemenő állapotváltozását ábrázolja. Hogy eldönthessük melyikhez tartozik nagyobb térfogat, húzzuk meg például a T'-höz tartozó ordinátát. Ez az állandó hőmérsékletű egyenes a V_1 = áll. és a V_2 = áll. egyeneseket egy-egy pontban metszi, B-ben illetve A-ban. A B-hez tartozó p' nyomás nagyobb mint az A-beli p''. Mivel A és B ugyanazon hőmérséklethez tartozik $p'V_1 = p''V_2$.
Azonban $p' > p''$ miatt $V_1 < V_2$. Ez pedig azt jelenti, hogy a meredekebb állandó térfogatú egyenes tartozik a kisebb térfogathoz, vagyis az 1 pontban kisebb a nyomás, mint 2-ben, tehát a feladatbeli folyamat során a gáz térfogata növekedett.



15.41. Az m és a $2m$ tömegű gáz térfogata is állandó, tehát állapotváltozásukat az origóból induló egyenesek ábrázolják a ($p - T$) síkon. Bármely T hőmérsékleten a térfogatok egyenlősége miatt abban az edényben lesz nagyobb a nyomás, amelyben nagyobb tömege van a gáznak. A $2m$ tömegű gáz nyomása kétszerese lesz az m tömegűének, vagyis a $2m$ tömegű gázhoz tartozó egyenes a meredekebb, mégpedig kétszer meredekebb.



15.42. A diagram állandó nyomáson lejátszódó folyamatot ábrázol. Ha a gáz tömege nem változna, az egyenesnek át kellene menni az origón. Mivel egyenesünk nem ilyen, biztos, hogy változott a hengerben levő gáz tömege.



Legyen a hengerben levő gáz tömege *1*-ben m_1, *2*-ben m_2. Ha a gáz tömege állandóan m_1 lenne, az origóból indul 1-en áthaladó egyenesen lennének a gáz állapotát ábrázoló pontok, ha pedig m_2 lenne a gáz tömege, akkor az 02 egyenes lenne a folyamat diagramja. Melyik diagramhoz tartozik nagyobb tömeg? A V függése T-től állandó p mellett, az egyesített gáztörvény *15.14.* feladat megoldásában szereplő alakjából

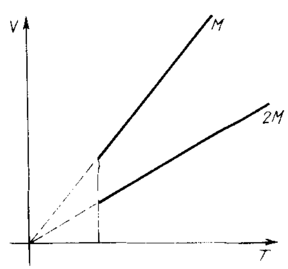
$$V = \frac{mR}{Mp}T.$$

Ebből látható, hogy az egyenes annál meredekebb, mennél nagyobb a gáz m tömege. Esetünkben 01 egyenes meredekebb, tehát $m_1 > m_2$. Ez pedig azt jelenti, hogy a feladatbeli folyamatban a hengerben levő levegő tömege csökkent.

15.43. Az egyesített gáztörvénynek a 15.14. feladat megoldásában megismert alakjából fejezzük ki a térfogatot.

$$V = \frac{mR}{Mp}T.$$

Innen leolvasható a folyamatot a $(V-T)$ állapotsíkon ábrázoló egyenes meredeksége: $\frac{mR}{Mp}$.



Az egyenes meredeksége, tehát a mol tömeggel fordítottan arányos, vagyis az M mol tömegű gázhoz tartozó egyenes meredekebb, amint azt az ábrán rajzoltuk.

15.44. Az egyesített gáztörvényt (lásd *15.14.* feladat megoldását) fogjuk alkalmazni.

$$\left(\frac{pV}{T} = \frac{m}{M}R;\ \text{ebből}\ p = \frac{mRT}{MV}\cdot\right)$$

Adatok: $m = 4$ kg; $T = 302$ K;
$V = 2\ \mathrm{m}^3$; $M = 32$ g (az oxigén mol tömege).
Ezeket behelyettesítve

$$p = \frac{4\ \mathrm{kg}\cdot 8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 302\ \mathrm{K}}{3{,}2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg}\cdot 2\ \mathrm{m}^3};\quad p = 1{,}5685\cdot 10^5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2};$$

$p = 1{,}57\cdot 10^5$ Pa.

15.45. A szelep kinyitása előtt a palackban levő gáz adatai:
$V_1 = V = 30$ liter; $T_1 = T = 293$ K; $p_1 = 3\cdot 10^5$ Pa.
A gáz tömege m_1, a gáz mol tömege $M = 28$ g.
A szelep kinyitása, majd elzárása után, mikor ismét felvette a szoba hőmérsékletét: $V_2 = V$; $T_2 = T$; $p_2 = 2{,}4\cdot 10^5$ Pa.
a gáz tömege m_2; a gáz mol tömege $M = 28$ g.
Keressük a kiengedett gáz tömegét. $m_1 - m_2 = ?$
Írjuk fel a gáztörvényt mindkét esetre

$$\left\{\frac{p_1V}{T} = \frac{m_1}{M}R\ \text{és}\ \frac{p_2V}{T} = \frac{m_2}{M}R\right\}.$$ (Lásd *15.14.* feladat megoldását.)

A két egyenletből m_1-et és m_2-t kifejezve, majd az így nyert egyenleteket egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$m_1 - m_2 = \frac{VM}{RT}(p_1 - p_2) =$$

$$= \frac{3\cdot 10^{-2}\mathrm{m}^3\cdot 28\ \mathrm{g}\cdot 6\cdot 10^4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}{8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 293\ \mathrm{K}} = 20{,}7\ \mathrm{g};$$

$m_1 - m_2 = 20{,}7$ g.

15.46. Kiindulunk az egyesített gáztörvényből

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M} R.$$ (Lásd *15.14.* feladat megoldását!)

Adatok: $p = 8\cdot10^5$ Pa; $V = 1{,}417\cdot10^{-3}$ m^3; $T = 273$ K; $m = 2$ g.

Ezek felhasználásával az egyesített gáztörvényből a gáz mol tömege

$$\left[M = \frac{mRT}{pV} = \frac{2\,\mathrm{g}\cdot 8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 273\,\mathrm{K}}{8\cdot10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot 1{,}417\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 4\,\mathrm{g}. \right]$$

Mivel a gáz egyatomos, ez azt jelenti, hogy az atomsúlya 4; tehát a gáz hélium.

15.47. A feladatban gázkeverékről van szó. Ezért idézzük fel Dalton törvényét, melyet a kémiában tanultunk. Eszerint *egy gázkeverék p nyomása azoknak a p_i részleges (parciális) nyomásoknak az összege, amelyeket az adott T hőmérsékleten és V térfogaton az egyes alkotórészek egyedül fejtenének ki.*

A ballonban levő nyomást tehát úgy határozzuk meg, hogy először kiszámítjuk mekkora lenne az oxigén nyomása 110 liter térfogatban 300 K hőmérsékleten.

$$p_{O_2} = \frac{m_{O_2}RT}{VM_{O_2}}.$$ (Lásd *15.40.* feladat megoldását!)

Ezután kiszámítjuk mekkora lenne a hidrogén nyomása ugyanekkora térfogat és hőmérséklet mellett.

$$p_{H_2} = \frac{m_{H_2}\cdot RT}{V\cdot M_{H_2}};$$ majd az így kapott nyomásokat összegezzük.

$$p = p_{O_2} + p_{H_2} = \frac{RT}{V}\left[\frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} + \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}\right] =$$

$$= \frac{8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 300\,\mathrm{K}}{1{,}1\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}^3}\left(\frac{1{,}6}{3{,}2\cdot10^{-2}} + \frac{8\cdot10^{-1}}{2\cdot10^{-3}}\right) = 1{,}02\cdot10^7\ \mathrm{Pa};$$

$$\underline{p = 1{,}02\cdot10^7\ \mathrm{Pa}.}$$

15.48. A levegő nyomása az előző feladatban felidézett parciális nyomások törvénye szerint alkotó elemeinek az oxigénnek p_1 és a nitrogénnek p_2 nyomásaiból tevődik össze. Ezért

$$p = p_1 + p_2 = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right).$$ (Lásd *15.14.* feladat megoldását!)

A feltételek szerint, ha m a levegő tömege

$$m_1 = \frac{2}{9}m \text{ és } m_2 = \frac{7}{9}m;$$ tehát

$$p = \frac{RT}{V}\left[\frac{2m}{9M_1} + \frac{7m}{9M_2}\right] = RT\frac{m}{V}\left[\frac{2}{9M_1} + \frac{7}{9M_2}\right].$$

Ebből $\frac{m}{V} = \varrho$ a levegő sűrűsége.

$$\varrho = \frac{p}{RT\left[\frac{2}{9M_1} + \frac{7}{9M_2}\right]};$$

$p = 1{,}01325$ Pa, $R = 8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$; $T = 273$ K; $M_1 = 3{,}2\cdot10^{-2}$ kg;

$M_2 = 2{,}8\cdot10^{-2}$ kg adatokat behelyettesítve

$$\underline{\varrho = 1{,}29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.}$$

16. Hőtan II.

16.1. $m = 3$ kg; $c = 4{,}19 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}}$; $t_1 = 20$ °C; $t_2 = 50$ °C; $Q = ?$

$Q = cm\,(t_2 - t_1) = 3{,}77 \cdot 10^5$ J;

$\underline{Q = 3{,}77 \cdot 10^5 \text{ J}.}$

16.2. $\left.\begin{array}{l} m_1 = 4 \cdot 10^{-2}\text{ kg};\ c_1 = 3{,}85 \cdot 10^2 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}};\ t_1 = 20\,^\circ\text{C}; \\ m_2 = 200\text{ g};\ c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}};\ t_2 = 80\,^\circ\text{C}; \end{array}\right\}\ t_k = ?$

$c_1 m_1 (t_k - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t_k)$;

$$t_k = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 78{,}9\,^\circ\text{C};$$

$\underline{t_k = 78{,}9\,^\circ\text{C}.}$

16.3. A hőtan első főtétele alapján $Q = \Delta U - W$.
Itt $-W$ a rendszer á l t a l végzett munkát jelenti. Ez a $(p-V)$ diagramon a folyamatot ábrázoló görbe alatti terület. Pozitív, ha $V_2 > V_1$.

a) Az AB izobár folyamatban:

$Q_{AB} = U_B - U_A - W_{AB}$.

Minthogy $T_B < T_A$ ezért $U_B > U_A$;

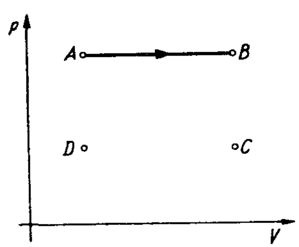
tehát $U_B - U_A > 0$. Másrészt

$V_B > V_A$, ezért $W_{AB} < 0$;

tehát $-W_{AB} > 0$.

Így a gáz által felvett hő:

$Q_{AB} = (U_B - U_A) + (-W_{AB}) > 0$.



a)

b) A BC izochor folyamatban:

$Q_{BC} = U_C - U_B - W_{BC}$.

Minthogy $T_C < T_B$, ezért $U_C < U_B$;

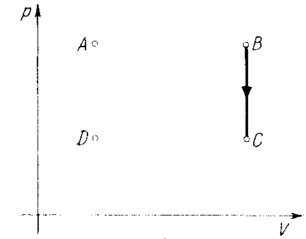
tehát $U_C - U_B < 0$.

Másrészt $V =$ állandó, ezért $W_{BC} = 0$.

Így a gáz által felvett hő:

$Q_{BC} = U_C - U_B < 0$.

Ezek szerint a gáz l e a d o t t hőt.



b)

c) A CD izobár folyamatban:

$Q_{CD} = U_D - U_C - W_{CD}$.

Minthogy $T_D < T_C$, ezért $U_D < U_C$,

tehát $U_D - U_C < 0$.

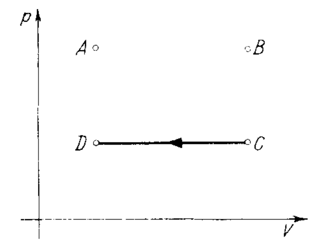
Másrészt $V_D < V_C$, ezért $W_{CD} > 0$,

tehát $-W_{CD} < 0$.

Így a gáz által felvett hő:

$Q_{CD} = U_D - U_C + (-W_{CD}) < 0$.

Vagyis a gáz ebben a folyamatban is l e a d o t t hőt.



c)

d) A DA izochor folyamatban:

$Q_{DA} = U_A - U_D - W_{DA}$.

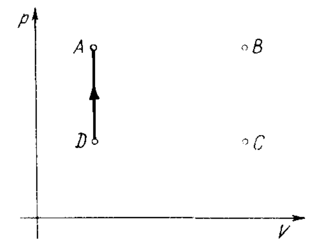
Minthogy $T_A > T_D$, ezért $U_A > U_D$,

tehát $U_A - U_D > 0$.,

Másrészt $V =$ állandó, ezért $W = 0$.

Így a gáz által felvett hő:

$Q_{DA} = U_A - U_D > 0$.



d)

<u>A gáz tehát az AB és a DA folyamatok során valóban vett fel hőt, míg a BC és CD folyamatok közben leadott hőt.</u>

Az egész körfolyamat során a gáz hasznos munkát végzett, ezért <u>az összesen felvett hő több volt, mint az összesen leadott hő.</u> (A különbség éppen a végzett munkával egyenlő.)

16.4. $W = 4{,}1868 \cdot 10^3$ J; $G = 100$ N; $h = ?$

$$W = G\,h\,; \qquad h = \frac{W}{G} = 41{,}868 \text{ m}; \quad \underline{h = 41{,}868 \text{ m}.}$$

16.5. K é t f é l e oka lehet. Az egyik az, hogy a testet egy nála magasabb hőmérsékletű testtel hozzuk érintkezésbe, pl. melegebb folyadékba, gázba tesszük (a láng is tulajdonképpen meleg gáz). Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a melegebb test „hőt ad át" a nála hidegebbnek. A hidegebb test melegedésének egyik oka tehát a <u>hőközlés.</u>

A másik ok az lehet, hogy a testen munkavégzés történik, amely azonban csak részben vagy még részben sem fordítódik arra, hogy megnövelje a test mechanikai energiáját. Jó példa erre az összes súrlódásos folyamat, a makroszkopikus testek rugalmatlan ütközése vagy egy gáz hirtelen összenyomása. A testek tehát a rajtuk végzett munka hatására is melegedhetnek. Így egy test melegedésének másik oka a <u>munkavégzés.</u>

Sokszor a hőközlés és a munkavégzés egyszerre lépnek fel, ilyenkor mindkét hatás hozzájárul a test hőmérsékletének megváltoztatásához.

16.6. $h = 2000$ m; $v_1 = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\frac{W_{\text{neh}}}{W_{\text{surl}}} = ?$

Alkalmazzuk a munkatételt:

$$W_{\text{neh}} + W_{\text{surl}} = \Delta E_{\text{mozg}}.$$

$$W_{\text{surl}} = \Delta E_{\text{mozg}} - W_{\text{neh}}\,;$$

$$W_{\text{surl}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - mgh\,;$$

$$W_{\text{surl}} = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} - gh\right);$$

$$\frac{W_{\text{surl}}}{W_{\text{neh}}} = \frac{m\left(\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2} - gh\right)}{mgh};$$

$$\frac{W_{\text{surl}}}{W_{\text{neh}}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,gh} - 1.$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$\frac{W_{\text{surl}}}{W_{\text{neh}}} = \frac{\left(5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(100\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2000 \text{ m}} - 1\,;$$

$$\frac{W_{\text{surl}}}{W_{\text{neh}}} = -1{,}254.$$

A súrlódási erő munkája negatív, a nehézségi erő munkája pozitív, a hányadosuk ezért negatív szám.
A nehézségi és a súrlódási erő által végzett munkák nagyságainak aránya tehát:

$$\underline{\frac{W_{\text{neh}}}{W_{\text{surl}}} = 0{,}8.} \quad \text{(Kerekítés után.)}$$

16.7. *a)* $$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{\dfrac{1}{2} m v_1^2 - \dfrac{1}{2} m v_2^2}{\dfrac{1}{2} m v_1^2} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2.$$

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = 1 - \left(\frac{15\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{20\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2 = \frac{7}{16} = 0{,}44\,;$$

$$\underline{\frac{E_1 - E_2}{E_1} = 0{,}44.}$$

b) <u>Az első vagy a harmadik.</u> A második egy tökéletesen rugalmas esetet ábrázol.

16.8. $l = 2$ m $= 2000$ mm; $\Delta l = 1$ mm; $A = 100$ mm^2 $= 1$ cm^2.

a) $Q = ?$

$$Q = cm\,\Delta t = c\,\varrho\, l\, A\, \Delta t.$$

$$\Delta l = \alpha\, l\, \Delta t; \qquad \Delta t = \frac{\Delta l}{\alpha l}.$$

$$Q = c\varrho l A \frac{\Delta l}{\alpha l} = \frac{c\varrho \cdot A\,\Delta l}{\alpha}.$$

A még hiányzó adatokat táblázatból kikeressük:

$c = 3{,}85\cdot 10^{2}\,\frac{J}{kg\,°C}$; $\varrho = 8{,}96\cdot 10^{3}\,\frac{kg}{m^3}$, $\alpha = 1{,}62\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{°C}$;

Így a szükséges hőmennyiség:

$$Q = \frac{3{,}85\cdot 10^{2}\,\frac{J}{kg\,°C}\cdot 8{,}96\cdot 10^{3}\,\frac{kg}{m^3}\cdot 10^{-4}\,m^2\cdot 10^{-2}\,m}{1{,}62\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{°C}} = 21\,293{,}83\,J;$$

$\underline{Q \approx 21\,300\,J}$

Érdekes, hogy a szükséges hőmennyiség értéke független a rézrúd hosszától.

b) $W = ?$

$$W = \frac{F}{2}\Delta l.$$

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l};$$

tehát $F = EA\dfrac{\Delta l}{l}$.

$$W = \frac{EA}{2l}(\Delta l)^2.$$

Az E (Young-modulus) értékét táblázatból kikeresve:

$$W = \frac{1{,}18\cdot 10^{5}\,\frac{N}{mm^2}\cdot 10^{[illegible]}\,mm^2}{2\cdot 2\,m}\cdot(10^{-3}\,m)^2$$

$\underline{W \approx 2{,}95\,J}$

Ez több mint 7000-szer kevesebb, mint amennyire hőközlés esetén volt szükség. (Az előzőek alapján levezethető, hogy $\frac{W}{Q}$ arányos $\frac{\Delta l}{l}$-lel. Ezért ha $\Delta l \ll l$; akkor $W \ll Q$ kell legyen.)

16.9. A folyamat során a réztömb eredeti helyzeti energiája teljes egészében belső energiává alakul át. Hőközlés nem történik, a réztömb a rajta végzett súrlódási munka következtében melegszik fel.
A hőtan első főtétele értelmében azonban a felmelegedés ugyanolyan mértékű, mintha a többletenergiához nem munka, hanem hőközlés során jutott volna a test. Így írhatjuk:

$$W = Q = cm\,\Delta t;$$

$$mgh = cm\,\Delta t;$$

$$\Delta t = \frac{gh}{c} = \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 40\,m}{3{,}85\cdot 10^{2}\,\frac{J}{kg\,°C}} \approx 1\,°C;$$

$\underline{\Delta t \approx 1\,°C.}$

16.10. $m = 2\,kg$; $c = 1{,}76\cdot 10^{3}\,\frac{J}{kg\,°C}$; $t = 15\cdot 60\,s$; $\Delta T = 10\,°C$;

$P_{min} = ?$

$$P_{min} = \frac{Q}{t} = \frac{cm\,\Delta T}{t} = \frac{1{,}76\cdot 10^{3}\,\frac{J}{kg\,°C}\cdot 2\,kg\cdot 10\,°C}{15\cdot 60\,s} = 39{,}11\,\frac{J}{s};$$

$\underline{P_{min} \approx 39\,W.}$

A melegítő teljesítménye ennél azért nagyobb, mert nemcsak a vizet, hanem annak környezetét is melegíti.

16.11. *a)* Nem igaz. Hő önmagában nem létezik, ezért sem „keletkezni", sem „átalakulni", sem „fejlődni" nem tud. A hő egy speciális energiaközlési forma, olyan, mint a munka. Munka sem tud keletkezni, átalakulni, fejlődni, hő sem. Mind a súrlódás, mind a gáz adiabatikus összenyomása közben emelkedik általában a hőmérséklet. Ennek oka mindkét esetben az, hogy munkavégzés során megnőtt a belső energia. Nem „hő fejlődött" tehát, hanem a belső energia lett több.
b) Ez sem igaz. Ha összenyomjuk a gázt, akkor munkát végzünk. Izotermikus esetben azonban nem változhat a gáz hőmérséklete. Ideális gáz esetén ez azt jelenti, hogy a belső energia is

állandó marad. Hogyan lehetséges ez? A hőtan első főtétele értelmében csak úgy, hogy a folyamat közben a gáz ugyanannyi hőt lead a környezetének, amennyi munkát felvesz. Ehhez állandó hőcserekapcsolatra van szükség a gáz és környezete között.

16.12. Mi a különbség a két folyamat között? Az *a* görbe alatti terület nagyobb, s a végállapot nyomása szintén nagyobb, mint a *b* esetben. Ugyanolyan térfogatváltozás esetén tehát az *a* folyamatban a gáz több munkát végzett, s nyomása kevésbé csökkent, mint a *b* folyamatban.
Tudjuk, hogy adiabatikus tágulás esetén a gáz lehűl, tehát a két görbe közül az az adiabata, amelyik esetén a végállapot hőmérséklete kisebb. Mindkét folyamat végállapotában a térfogatok egyenlők, tehát az az állapot az alacsonyabb hőmérsékletű, amelyik állapot nyomása kisebb. Ez a *b* folyamat végállapota.
Ezért a *b* folyamat az adiabatikus és az *a* folyamat az izotermikus.

16.13. A hőtan első főtétele értelmében ugyanannyi munkával lehet az ideális gázt adiabatikusan (tehát hőközlés nélkül) felmelegíteni, mint amennyi hőt kell közölni akkor, ha állandó térfogaton (tehát munkavégzés nélkül) melegítjük fel a gázt.

Egyik esetben

$\Delta U = W$; ha $Q = 0$.

Másik esetben

$\Delta U = Q$; ha $W = 0$.

Mindkét esetben ugyanaz a ΔU, ha ideális gázról van szó, és ΔT ugyanannyi.
Tekintsük az állandó térfogaton történő hőközlést
($\Delta U = Q$; ha $W = 0$):

$$Q = c_v m\,\Delta T = 6{,}53\cdot 10^2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\cdot 1\,\mathrm{kg}\cdot 480\,{}^\circ\mathrm{C} = 3{,}13\cdot 10^5\,\mathrm{J}.$$

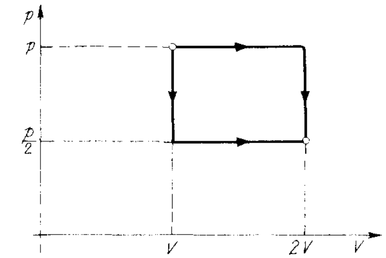
Ennyi tehát a belső energia változása is:

a) $\Delta U = 3{,}13\cdot 10^5\,\mathrm{J}$.

Ennek ismeretében tudjuk meghatározni az adiabatikus munkavégzést ($W = \Delta U$; ha $Q = 0$):

b) $W = 3{,}13\cdot 10^5\,\mathrm{J}$.

16.14. Ábrázoljuk a folyamatokat ($p - V$) diagramon!



a) Az ábráról is látszik, hogy a két végállapot megegyezik.
Mindkét esetben a végállapot térfogata kétszerese, nyomása fele az eredetinek.
b) A gáz által végzett munka akkor több, amikor a tágulás nagyobb nyomáson történik.

$$-W_1 = p\,(2V - V) = pV;$$

$$-W_2 = \frac{p}{2}\,(2V - V) = \frac{pV}{2};$$

$$-W_1 > -W_2.$$

c) A gázon végzett munka mindkét esetben negatív. Mivel az első esetben a gáz által végzett munka nagyobb volt, így ekkor a gázon végzett munka kisebb.

$$W_1 = p\,(V - 2V) = -pV;$$

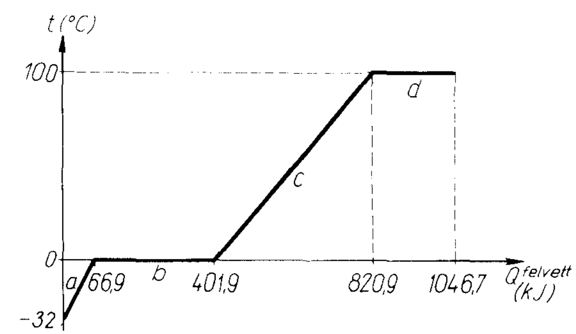
$$W_2 = \frac{p}{2}\,(V - 2V) = -\frac{pV}{2}.$$

Mivel

$$-pV < -\frac{pV}{2};\ \text{ezért}$$

$$W_1 < W_2.$$

16.15.



A folyamat a következő szakaszokból áll:

a) A jég felmelegszik 0 °C-ra;

b) A jég felolvad;

c) A víz felmelegszik 100 °C-ra;

d) A víz egy része elpárolog.

Az egyes szakaszokban felvett hőmennyiségek:

a) $2{,}09 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}} \cdot 1\ \text{kg} \cdot 32\ {}^\circ\text{C} = 6{,}69 \cdot 10^4\ \text{J}.$

b) $3{,}35 \cdot 10^5 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 1\ \text{kg} = 3{,}35 \cdot 10^5\ \text{J}.$

c) $4{,}19 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}} \cdot 1\ \text{kg} \cdot 100\ {}^\circ\text{C} = 4{,}19 \cdot 10^5\ \text{J}.$

d) $2{,}26 \cdot 10^6 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot X =$

$= 1{,}047 \cdot 10^6\ \text{J} - (6{,}69 \cdot 10^4 + 3{,}35 \cdot 10^5 + 4{,}19 \cdot 10^5)\ \text{J};$

$X = 0{,}1\ \text{kg}.$

Tehát a víz tömegének 10%-a forr el.

16.16. Egyenlő tömegű jégről és vízgőzről van szó. Egy gramm 0 °C-os jég felolvasztásához $3{,}35 \cdot 10^2$ J hő kell, a keletkezett 0 °C-os víz 100 °C-ra való melegítéséhez $4{,}19 \cdot 10^2$ J hő kell. Ez összesen $7{,}54 \cdot 10^2$ J. Ugyanakkor 1 g 100 °C-os vízgőz lecsapódásakor felszabadulna $2{,}26 \cdot 10^3$ J hő. Ez azt jelenti, hogy a vízgőznek csak *egy része* csapódik le, s fedezi ezzel a jég felolvasztásához, majd a víz felmelegítéséhez szükséges hőmennyiséget. Tehát:

a) **a végállapot hőmérséklete 100 °C lesz.**

b) **Az 1 gramm jégből és az 1 gramm vízgőz** $\dfrac{7{,}54 \cdot 10^2\ \text{J}}{2{,}26 \cdot 10^3\ \text{J}}$-ed

részéből **keletkezik víz. Összesen:**

$m_{víz} = 1\ \text{g} + 0{,}33\ \text{g} \,| = \dfrac{4}{3}$ **gramm.**

16.17. *a)* $4{,}19 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}}$; *b)* $335 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$;

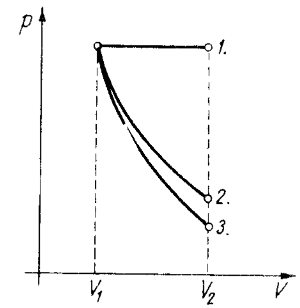
c) $2260 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$; *d)* $2{,}09 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\ {}^\circ\text{C}}$.

16.18. Vagy munka, vagy hő, vagy mindkettő hatására. (Lásd a *16.5.* megoldását!)

16.19. $W = -2728$ J.

16.20. $\Delta T = 0{,}1$ °C (a tömegtől függetlenül).

16.21. $P \geqq 280$ W.



16.22. *a)* Az ábrán látható.

b) Amikor adiabatikusan tágul. (Legkisebb a görbe alatti terület!)

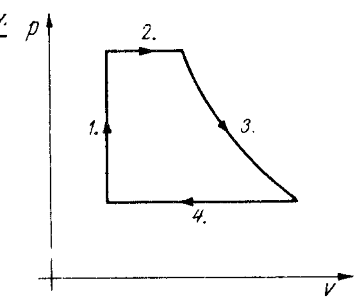
c) Izobár: $\Delta U > 0$; $(\Delta T > 0)$

Izoterm: $\Delta U = 0$. $(\Delta T = 0)$

Adiabatikus: $\Delta U < 0$. $(\Delta T < 0)$

16.23. $T_2 = 386$ K $= 113$ °C. ($V_1 = 0{,}3$ m³; $V_2 = 0{,}4$ m³.)

16.24. *1.*) *2.*) *3.*) a gáz hőt vett fel, *4.*) a gáz hőt adott le.



16.25. $m_{réz} = 0{,}11$ kg.

16.26. $m_{víz} = 6{,}9$ g.

16.27. $P = 4{,}6$ W.

16.28. Igen, a víz fele még megvolt.

16.29. A hőerőgép termodinamikai hatásfoka:

$$\eta = \frac{-W}{Q_1};$$

ahol $-W$ jelenti a körfolyamat egy periódusa során az a n y a g á l t a l v é g z e t t m u n k á t,
Q_1 p e d i g k i z á r ó l a g a f e l v e t t h ő k ö s s z e g é t.
A hűtőgép jósági tényezője:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W},$$

ahol W jelenti a körfolyamat egy periódusa során az a n y a g o n végzett munkát,
Q_2 pedig k i z á r ó l a g a z e l v o n t h ő k ö s s z e g é t.
A termodinamika második főtétele szerint

$$\eta \leqq \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \text{ illetve } \qquad \varepsilon \leqq \frac{T_2}{T_1 - T_2};$$

ahol T_1 a körfolyamatot végző anyag legmagasabb hőmérséklete (most 227 °C = 500 K), és T_2 a körfolyamatot végző anyag legalacsonyabb hőmérséklete (most 27 °C = 300 K).
Ezek szerint a tekintett esetben

$$a)\ \eta \leqq \frac{500 - 300}{500} = 40\%;$$

$$b)\ \varepsilon \leqq \frac{300}{500 - 300} = 1{,}5.$$

16.30. A hűtőgép 1 periódusára felírva a hőtan első főtételét:

$$Q_{\text{elvont}} + W_{\text{felvett}} = Q_{\text{leadott}}.$$

Elosztva ezt az egyenletet periódus idejével, teljesítményegyenletet kapunk:

$$P_{\text{elvont}} + P_{\text{felvett}} = P_{\text{leadott}}.$$

A feladat szerint:

$$P_{\text{elvont}} = \frac{6 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3\ \text{J}}{1\ \text{min}} = \frac{6 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3\ \text{J}}{60\ \text{s}} = \frac{418\ \text{J}}{\text{s}} = 418\ \text{W}.$$

$$P_{\text{felvett}} = 1\ \text{kW} = 1000\ \text{W}.$$

Tehát a szoba fűtésére fordítódó teljesítmény:

$$\underline{P_{\text{leadott}} = 1418\ \text{W}.}$$

16.31. 5% teljesítményveszteség fordítódik az áthaladó levegő felmelegítésére. Így tehát egy másodperc alatt:

$$0{,}05 \cdot 10^6\,\text{W} \cdot 1\ \text{s} = 600\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\ ^\circ\text{C}} \cdot 1{,}5\ \text{kg} \cdot \Delta T;$$

$$\Delta T = 55\ ^\circ\text{C}.$$

A hűtőből kiáramló levegő hőmérséklete:

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 20\ ^\circ\text{C} + 55\ ^\circ\text{C} = 75\ ^\circ\text{C};$$

$$\underline{T_2 = 75\ ^\circ\text{C}.}$$

16.32. $P_{\text{hasznos}} = 735{,}5\ \text{kW}.$

$$P_{\text{összes}} = \frac{P_{\text{hasznos}}}{0{,}15}.$$

$$W = P \cdot t = \frac{735{,}5\ \text{kW}}{0{,}15} \cdot 3600\ \text{s} = 1{,}8 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

Minthogy a nyersolaj fűtőértéke $4{,}61 \cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; ezért a szükséges olaj tömege:

$$m = \frac{1{,}8 \cdot 10^{10}\ \text{J}}{4{,}61 \cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 384\ \text{kg}.$$

Térfogata:

$$V \doteq \frac{m}{\varrho} = \frac{3{,}84 \cdot 10^2\ \text{kg}}{8{,}5 \cdot 10^2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 4{,}51 \cdot 10^{-1}\ \text{m}^3.$$

$$\underline{V = 0{,}45\ \text{m}^3 = 450\ \text{liter}.}$$

16.33. A hőmérő felmelegítésére fordítandó hőmennyiséget az a rendszer adja le, amelynek a hőmérsékletét mérni szeretnénk.
Így a közös hőmérséklet valamennyivel eltér a rendszer eredeti hőmérsékletétől.
Ez az eltérés annál kisebb (vagyis a hőmérő annál pontosabban mutatja az e r e d e t i hőmérsékletet), minél kisebb a hőmérő hőkapacitása (fajhőjének és tömegének szorzata) a vizsgált rendszer hőkapacitásánál.

Esetünkben

$$33{,}49\,\frac{\mathrm{J}}{^{\circ}\mathrm{C}}\,(T^*-25) = 4186{,}8\,\frac{\mathrm{J}}{^{\circ}\mathrm{C}}\,(40-T^*);$$ vagyis a hőmérőről

leolvasható közös hőmérséklet: $\underline{T^* = 39{,}88\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

Megjegyzés:

Többek között ezért sem lehet megmérni higanyos hőmérővel pl. egy légy hőmérsékletét.

16.34. Másfél deci víz = 0,15 kg víz, ha a hőtágulástól eltekintünk. Mind a nyolc esetben e 70 °C-os másfél deci víz által leadott hő és a termoszban levő 10 °C-os anyagok által felvett hő ugyanaz. Így írhatjuk:

$$c_1 m_1 (t_1 - t_k) = c_2 m_2 (t_k - t_2);$$

$$t_k = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}.$$

Valamennyi esetben: $t_1 = 70\ ^{\circ}\mathrm{C}$; $t_2 = 10\ ^{\circ}\mathrm{C}$, $t_k = ?$

1. $c_2 = c_1$; $m_2 = m_1$ tehát $\underline{t_k = \frac{t_1 + t_2}{2} = 40\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

2. $c_2 = c_1$; $m_2 = 2m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{t_1 + 2t_2}{3} = 30\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

3. $c_2 = \frac{c_1}{30}$; $m_2 = m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{30t_1 + t_2}{31} = 68\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

4. $c_2 = \frac{c_1}{30}$; $m_2 = 2m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{30t_1 + 2t_2}{32} = 66{,}3\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

5. $c_2 = \frac{c_1}{30}$; $m_2 = 13{,}6m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{30t_1 + 13{,}6t_2}{43{,}6} = 51{,}2\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

6. $c_2 = \frac{c_1}{30}$; $m_2 = 27{,}2m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{30t_1 + 27{,}2t_2}{57{,}2} = 41{,}5\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

7. $c_2 = c_1$; $m_2 = m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{t_1 + t_2}{2} = 40\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

8. $c_2 = c_1$; $m_2 = 2m_1$; tehát $\underline{t_k = \frac{t_1 + 2t_2}{3} = 30\ ^{\circ}\mathrm{C}}$.

16.35. Jelöljük az alul levő, hidegebb folyadékot A-val, a felette levő melegebbet B-vel. Először számítsuk ki a közös t^* hőmérsékletet:

$$c_A m_A (t^* - t_A) = c_B m_B (t_B - t^*);$$

$$t^* = \frac{c_A m_A t_A + c_B m_B t_B}{c_A m_A + c_B m_B}.$$

Szokás szerint elhanyagolva a fajhő hőmérsékletfüggését $c_B = c_A$;

tehát $t^* = \frac{m_A t_A + m_B t_B}{m_A + m_B}$.

Jelöljük V_0-lal a 0 °C hőmérsékleten mérhető térfogatot, V^*-gal a t^* hőmérsékleten mérhető térfogatot. Ebben az esetben az eredeti térfogatok

$$V_A = V_{0A}(1 + \beta t_A) \text{ és } V_B = V_{0B}(1 + \beta t_B);$$

a hőmérséklet-kiegyenlítődés után pedig

$$V_A^* = V_{0A}(1 + \beta t^*) \text{ és } V_B^* = V_{0B}(1 + \beta t^*).$$

Számítsuk ki az egész folyadék térfogatának ΔV növekményét:

$$\Delta V = (V_A^* + V_B^*) - (V_A + V_B);$$

$$\Delta V = [V_{0A}(t^* - t_A) + V_{0B}(t^* - t_B)]\beta.$$

Behelyettesítve t^* kiszámított értékét:

$$\Delta V = \left[V_{0A}\frac{m_B(t_B - t_A)}{m_A + m_B} + V_{0B}\frac{m_A(t_A - t_B)}{m_A + m_B}\right]\beta.$$

$$\Delta V = \frac{(V_{0A}m_B - V_{0B}m_A)(t_B - t_A)}{m_A + m_B}\beta.$$

Fejezzük ki a 0 °C-hoz tartozó térfogatokat a sűrűséggel és a tömegekkel:

$$V_{0A} = \frac{m_A}{\varrho_0} \quad \text{és} \quad V_{0B} = \frac{m_B}{\varrho_0}.$$

Helyettesítsük be ezeket:

$$\Delta V = \frac{\left(\frac{m_A}{\varrho_0}m_B - \frac{m_B}{\varrho_0}m_A\right)(t_B - t_A)}{m_A + m_B}\beta.$$

Ez viszont zérus, mivel a számláló első tényezője zérus. Tehát $\underline{\Delta V = 0}$. Vagyis az egész térfogat változatlan marad.

16.36. A kaloriméterben (termoszban) történő keveredés esetén a kör nyezettel nincs hőcsere. Ha előjelesen összeadjuk az egyes folyadékok által felvett hőmennyiségeket, zérust kell kapnunk. Így:

$$Q_{össz} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0;$$

$$c_1 m_1 (t_k - t_1) + c_2 m_2 (t_k - t_2) + c_3 m_3 (t_k - t_3) = 0.$$

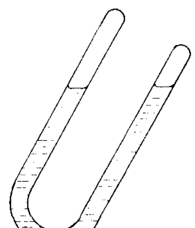
Ebből a közös hőmérsékletet kifejezve, kapjuk:

$$t_k = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + c_3 m_3 t_3}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}.$$

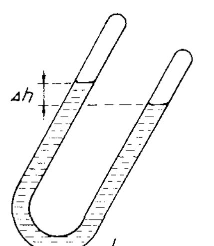
A közös hőmérséklet tehát az eredeti hőmérsékletek „súlyozott" számtani közepe; a súlytényezők az egyes hőkapacitások (*cm* szorzatok).

16.37. Meg kell dönteni a csövet.

Ha a két vízszint azonos magasságban marad, akkor vízgőz van a víz felett, mivel ennek nyomása csak a hőmérséklettől függ, a térfogattól nem. Ha csökken a térfogat, lecsapódik a gőz egy része. Éppen annyi, hogy a nyomás változatlan maradhasson. Ha mindkét oldalon a vízfelületre ugyanakkora nyomás hat, akkor a két szint egyenlő magas (*a*) ábra). Ha a víz felett levegő volt, akkor a megdöntés után az egyik oldalon megnő a nyomás, a másikon csökken, s ennek megfelelően a két vízszint különböző magasságú lesz. A magasságkülönbségből adódó hidrosztatikus nyomás tart egyensúlyt a levegőoszlopok nyomásainak különbségével (*b*) ábra).



a)



b)

16.38. A folyamat két részből tehető össze. Amíg a gőz el nem éri a T_B hőmérsékletet és p_B nyomást, addig az edényben a gőzön kívül még folyadék is van. A $T_A \rightarrow T_B$ folyamatban a folyadék fokozatosan párolog el. A $T_B \rightarrow T_C$ folyamatban az edényben egyedül jelen levő gőz már ideális gázként viselkedik: nyomása az abszolút hőmérséklettel arányosan növekszik.

16.39. Igen. Ez az egyik irányú szublimáció. Közismert szilárd anyagok, amelyek szobahőmérsékleten párolognak: naftalin, szárazjég vagy szénsavhó (szilárd CO_2), jód, bróm. A folyadék halmazállapotnak egyik rendkívül furcsa tulajdonsága az, hogy csak olyan nyomás mellett jön létre, amely nagyobb egy bizonyos – az anyagra jellemző – minimális értéknél. Ennél kisebb nyomáson a tiszta anyag csak szilárd vagy gáz halmazállapotban fordulhat elő; vagyis a szilárd anyag párolog el gázzá, és a gáz lecsapódásakor szilárd anyag keletkezik. A legtöbb anyagra az a minimális nyomás, amely a folyadékhoz szükséges, kisebb mint $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Így a legtöbb gáz $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson cseppfolyósítható, ha eléggé lehűtjük, és a legtöbb szilárd anyag $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson megolvasztható, ha eléggé felmelegítjük.

Ugyanakkor van néhány olyan anyag is, amelynél a folyadékállapothoz szükséges minimális nyomás nagyobb, mint $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Ilyen például a szén dioxid, amely csak legalább $5{,}07 \cdot 10^5$ Pa nyomás esetén vehet fel cseppfolyós halmazállapotot. Ezért a közönséges $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson csak szilárd vagy gáz halmazállapotú szén-dioxid fordulhat elő. H_2O esetén ez a minimális nyomás 600 Pa. Ennél kisebb nyomás esetén tehát nincs víz, csak jég és gőz! Ekkor már a jég sem tud felolvadni, csak elpárologni.

16.40. A felolvasztáshoz és felmelegítéshez szükséges hőmennyiség:

$$Q_1 = 5\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}35 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} + 20\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \cdot 80\,^\circ\mathrm{C} = 8{,}38 \cdot 10^6\,\mathrm{J}.$$

Az *m* tömegű vízgőz lecsapódásakor és lehűlésekor felszabaduló hőmennyiség:

$$Q_2 = m \cdot 2{,}26 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} + m \cdot 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}}\,(100 - 80)\,^\circ\mathrm{C} =$$

$$= m \cdot 2{,}34 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$$

Feltéve, hogy az egész rendszer a környezetnek nem adott le s attól nem is kapott hőt, írhatjuk:

$$Q_1 = Q_2;$$

$$8{,}38 \cdot 10^6\ \text{J} = m \cdot 2{,}34 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}};$$

$$\underline{m = 3{,}52\ \text{kg}.}$$

Érdemes megjegyezni, hogy ennyi 100 °C hőmérsékletű, $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomású vízgőz térfogata körülbelül 6 m³.

16.41. A 100 °C-os telített vízgőz nyomása is $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Így azonos hőmérsékletű, nyomású és térfogatú két gázt kell összehasonlítani. Ebben az esetben a molekulák száma megegyezik, tehát a molekulasúly a döntő. Amelyiknek a molekulasúlya nagyobb, annak a tömege is nagyobb. A vízgőz molekulasúlya 18, a levegő túlnyomó részét alkotó nitrogén, illetve oxigén molekulasúlya pedig 28, illetve 32.

Tehát a <u>levegő a nehezebb</u>!

Egy köbméter vízgőz tömege kb. 0,60 kg, a levegőé pedig 0,95 kg a fenti feltételek mellett.

16.42. Rögzített dugattyú esetén

$$Q_1 = c_v m\,(t - t_0) = 14\,000\ \frac{\text{J}}{°\text{C}} \cdot 20\ °\text{C} = 280\,000\ \text{J}$$

hőt kellene közölni. Ez akkor teljes egészében a gáz belső energiáját növelné. Az ideális gáz belső energiája és hőmérséklete azonban egyértelmű kapcsolatban vannak, így, ha állandó n y o m á s o n is növeljük a gáz hőmérsékletét t_0-ról t-re, akkor is a b e l s ő e n e r g i a ú g y a n ú g y n ő, mint az előbb, állandó térfogat esetén.
Az állandó nyomású folyamatban azonban nő a gáz térfogata, és így a gáz munkát is végez. A szükséges hő tehát az előbb kiszámított $Q_1 = \Delta U = 280\,000$ J-nál annyival több, amennyi munkát kell a gáznak végeznie.

Először határozzuk meg a térfogat növekedését. Állandó nyomáson:

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0};\ \text{tehát}\ V = V_0 \frac{T}{T_0}.$$

A térfogat növekedése:

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 \frac{T}{T_0} - V_0 = V_0 \frac{T - T_0}{T_0}.$$

$$\Delta V = 25\ \text{m}^3\ \frac{293 - 273}{273} = 1{,}83\ \text{m}^3.$$

Mekkora nyomást fejtett ki a gáz?

Egyrészt ellensúlyoznia kellett a külső $p_0 = 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ nyomást, másrészt emelnie kellett az 5 kg tömegű és 0,01 m² keresztmetszetű dugattyút is. A dugattyú súlya így egy plusz nyomást jelentett:

$$p^* = \frac{5 \cdot 9{,}81\ \text{N}}{0{,}01\ \text{m}^2} = 4{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

A gáz által kifejtett nyomás e kettő összege:

$$p = p_0 + p^* = 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 4{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 104{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

A lassú izobár folyamatban a gáz által végzett munka:

$$p\,\Delta V = 104{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1{,}83\ \text{m}^3 = 192 \cdot 10^3\ \text{Nm}.$$

$$-W = 192\,000\ \text{J}.$$

<u>A gázzal tehát $Q_2 = Q_1 + (-W) = 472\,000$ J hőt kell közölni.</u>

16.43. Először számítsuk ki a kezdeti térfogat értékét. Adatok:
$T_1 = 300$ K; $m_1 = 0{,}5$ kg; $M = 4$; $p_1 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa;
$V_{\text{kezd}} = ?$
Hasonlítsuk ezt össze a normálállapottal:
$T_2 = 273$ K; $m_2 = 4$ g; $p_2 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa; $V_2 = 22{,}41$ liter.

A két állapot közötti összefüggés:

$$\frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{p_2 V_2}{m_2 T_2};\ \text{vagyis:}$$

$$\frac{1{,}01 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot 22{,}41\ \text{liter}}{4\ \text{g} \cdot 273\ \text{K}} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot V_{\text{kezd}}}{500\ \text{g} \cdot 300\ \text{K}}$$

ahonnan

$$V_{\text{kezd}} = 3{,}08 \cdot 10^3\ \text{liter} = 3{,}08\ \text{m}^3.$$

Most számítsuk ki a térfogatot a folyamat végén! Mivel a nyomás nem változott, ezért

$\frac{V_{\text{kezd}}}{T_{\text{kezd}}} = \frac{V_{\text{vég}}}{T_{\text{vég}}}$; vagyis:

$\frac{3{,}08\ \text{m}^3}{300\ \text{K}} = \frac{V_{\text{vég}}}{460\ \text{K}}$; ahonnan

$V_{\text{veg}} = 4{,}72\ \text{m}^3$.

A táguló gáz által végzett munka az izobár folyamatban:

$$-W = p(V_{\text{vég}} - V_{\text{kezd}}) = 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\ (4{,}72\ \text{m}^3 - 3{,}08\ \text{m}^3).$$

$$-W = 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot 1{,}64\ \text{m}^3 = 1{,}6564 \cdot 10^5\ \text{J};$$

$$-W = 1{,}6564 \cdot 10^5\ \text{J}.$$

A gáz felvett 4,1864 J hőt, és leadott $1{,}6564 \cdot 10^5$ J munkát, tehát a hőtan első főtétele alapján belső energiája $2{,}53 \cdot 10^5$ J-lal nőtt.

16.44. Határozzuk meg az $1{,}01 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$ légköri nyomás ellen végzett munkát. (Úgy gondolhatjuk, hogy a vízgőz tömegének növekedésekor egy súlytalan dugattyút tol maga előtt; a dugattyúra mindkét oldalról $1{,}01 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$ nyomás hat.)

1 gramm víz térfogata 1 cm^3.

Mire az egész elpárolog, térfogata

$$V = \frac{m}{\varrho} = \frac{1\ \text{g}}{6 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 1667\ \text{cm}^3.$$

A térfogatváltozás tehát $1667\ \text{cm}^3 - 1\ \text{cm}^3 = 1666\ \text{cm}^3$.

A vízgőz által végzett munka

$$-W = 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1666\ \text{cm}^3 = 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1{,}666 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 =$$

$$= 168{,}27\ \text{J}.$$

$$-W = 168{,}27\ \text{J}.$$

Az elpárolgáshoz be kellett fektetni $2{,}26 \cdot 10^3$ J hőmennyiséget. Ebből tehát 168,27 J fordítódott a tágulási munkára, a többi növelte a belső energiát. Százalékosan kifejezve: a befektetett hő 92,5%-a a belső energiát növelte, 7,5%-a pedig munkavégzésre használódott el.

16.45. Az alsó gömb belsejében levő vízgőz nyomása a folyékony levegő nagyon alacsony (−192 °C) hőmérsékletén rendkívül alacsony ($1{,}33 \cdot 10^{-1}$ Pa-nál kisebb) telítési értékre áll be. Ennek hatására a felső gömbön levő nagyobb nyomású vízgőz gyorsan az alsó gömb felé áramlik. A víz fölötti térben a víz rohamosan párologni kezd, hogy az eltávozó gőzt pótolja. Eközben egyre jobban lehűl, s előbb-utóbb megfagy. A fagyás biztosan bekövetkezik akkor, amikor a felső gömbben a nyomás 600 Pa alá süllyed.

Ennél kisebb nyomás esetén ugyanis már H_2O nem létezhet cseppfolyós halmazállapotban. (Lásd még a *16.39.* feladat megoldását is!)

17. Elektrosztatika

17.1. A Coulomb-törvény szerint két pontszerű töltés között az erőhatás vákuumban:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2};$$

ahol $k = 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}$.

Ebből, a feladatnak megfelelő $Q_1 = Q_2 = Q$ esetben:

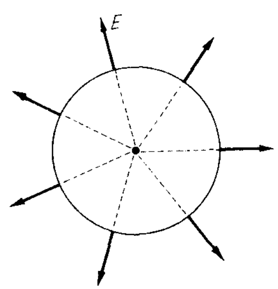
$$Q^2 = \frac{r^2 F}{k}.$$

Helyettesítve az $r = 1$ m; $F \approx 10^{-3}$ N adatokat:

$$Q^2 = \frac{1\ \mathrm{m^2}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}{9\cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}};$$

$$\underline{Q = \frac{1}{3}\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}.}$$

17.2. A pontszerű töltéstől r távolságban, vákuumban a térerősség:



$$E = k\frac{Q}{r^2}.$$

Adatainkkal:

$$E = 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \frac{10^{-5}\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{m^2}} = 9\cdot 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Vagy: $\underline{E = 9\cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.}$

Ugyanennyi a térerősség a ponttöltést mint középpontot körülvevő g ö m b f e l ü l e t minden pontjában. A térerősségvektorok a gömbsugarak egyeneseiben kifelé irányulnak.

17.3. A kondenzátorra vitt töltés és a kondenzátor feszültsége egymással egyenesen arányosak:

$Q = CU$.

Az adatokkal:

$Q = 16\ \mu\mathrm{F}\ 350\ \mathrm{V} = 16\cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}\ 350\ \mathrm{V}$;

$\underline{Q = 5{,}6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{C}.}$

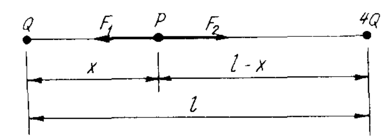
17.4. A harmadik, nem rögzített töltés csak a két rögzített töltést összekötő szakasz valamely meghatározott pontjában lehet egyensúlyban. (Más pontokban a rögzített töltések által kifejtett két taszító- vagy vonzóerő vektori eredője nem lehet zérus.)

Az alkalmas P pontban az odahelyezett Q töltésre ható erők:

$$F_1 = k\frac{Q^2}{x^2};\quad F_2 = k\frac{4Q^2}{(l-x)^2}.$$

A két erő egymással egyenlő nagyságú (és ellentétes irányú), tehát:

$$k\frac{Q^2}{x^2} = k\frac{4Q^2}{(l-x)^2}.$$



Ebből: $3x^2 + 2lx - l^2 = 0$.

Az egyenlet két megoldása közül $x = -l$

fizikailag értelmetlen. Az egyensúlyi helyzetre:

$$\underline{x = \frac{l}{3}.}$$

17.5. A P pontban a térerősséget a Q_1 töltés által létrehozott, valamint a Q_2 töltés által létrehozott térerősség eredője adja meg.

$$E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^2}; \qquad E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^2}.$$

Mivel a térerősséget a p o z i t í v egységnyi töltésre ható erővel mérjük, E_1 és E_2 iránya egymással ellentétes, az eredő a rögzített töltések felé mutat.

$$E = E_2 - E_1 = k\left(\frac{Q_2}{r_2^2} - \frac{Q_1}{r_1^2}\right) =$$

$$= 9\cdot 10^9\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\left(\frac{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{2^2\,\mathrm{m^2}} - \frac{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{2{,}5^2\,\mathrm{m^2}}\right);$$

$$E = 1620\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};$$

vagy felhasználva, hogy $1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$;

$$\underline{E = 1620\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}};}$$

17.6. A golyóra ható erő:

$$F = EQ = 10^5\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} = 10^5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C};$$

$$F = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

A gyorsulás:

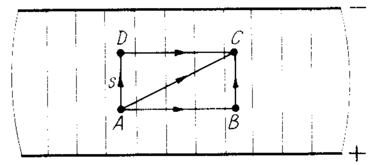
$$a = \frac{F}{m} = \frac{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}}{5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 0{,}4\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2\,kg}};$$

$$\underline{a = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.}$$

17.7. *a)* Az AB (és hasonlóan a DC) szakaszon nem történik munkavégzés, mivel a térerősség, illetve a töltésre ható erő iránya merőleges az elmozdulásra.

$$W_{\mathrm{AB}} = W_{\mathrm{DC}} = 0.$$

A térerősség (illetve az adott töltésre ható erő) a homogén tér minden pontjában ugyanakkora, és párhuzamos az erővonalakkal.

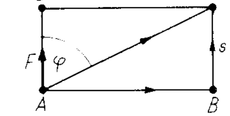


Mivel az AD és BC szakaszok egyenlő hosszúak és párhuzamosak, a két szakaszon a munka ugyanakkora.

Felhasználva, hogy az E térerősségű pontban a Q töltésre ható erő

$$F = EQ;$$

az AD; illetve BC szakaszon a munka:



$$W_{\mathrm{AD}} = W_{\mathrm{BC}} = Fs = EQs = 10^3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\,10^{-2}\,\mathrm{m} = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}.$$

Az AC szakaszon végzett munka kiszámításához figyelembe kell vennünk, hogy a töltésre ható erő (illetve a térerősség) φ szöget alkot az elmozdulás irányával, tehát a munka:

$$W_{\mathrm{AC}} = F\cdot AC\cdot\cos\varphi = EQ\cdot AC\cdot\cos\varphi.$$

Ha azonban felhasználjuk, hogy

$$AC\cdot\cos\varphi = AD = s;$$

az AC szakaszon végzett munka:

$$W_{\mathrm{AC}} = EQs = W_{\mathrm{AD}} = W_{\mathrm{BC}}.$$

Az előzőkből tehát az következik, hogy

$$\underline{W_{\mathrm{ABC}} = W_{\mathrm{ADC}} = W_{\mathrm{AC}} = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}.}$$

Azt találjuk, hogy a töltés elmozdulásakor végzett munka nem függ attól, hogy milyen úton jut az A pontból a C-be, hanem csak az A és C egymáshoz viszonyított helyzetétől.

b) Az elektrosztatikus tér két pontja között a feszültség (potenciálkülönbség) számértékét a pozitív egységnyi töltésnek az egyik pontból a másikba történő elmozdulásakor végzett munka adja meg. Mivel az AB szakaszon a munka zérus, a két pont között nincsen potenciálkülönbség:

$$U_{\mathrm{AB}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} = \frac{W_{\mathrm{AB}}}{Q} = 0;$$

$$\underline{U_{\mathrm{AB}} = 0.}$$

(Az erővonalakra merőleges, az A és B pontra illeszkedő sík minden pontjához azonos potenciál tartozik, a sík pontjai e k v i p o t e n c i á l i s felületet alkotnak.)

Ugyanígy a D és C pontok közötti feszültség is zérus:

$U_{DC} = 0.$

(A D és C-t tartalmazó, az előzővel párhuzamos sík ugyancsak ekvipotenciális felület.)
Az A és D;
valamint az A és C pontok között a feszültség:

$$U_{AD} = U_{AC} = \frac{W_{AD}}{Q} = \frac{5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}}{5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}} = 10\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}};$$

$$\underline{U_{AD} = U_{AC} = 10\ \mathrm{V}.}$$

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk az alábbi számítás alapján is:

$$U_{AD} = \frac{W_{AD}}{Q} = \frac{EQs}{Q} = Es;$$

$$U_{AD} = Es = 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,10^{-2}\ \mathrm{m} = 10\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 10\ \mathrm{V}.$$

(Homogén elektrosztatikus térben két pont között a feszültség egyenlő az elmozdulás és a térerősség elmozdulásirányú vetületének szorzatával.)

c) A kondenzátor két lemeze között a feszültség – az előbbiek alapján:

$$U = Ed = 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 30\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}};$$

$$\underline{U = 30\ \mathrm{V}.}$$

17.8. Homogén térben a Q töltésű részecskére állandó erő hat, amelynek hatására egyenletesen gyorsuló mozgással halad. Az elektromos erőhatás:

$$F = EQ. \qquad (1)$$

Alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét, valamint az egyenletesen változó mozgás $v_0 = 0$ esetre vonatkozó út- és sebességfüggvényeit:

$$F = ma;$$

$$s = \frac{a}{2}t^2;\ v = at.$$

Ebből: $a = \dfrac{v^2}{2s}$;

$$F = \frac{mv^2}{2s} \qquad (2)$$

Az *(1)* és *(2)* felhasználásával:

$$\frac{mv^2}{2s} = EQ;$$

$$v^2 = \frac{2QEs}{m} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}\ 10^{1}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ 10^{-1}\ \mathrm{m}}{10^{-9}\ \mathrm{kg}} = 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2};$$

$$\underline{v = 4{,}47 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

A feladatot megoldhatjuk a munkatétel alkalmazásával is:

$$\Delta E_{kin} = W;$$

ahol

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2;$$

$$W = QU = QEs.$$

Ebből:

$$\frac{1}{2}mv^2 = QEs;$$

$$v^2 = \frac{2QEs}{m}.$$

17.9. A *17.8.* feladat második megoldása során láttuk, hogy E térerősségű homogén térben a Q töltésű kis test s úton létrejött gyorsulása folytán a kinetikai energia változása:

$$\Delta E_{kin} = QEs.$$

A feladat körülményei között, az $\frac{s}{2}$ út befutása során a golyó

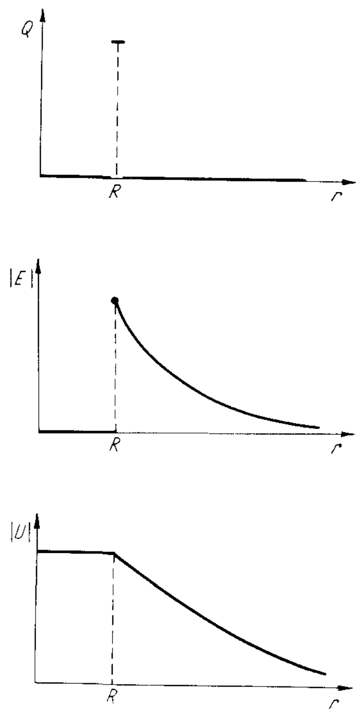
$$E_{k1} = QE\frac{s}{2}$$

kinetikai energiát nyer. A rugalmas ütközés következtében viszont, mivel a másik golyó nyugszik, és ugyanakkora tömegű, az első golyó sebessége zérusra csökken (és a másik golyó pattan el ugyanakkora sebességgel). Ráadásul az érintkezés közben az első golyó töltése megoszlik a két golyón, és így csak fele töltésű lesz. Az ütközés után tehát a nyugvó, $\frac{Q}{2}$ töltésű (első) golyó gyorsul ismét $\frac{s}{2}$ úton:

$$E_{k2} = \frac{Q}{2} E \frac{s}{2} = \frac{1}{4} QEs;$$

$$E_{k2} = \frac{1}{4} E_k.$$

17.10. A tömör, egyetlen anyagból készült, elektromosan töltött fémgömb belsejében a térerősség zérus. A szabad töltések ugyanis a vezető külső felületén helyezkednek el. Ha a gömb valamely belső pontjában a térerősség nem volna zérus, ennek hatására még további töltések mozognának, még nem volna sztatikusan töltött állapotban a gömb. (Hasonló módon látható be egyébként, hogy a belül üres fémgömb belső pontjaiban is zérus a térerősség.)



A gömb külső felületén töltött állapotban a térerősség természetesen már nem zérus, és a térerősségvektor iránya mindenhol merőleges a felületre. (Ha ugyanis a térerősségnek valamely pontban volna az érintősíkba eső összetevője, ennek hatására a töltések a felületen még elmozdulnának.)

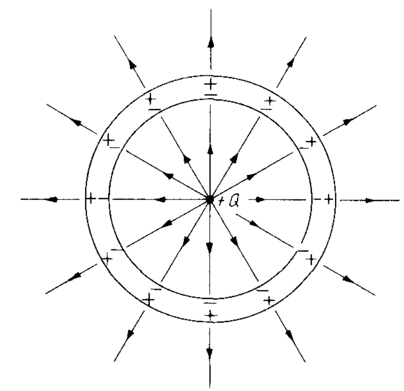
A gömbön kívüli térben a térerősség abszolút értéke a (gömb középpontjától mért) távolság négyzetével fordított arányban csökken.

Az elektrosztatikai egyensúly állapotában a fémgömb pontjaiban a potenciál mindenhol ugyanakkora (a belső és a felületen levő pontokban egyaránt). A fém minden pontja egyetlen ekvipotenciális felületet alkot. (Ha volna potenciálkülönbség két pont között, a töltések mozognának.)

A gömbön kívüli térben a potenciál abszolút értéke a (gömb középpontjától mért) távolsággal fordított arányban csökken.

A diagram a térerősség és a potenciál abszolút értékének változását mutatja a gömb középpontjától mért r távolság függvényében, ahol R a gömb sugara. (A potenciált a végtelenben vettük zérusnak.)

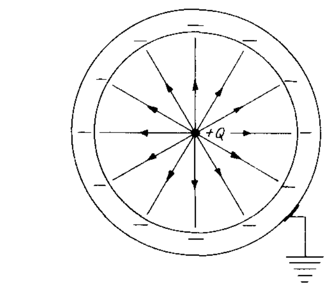
17.11. *a)* A belül üres gömb belsejében elhelyezkedő $+Q$ töltés hatására az eredetileg semleges gömbhéj elektromos töltései a megosztás következtében úgy válnak szét, hogy a héj belső felülete negatív, a külső felület pozitív töltésű lesz.



b) A gömbön belül az erővonalak, a $+Q$ töltésből kiindulva, a gömbhéj belső felületén létrejött negatív $(-Q)$ töltésekig tartanak.

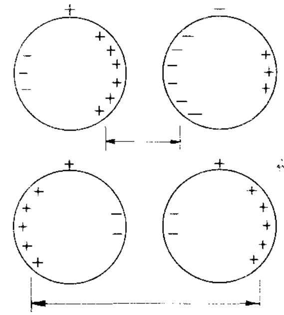
Mivel a (nem földelt) külső héj pozitív töltésű (ugyancsak $+Q$), a gömbön kívüli térben újabb, második erővonalrendszer alakul ki, amely ugyanolyan, mintha $+Q$ töltésű fémgömb létesítené.

c) Elektrosztatikus erőtér tehát a gömbön kívül is létrejön, és ezért a kívül levő töltésre is hat erő, amennyiben a gömb nem földelt.



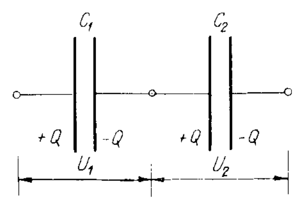
d) Földeléssel a külső felületről a pozitív töltéseket elvezetjük. Ez pontosabban azt jelenti, hogy – a fémes összeköttetés miatt – a gömb külső felülete és a Föld között a potenciálkülönbség zérus lesz, ami csak úgy valósulhat meg, ha a gömb külső felületén a (különböző előjelű) szabad töltések algebrai összege zérus lesz.

Ezáltal a gömb belsejében kialakult elektrosztatikus állapot nem változik meg, azonban a gömbön kívüli térben az elektromos tér megszűnik. (A földelt gömb elektrosztatikusan á r n y é k o l j a a külső térrészt a belső elektromos hatásoktól.)



17.12. Az elektromosan töltött fémtesten a megfelelő előjelű töltés túlsúlyban van, de jelen van az ellentétes töltés is kisebb mennyiségben. Amikor másik töltött test van a közelében, a töltések előjelétől függően megosztás jön létre az első testen, és hasonlóan: az első test hatására a másodikon is megosztás következik be.

Az ellentétesen vagy azonos előjelűen, egyenlő mértékben töltött testeken létrejött kölcsönös megosztást az ábra szemlélteti. Látható, hogy az első esetben a két fémen egymáshoz közelebb nagyobb mennyiségű kölcsönható töltés helyezkedik el, és ezért nagyobb a (vonzó) erőhatás. A második esetben, ahol a nagyobb mennyiségű töltések egymástól távolabb vannak, ott kisebb az erőhatás nagysága (a taszító hatás).



17.13. Sorosan kapcsolt kondenzátorok esetén az egyes kondenzátorok feszültségeinek összege adja meg a rendszer teljes feszültségét,

$$U_1 + U_2 + \ldots = U.$$

Ha a kondenzátorsor két legszélső lemezére $+Q$, illetve $-Q$ töltést viszünk, a megosztás következtében mindegyik fegyverzeten Q abszolút értékű töltés halmozódik fel. Az egyes kondenzátorok feszültsége:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}; \quad \ldots .$$

Mivel a rendszer feszültsége

$$U = \frac{Q}{C};$$

az előzők alapján:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots ;$$

a rendszer eredő kapacitása:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots .$$

Feladatunkban:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12};$$

$$C = \frac{12}{5}\,\mu F = \frac{12}{5} \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}.$$

A rendszerre vitt töltés:

$$Q = CU = \frac{12}{5} \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}\ 220\ \mathrm{V} = 528 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C};$$

$$\underline{Q = 5{,}28 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C}.}$$

A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy előbb kiszámítjuk az egyik kondenzátor feszültségét és ebből a kondenzátorra jutó töltést.

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2};$$

$$U_1C_1 = U_2C_2.$$

Mivel:

$$U_1 + U_2 = U;$$

$$U_1 = U - U_2.$$

Behelyettesítve:

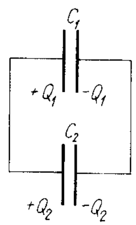
$$U_1C_1 = UC_2 - U_1C_2;$$

$$U_1 = \frac{UC_2}{C_1 + C_2} = \frac{220\ \mathrm{V}\ 6\ \mu\mathrm{F}}{4\ \mu\mathrm{F} + 6\ \mu\mathrm{F}} = 132\ \mathrm{V}.$$

A töltés:

$$Q = C_1U_1 = 132\ \mathrm{V}\ 4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = 528 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}.$$

17.14. Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok esetében valamennyi kondenzátor egyenlő feszültségű.



Az egyes kondenzátorokon a töltések:

$Q_1 = C_1U$; $Q_2 = C_2U$; $\ldots$;

a kondenzátortelep összes töltése:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots = C_1U + C_2U + \ldots =$$
$$Q = (C_1 + C_2 + \ldots)\,U.$$

Az eredő kapacitás:

$C = C_1 + C_2 + \ldots$.

Feladatunkban az egyes kondenzátorok kapacitását $C_1 = C_2 = C'$-vel jelölve, az egyes kondenzátorok töltése:

$Q_1 = U_1C'$; $Q_2 = U_2C'$.

a) A rendszer összes töltése az első esetben:

$Q = Q_1 + Q_2 = (U_1 + U_2)\,C'$.

Mivel az eredő kapacitás

$C = C_1 + C_2 = 2C'$;

és

$Q = UC$;

a rendszer feszültsége:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{(U_1 + U_2)\,C'}{2C'} = \frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{100\ \mathrm{V} + 200\ \mathrm{V}}{2};$$

$U = 150$ V.

b) A második esetben az eredetileg ellentétes pólusok egymáshoz kapcsolása után az ellenkező előjelű töltések semlegesítik egymást, és csak a megmaradó „fölös" töltés oszlik el a két kondenzátoron.

A megmaradó töltés:

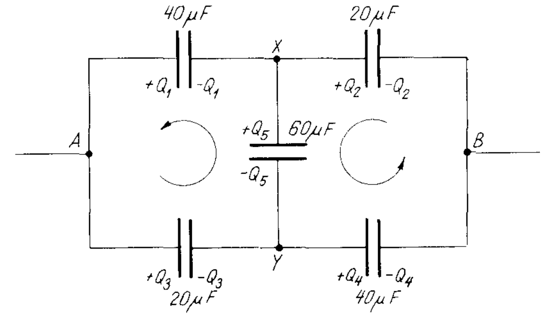
$Q = Q_2 - Q_1 = (U_2 - U_1)\,C'$.

A rendszer feszültsége:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{(U_2 - U_1)\,C'}{2C'} = \frac{U_2 - U_1}{2} = \frac{200\ \mathrm{V} - 100\ \mathrm{V}}{2};$$

$U = 50$ V.

17.15. Gondoljuk meg, hogy amikor a rendszert feltöltjük pl. úgy, hogy az A pontra $+Q$, (a B pontra $-Q$) töltést viszünk, az egyes fegyverzeteken a megosztás következtében az ábrán vázolt módon halmozódnak fel a töltések. (A középső 5-ös kondenzátoron lehetséges, hogy éppen fordított előjelű a feltöltődés, de ez a számítást nem befolyásolja, az előjelzést önkényesen vehetjük fel.)



Mivel a töltést az A (illetve a B) pontra vittük,

$Q_1 + Q_3 = Q$; $-Q_2 - Q_4 = -Q$;

$$Q = Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4. \qquad (1)$$

Az X (illetve Y) pontban összekapcsolt kondenzátorlemezeken csak megosztás révén keletkezhetett töltés, tehát

$$-Q_1 + Q_2 + Q_5 = 0; \qquad (2)$$
$$-Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0. \qquad (3)$$

További összefüggésekhez jutunk, ha meggondoljuk, hogy a kapcsolásban valamely zárt „hurok" mentén körbejárva, a kondenzátorok (előjelesen vett) feszültségeinek összege szükségképpen zérust ad.

Például az A ponttól önmagáig: az $AYXA$ kapcsolás mentén levő kondenzátorok feszültségeinek előjeles összegeire:

$$\frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_5}{C_5} - \frac{Q_1}{C_1} = 0. \qquad (4)$$

Hasonlóan a $BXYB$ hurokra, illetve az $AYBXA$ hurokra:

$$-\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_5}{C_5} + \frac{Q_4}{C_4} = 0. \qquad (5)$$

Használjuk még fel, hogy az A és B pontok között a feszültség:

$$\frac{Q}{C} - \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4}. \qquad (6)$$

Az *(1)*–*(6)* egyenletrendszerből C kiszámítható.
A számítás egyszerűsítése érdekében helyettesítsük be az egyenletekbe a megadott kapacitásokat:

$$\frac{Q_3}{20} - \frac{Q_5}{60} - \frac{Q_1}{40} = 0; \qquad Q_3 - \frac{Q_5}{3} - \frac{Q_1}{2} = 0; \qquad (4)$$

$$-\frac{Q_2}{20} + \frac{Q_5}{60} + \frac{Q_4}{40} = 0; \qquad -Q_2 + \frac{Q_5}{3} + \frac{Q_4}{2} = 0. \qquad (5)$$

A *(3)* és *(1)* egyenletek alapján:

$$Q_3 = Q_4 - Q_5;$$

$$Q_1 = Q - Q_3 = Q - Q_4 + Q_5;$$

$$Q_2 = Q - Q_4.$$

Behelyettesítve a *(4)* és *(5)* egyenletekbe:

$$Q_4 - Q_5 - \frac{1}{3}Q_5 - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q_4 - \frac{1}{2}Q_5 = 0; \qquad (4)$$

$$-Q + Q_4 + \frac{1}{3}Q_5 + \frac{1}{2}Q_4 = 0. \qquad (5)$$

A műveletek után:

$$\frac{3}{2}Q_4 - \frac{11}{6}Q_5 - \frac{1}{2}Q = 0; \qquad (4)$$

$$\frac{3}{2}Q_4 + \frac{1}{3}Q_5 - Q = 0. \qquad (5)$$

Ebből:

$$\frac{13}{6}Q_5 - \frac{1}{2}Q = 0;$$

$$Q_5 = \frac{3}{13}Q.$$

Behelyettesítve *(5)*-be, majd az előző egyenletekbe:

$$Q_4 = \frac{8}{13}Q;$$

$$Q_3 = \frac{5}{13}Q;$$

$$Q_2 = \frac{5}{13}Q;$$

$$Q_1 = \frac{8}{13}Q.$$

Végül helyettesítsünk a *(6)* összefüggésbe:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{8Q}{13\cdot 40} + \frac{5Q}{13\cdot 20};$$

$$\frac{1}{C} = \frac{9}{260};$$

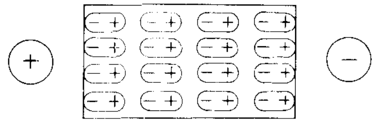
$$C = 28{,}9\ \mu\mathrm{F}.$$

17.16. A kondenzátor elektromos energiája annál nagyobb, minél több töltés van a fegyverzetein, és minél kisebb a kapacitása.
Amikor egy feltöltött kondenzátor lemezeit távolítjuk egymástól, a töltés nem változik, ellenben a kondenzátor kapacitása csökken. Ezért a lemezek távolításakor a kondenzátor energiája növekszik. (Éppen annyival, amennyi munkát végzünk az ellentétes töltésű és ezért egymást vonzó lemezek eltávolításához.)

17.17. Mivel a lemezek távolítása közben az akkumulátort nem távolítjuk el, a kondenzátor feszültsége változatlan marad. Ugyanakkor a lemezek távolítása közben a kapacitása csökken. Ez csak úgy lehetséges, ha közben a kondenzátor töltése is csökken (a kapacitással egyenes arányban).
A kondenzátor energiája a kapacitással fordítottan, viszont a rajta levő töltés négyzetével egyenesen arányos, ezért a kondenzátor energiája – állandó feszültség mellett – a lemezek távolítása során csökken.

17.18. A lemezek távolításához befektetett munka, továbbá a kondenzátor energiájának csökkenése együttesen fedezi a töltések áramoltatásához szükséges munkát, amelynek következtében egyrészt az áramforrás energiája növekszik, másrészt a vezeték melegszik: a huzal és a környezet belső energiája nő.

17.19. Amikor a két töltött fémgömb között vákuum (levegő) helyett valamilyen szigetelő anyag van, az elektromos kölcsönhatás kisebb, mint vákuum esetén.



Ezt szemléletesen úgy magyarázhatjuk, hogy a gömbök közé vitt szigetelőben az elektromos tér hatására szabályosan sorba rendeződött, pozitív és negatív töltésből álló, ún. d i p o l - l á n c o k alakulnak ki, és ezek mintegy „lekötik" az elektromos erőhatás egy részét.
Az elektrosztatikus tér energiája (és ezért a potenciál, valamint a térerősség is) kisebb lesz, mint vákuum esetén, annyival, amennyi energia a dipol-láncok kialakításához szükséges.

17.20. $Q' = -\dfrac{Q}{\sqrt{3}}$.

17.21. $Q' = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right)Q$.

17.22. Igen, a $Q_1\,Q_2$ szakaszon, Q_1-től 11,2 cm-re.

17.23. $E = 8{,}2\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

17.24. $v = 31{,}6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

17.25. $C = 1250$ pF.

17.26. *a)* $C = 1{,}2\ \mu\mathrm{F}$; *b)* $C = 5\ \mu\mathrm{F}$.

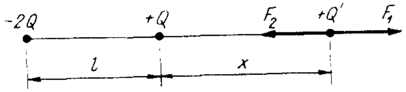
17.27. $U_1 = 80$ V; $U_2 = 40$ V.

17.28. $Q_1 = 10^{-5}$ C; $Q_2 = 4\cdot 10^{-6}$ C; $Q_3 = 6\cdot 10^{-6}$ C.

17.29. *a)* 500 pF – 900 pF; *b)* 80 pF – 222 pF.

17.30. *a)* $C_1 = 4\ \mu\mathrm{F}$; *b)* $C_2 = 36\ \mu\mathrm{F}$.

17.31. A Q' töltésre ható erők az ábrának megfelelő elrendezés esetén lehetnek egyensúlyban. Az $F_1 - F_2$ eredő erő:



$$k\frac{QQ'}{x^2} - k\frac{2\,QQ'}{(l + x)^2} = 0.$$

Ebből:

$l^2 + 2lx + x^2 - 2x^2 = 0;$

$x^2 - 2lx - l^2 = 0.$

$x = l\,(1 + \sqrt{2}).$

(Az $x = l\,(1 - \sqrt{2})$ második gyök fizikai szempontból nem tekinthető megoldásnak.)
Ha a Q' töltést elmozdítjuk az egyensúlyi helyzetből, a Q' töltésre ható erők eredője már nem lehet zérus, mert az egyenletnek x-re egy megoldása van. Az egyensúlyi helyzet tehát nem lehet közömbös (indifferens).
A továbbiakban azt kell még megvizsgálnunk, hogy a töltés jobbra vagy balra történő elmozdításakor az eredő erő a töltést az egyensúlyi helyzet irányába mozgatná-e, vagy pedig azzal ellentétesen. Erről az eredő előjele nyújthat tájékoztatást.

$$F = k\frac{QQ'}{x^2} - \frac{2\,QQ'}{(l + x)^2} = kQQ'\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(l + x)^2}\right].$$

Taszítóerő jön létre, amikor $F > 0$; vagyis

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(l + x)^2} > 0.$$

Ez akkor teljesül, ha $x < l\,(1 + \sqrt{2})$.

Vonzóerő jön létre, amikor

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(l + x)^2} < 0;$$

tehát $x > l\,(1 + \sqrt{2})$.

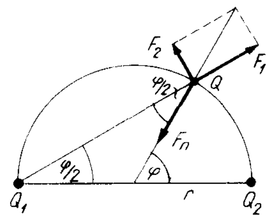
Ez azt jelenti, hogy kimozdítás után az elektrosztatikus eredő erő a töltést mindenképpen az egyensúlyi helyzet felé viszi. Az egyensúlyi helyzet stabilis.

17.32. Tekintsük azt az esetet, amikor Q_1 és Q_2 pozitív töltések. (Az ellenkező esetben a megoldás hasonló módon történhet.)
A Q töltésre ható erőket az ábra szemlélteti, ahol F_n az a nyomó (vagy húzó) mechanikai erő, amely a Q töltést hordozó testet körpályára kényszeríti.

A test akkor van egyensúlyban, ha a három erő eredője zérus. Ez csak úgy lehetséges, ha F_1 és F_2 eredője merőleges a gömb felületére (vagyis az eredő a sugár egyenesébe esik). Ennek feltétele, hogy:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{F_2}{F_1}$$

legyen.



Használjuk fel, hogy Q_1 és Q távolsága:

$$2r\cos\frac{\varphi}{2};$$

illetve Q_2 és Q távolsága:

$$2r\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Behelyettesítve:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{k\dfrac{Q_2 Q}{4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{k\dfrac{Q_1 Q}{4r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{Q_2}{Q_1}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{Q_2}{Q_1}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Ebből:

$$\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{10^{-8}\,C}{2\cdot 10^{-8}\,C} = \frac{1}{2};$$

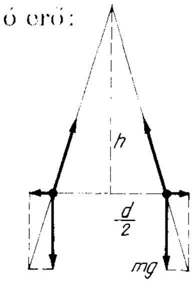
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$\varphi = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

A φ szög ismeretében egyébként F_1; F_2 és F_n is kiszámítható. Az egyensúlyi helyzet stabilis. Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

17.33. Az eredeti állapotban a két töltés között ható erő:

$$F = k\frac{Q^2}{d^2}.$$



Legyen a felfüggesztés h magasságban. Mivel a golyók egyensúlyban vannak:

$$\frac{F}{mg} = \frac{\frac{d}{2}}{h}.$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{2hkQ^2}{mg} = d^3. \qquad (1)$$

Miután az egyik golyóról a töltést elvezetjük, a semlegessé vált golyón a változatlanul töltött másik golyó hatására megosztás jön létre úgy, hogy vonzani fogják egymást. Érintkezve, a második golyó Q töltése szétoszlik a két fémen, és ezáltal mindkettő $\frac{Q}{2}$ töltésű lesz. Ekkor újra taszítják egymást, és újabb egyensúlyi helyzetbe kerülnek, egymástól d' távolságra. Ekkor az elektrosztatikus erő:

$$F' = k\frac{\frac{Q^2}{4}}{d'^2}.$$

Az egyensúly miatt

$$\frac{F'}{mg} = \frac{\frac{d'}{2}}{h}.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{2hkQ^2}{mg} = 4\,d'^3. \qquad (2)$$

Az *(1)* és *(2)* összehasonlításával:

$$d'^3 = \frac{1}{4}\,d^3;$$

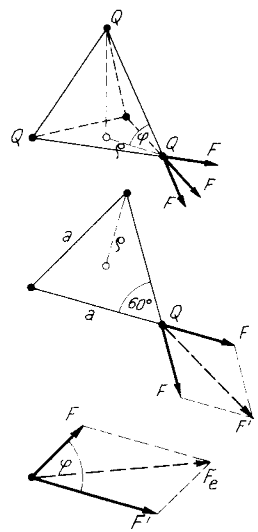
$$d' = \frac{d}{\sqrt[3]{4}}.$$

17.34. A négy töltés szabályos, háromszög alapú gúla (tetraéder) csúcspontjaiban van.
Tekintsük például az ábra szerint vízszintes síkban elhelyezkedő egyik töltést. Erre a síkban levő másik két töltés egymással 60°-os szöget bezáró, egyenként:

$$F = k\frac{Q^2}{a^2}$$

nagyságú erővel hat.
E két erő eredője:

$$F' = 2F\cos 30° = 2k\frac{Q^2\sqrt{3}}{a^2\,2} = \sqrt{3}\,k\frac{Q^2}{a^2}.$$



A negyedik, a vízszintes síkon levő töltés által kifejtett erőnek F'-vel bezárt φ hajlásszögére a geometriai feltételek alapján:

$$\cos\varphi = \frac{\varrho}{a};$$

ahol

$$\varrho = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Ebből:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Az F és F' eredője (a cosinustétel alkalmazásával):

$$F_e^2 = F^2 + F'^2 - 2FF'\cos(\pi - \varphi);$$

$$F_e^2 = F^2 + F'^2 + 2FF'\cos\varphi = k^2\frac{Q^4}{a^4}\left(1 + 3 + 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$F_e^2 = k^2\frac{Q^4}{a^4}6;$$

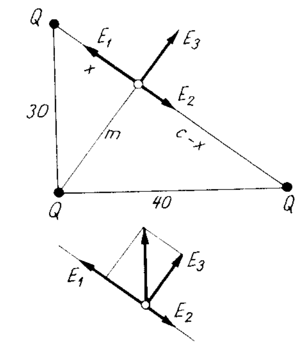
$$F_e = \sqrt{6}\,k\frac{Q^2}{a^2}$$

$$F_e \approx 9{,}8\cdot 10^{-7}\ \mathrm{N}.$$

Az eredő erő a szimmetrikus elrendeződés miatt a tetraéder szimmetriacentrumán átmenő egyenesben van.
Ha a rögzítéseket hirtelen feloldjuk, minden töltés a rá ható erők eredője irányában gyorsulva fog mozogni. Nem egyenletesen gyorsuló mozgással, mert az erők – és így eredőjük is – függ a töltések távolságától: az eredő, és ezért a gyorsulás is csökken! (A töltések mozgásuk során – a szimmetria miatt – minden pillanatban változatlanul egy-egy tetraéder csúcspontjaiban lesznek.)

17.35. A háromszög átfogója:

$$c = \sqrt{900 + 1600} = 50\ \mathrm{cm}.$$



Használjuk fel a derékszögű háromszögre ismert mértaniközép-tételt:

$$xc = 900;$$

$$x = \frac{900}{c} = \frac{900}{50} = 18\ \mathrm{cm};$$

$$c - x = 50 - 18 = 32\ \mathrm{cm}.$$

A magasság:

$$m = \sqrt{900 - 324} = 24\ \mathrm{cm}.$$

Az egyes töltések által létrehozott térerősségek:

$$E_1 = k\frac{Q}{x^2} = 9\cdot 10^9\frac{10^{-9}}{324\cdot 10^{-4}} = 2{,}78\cdot 10^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};$$

$$E_2 = k\frac{Q}{(c-x)^2} = 9\cdot 10^9\frac{10^{-9}}{1024\cdot 10^{-4}} = 0{,}88\cdot 10^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};$$

$$E_3 = k\frac{Q}{m^2} = 9\cdot 10^9\frac{10^{-9}}{576\cdot 10^{-4}} = 1{,}56\cdot 10^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Az eredő térerősség:

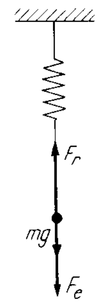
$$E^2 = (E_1 - E_2)^2 + E_3^2 = 1{,}9^2\cdot 10^4 + 1{,}56^2\cdot 10^4;$$

$$E = 245\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}; \qquad E = 245\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

17.36. Az újabb egyensúlyi helyzetben a golyóra a nehézségi erőn kívül hat az elektrosztatikai erő, valamint az x szakasszal megnyúlt rugó által kifejtett erő. Ezek eredője – az egyensúlyi helyzetben – zérus:

$$mg + F_e + F_r = 0.$$

Az E erősségű térben a Q töltésre ható erő:



$$F_e = QE.$$

A rugóerő, a k rugóállandóval:

$$F_r = -kx.$$

Behelyettesítve:

$$mg + QE - kx = 0.$$

Ebből:

$$x = \frac{mg + QE}{k}.$$

Az energiaváltozás kiszámításához alkalmazzuk a munkatételt. Amikor a golyó x távolsággal elmozdul, munkát végez a nehézségi erő, az elektromos tér, a rugóerő és ezek együttes hatására változik a test kinetikai energiája:

$$mgx + QEx - \frac{1}{2}kx^2 = \Delta E_{\mathrm{kin}}.$$

Amikor a golyó újabb egyensúlyi helyzetében megállapodik, sebessége, kinetikai energiája zérus lesz. Ez azt jelenti, hogy a rugó, a test és a környezet belső energiája együttesen növekszik meg annyival, mint amennyi volt a számított kinetikai energia.

17.37. Az elektromos erők eredője:

$$F = QE.$$

A munka:

$$W = Fs = QEs = 10^{-12}\ \mathrm{C}\ 4\cdot 10^{3}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ 10^{-2}\ \mathrm{m} = 4\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm};$$

$$W = 4\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}.$$

17.38. A síkkondenzátor kapacitása egyenesen arányos a szemben álló lemezek területével, és fordítottan arányos a lemezek távolságával. (Az arányossági tényező a lemezek közötti szigetelő anyag minőségétől függ.)
Amikor az eredetileg C kapacitású kondenzátor lemezeinek távolságát kétszeresére növeljük, kapacitása felére csökken:

$$C' = \frac{C}{2}.$$

A kondenzátoron a töltés a lemezek távolítása közben nem változik. Ezért a feszültség az eredeti, illetve az újabb állapotban:

$$U = \frac{Q}{C}; \qquad U' = \frac{Q}{C'}.$$

Ebből:

$$U' = 2U.$$

A kondenzátor feszültsége kétszeresére növekszik.

$$U' = 600\ \mathrm{V}.$$

17.39. A kondenzátor kapacitása felére csökken. (Lásd a *17.38.* feladat megoldását!)
Mivel ebben az esetben a lemezek a galvánelem kivezetéseivel állandóan érintkezésben maradnak, a lemezek távolításakor a kondenzátor feszültsége nem változik: állandóan 2 V marad.
A kondenzátor töltése az eredeti, illetve az újabb állapotban:

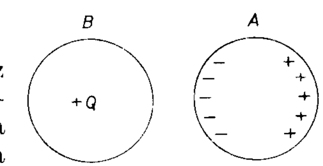
$$Q_1 = C_1U; \qquad Q_2 = C_2U.$$

Ebből:

$$Q_2 = \frac{C_1}{2}\frac{Q_1}{C_1};$$

$$Q_2 = \frac{Q_1}{2}.$$

17.40. A töltött B vezetőgömb hatására az A vezetőgömbön elektromos megosztás jön létre. Ennek következtében a gömbfelület két oldalán nem egyforma



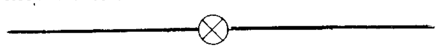
a töltések elrendeződése. Ebből első meggondolásra úgy tűnik, mintha az A fém felületének pontjaiban a potenciál különböző volna. Ez azonban azt jelentené, hogy a potenciálkülönbség miatt a fém szabad töltései még mozognának, tehát nem lehetne sztatikus állapot.

Valójában az A fémtest valamely pontjában az elektromos teret a rajta kialakult töltéseloszlás és a közelében levő B vezető töltése e g y ü t t e s e n határozzák meg. Sztatikus elektromos állapotban, amikor a töltések nem mozognak, az A fém minden pontjában a potenciál ugyanannyi, az A fémgömb ekvipotenciális felület.

17.41. A legtöbb elektromos eszköz működésének lényege abban áll, hogy feszültség hatására rajta t ö l t é s á r a m l i k á t f o l y a m a t o s a n, és ez az elektromos áram okozza a jelenségeket. Ha egy izzó érintkezőihez két egyenes fémhuzalt kötünk, és ezt az egyenes, kb. 1 m-es vezetőt vízszintes helyzetből hirtelen függőleges helyzetbe fordítjuk, a vezeték felső és alsó vége közötti kb. 130 V feszültség hatására a fém szabad töltései biztosan elmozdulnak: megosztás jön létre. Egy pillanatig tehát valóban folyik áram az izzón keresztül, azonban a töltések szétválása után az áramlás megszűnik. Sztatikus állapot jön létre, a vezető ekvipotenciális felület lesz.

Ahhoz, hogy az izzó világítson, hogy az áramlás folyamatos legyen, egy másik vezetékre és egy „töltésszivattyúra" is szükség volna, amely a vezeték egyik végén felhalmozódott töltéseket visszajuttatja a másik végére. Vagyis csak zárt áramkör és közbeiktatott feszültségforrás esetén lehetséges az áramlás folyamatos fenntartása.

Az izzólámpa (elektromos melegítők, bizonyos villanymotorok stb.) működhetnének akkor is, ha nem volna ugyan zárt áramkör, hanem csak az ábrán vázolt összeállítású nyitott, egyenes „áramkör", ellenben rövid időközökben az elektromos tér változna meg például úgy, hogy a térerősség iránya periodikusan ellenkező irányú lenne.

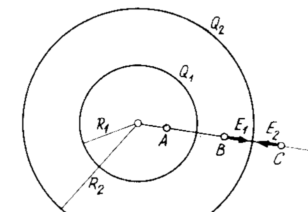


Ilyen esetben a vezetékben a töltések periódusonként ide-oda áramolnának, az eszközön át állandóan folyna az áram, de váltakozó irányban.

A Föld felszíne közelében önmagától ez nem valósul meg (a tér időben állandó, sztatikus), tehát az izzó így nem működtethető.

17.42. A kisebb gömbön belüli térrész pontjaiban a térerősség zérus. (Lásd a *17.10.* feladat megoldását!) A centrumtól l_1 távolságban levő A pontokban tehát:

$E_1 = 0.$

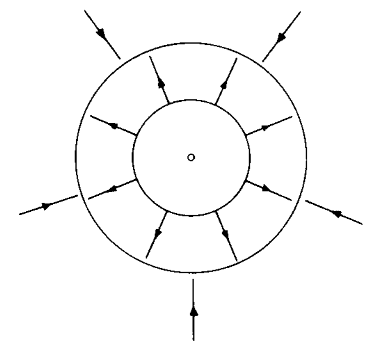


A kisebb gömbön levő töltés hatására a nagyobb gömb héján megosztás jön létre. (Lásd a *17.10.* feladatot!) Ez abban nyilvánul meg, hogy a negatív Q_2 töltés egy része,

$Q' = -13{,}3 \cdot 10^{-9}$ C

a héj belső felületére gyűlik össze, és a külső felületen csak

$Q'' = -6{,}7 \cdot 10^{-9}$ C töltés lesz.



A kisebb és nagyobb gömb közötti térrészben olyan elektromos tér alakul ki, mintha azt a centrumban elhelyezett Q_1 pozitív töltés hozná létre. E térrész B pontjaiban a térerősséget úgy számíthatjuk, mint a Q_1 pontszerű töltéstől l_2 távolságú pontban uralkodó térerősséget:

$$E_2 = k\,\frac{Q_1}{l_2^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{13{,}3 \cdot 10^{-9}}{16 \cdot 10^{-4}} = 7{,}48 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}};$$

$$E_2 = 7{,}48 \cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

A nagyobb gömb külső felületén negatív töltések helyezkednek el. Az azon kívüli térrészben olyan elektromos tér alakul ki, amilyent a centrumban elhelyezett pontszerű Q'' töltés hozna létre.

(Mivel:

$Q_1 = |Q'| > |Q''|;$

a külső térrészben az erővonal-rendszer „ritkább", mint a két gömb közötti térrészben, és

$Q'' < 0$

miatt irányításuk a centrum felé mutat.)

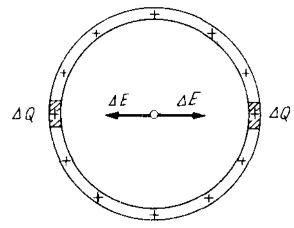
A térerősség a C pontokban:

$$E_3 = k\frac{Q''}{l_3^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{-6{,}7\cdot 10^{-9}}{36\cdot 10^{-4}} = -1{,}675\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};$$

$$E_3 = -1{,}675\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

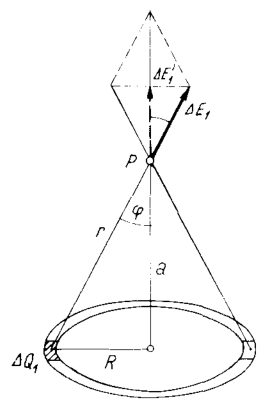
(A negatív előjel azt mutatja, hogy a térerősség a centrum felé irányul.)

17.43. A töltések a gyűrűn egyenletesen oszlanak el. A gyűrű valamely Δl hosszúságú ívdarabján elhelyezkedő ΔQ töltés által a szimmetria-középpontban létrehozott ΔE térerősséget a szemközti ívdarabon levő ΔQ töltés által létesített térerősség kiegyenlíti. Így végeredményben az elemi térerősségek vektori összege zérus, a szimmetriacentrumban:



$$E_c = 0.$$

A P pontban az **eredő** térerősséget az egyes ívelemeken levő ΔQ töltések által létrehozott ΔE térerősségek vektori összege adja meg. Osszuk fel gondolatban a gyűrű ívét és ezzel a Q töltést is n egyenlő részre.



A P pontban pl. a ΔQ_1 töltés által létrehozott elemi **térerősség**:

$$\Delta E_1 = k\frac{\Delta Q_1}{r^2} = k\frac{\Delta Q_1}{R^2+a^2}.$$

Az elemi térerősségek vektori összegét a ΔE vektoroknak az a szakasz egyenesére eső vetületei összegeként is számíthatjuk. A ΔE_1 vetülete:

$$\Delta E_1' = k\frac{\Delta Q_1}{R^2+a^2}\cos\varphi.$$

Mivel:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}.$$

$$\Delta E'_1 = k\frac{a}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}\Delta Q_1.$$

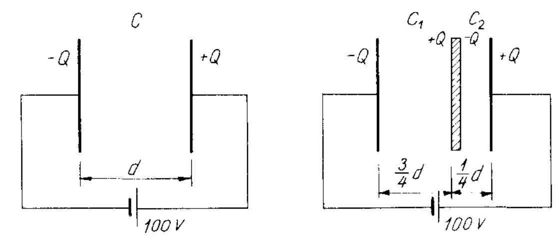
Az eredő térerősség:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n}\Delta E'_i = \sum_{i=1}^{n} k\frac{a}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}\Delta Q_i = k\frac{a}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i.$$

Az elemi töltések összege a gyűrű teljes Q töltését adja. A térerősség:

$$E_p = k\frac{a}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}Q.$$

17.44. A kondenzátor fegyverzetei közé helyezett vékony fémlemezen megosztás jön létre. Ezáltal az új elrendeződés olyan lesz, mintha két, C_1 és C_2 kapacitású kondenzátort kapcsoltunk volna sorosan a telepre.



Mivel a síkkondenzátor kapacitása fordítottan arányos a lemezek távolságával,

$$C_2 = 4C;$$

$$C_1 = \frac{4}{3}C.$$

A soros kapcsolású rendszer eredő kapacitása:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{3}{4C} + \frac{1}{4C} = \frac{4}{4C}.$$

$$C' = C.$$

A lemez behelyezésével a kapacitás nem változik meg.

A kondenzátorokra kapcsolt feszültség is változatlan, tehát a lemezek töltése ugyanaz marad.
A kondenzátor feszültsége – ugyanannyi töltés esetén – fordítottan arányos a kapacitásával:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \qquad U_2 = \frac{Q}{C_2}.$$

A soros kapcsolás miatt:

$U_1 + U_2 = U.$

Ebből következik, hogy:

$$U_1 = \frac{3}{4}U = \frac{3}{4}\cdot 100 = 75\ \text{V};$$

$$U_2 = \frac{1}{4}U = \frac{1}{4}\cdot 100 = 25\ \text{V}.$$

Tehát az eredeti fegyverzetek és a behelyezett vékony fémlemez között a feszültség:

$U_1 = 75$ V;

$U_2 = 25$ V.

A kondenzátor feszültsége és a lemezek közötti elektromos tér térerőssége között az összefüggés:

$U = Ed;$

ahol d a lemezek távolsága.
(Lásd a *17.7.* feladat megoldását!)
Ennek felhasználásával a fémlap egyik és másik oldalán a térerősség:

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{75\ \text{V}}{3\cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 25\cdot 10^{2}\,\frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$E_1 = 2500\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{25\ \text{V}}{10^{-2}\ \text{m}} = 25\cdot 10^{2}\,\frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$E_2 = 2500\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Vegyük észre, hogy a térerősség a két részben ugyanannyi. Az eredeti kondenzátorra:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100\ \text{V}}{4\cdot 10^{-2}\,\text{m}} = 25\cdot 10^{2}\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 2500\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

A fémlemez behelyezésekor – a feladatban meghatározott körülmények között – az elektrosztatikus tér nem változik meg.

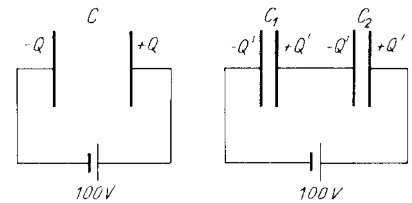
17.15. A feladat hasonló a *17.14.* feladathoz. Az új elrendezésben létrejött két kondenzátor kapacitása:

$C_1 = 4C;$
$C_2 = 4C.$

Az eredő kapacitás:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2}{4C};$$

$C' = 2C.$



Mivel a kondenzátorsorra kapcsolt feszültség változatlan, az eredő kapacitás viszont kétszerese az eredetinek, a kondenzátorsoron a töltés:

$Q' = C'U = 2CU;$
$Q' = 2Q.$

A lemezek behelyezésével az eredeti kondenzátor fegyverzetein a töltés kétszeresére növekedett.
Az „új" kondenzátorok feszültsége:

$$U_1 = U_2 = \frac{U}{2};$$

$U_1 = 50$ V;

$U_2 = 50$ V.

A térerősség:

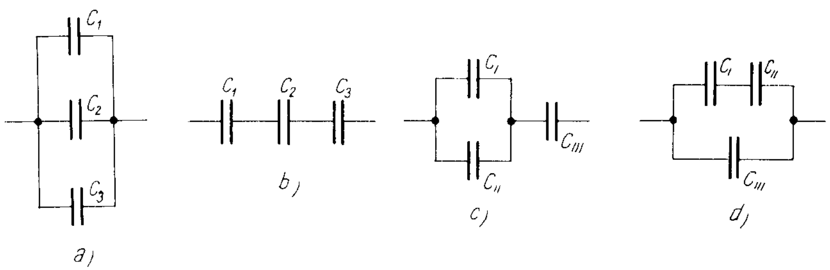
$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{50\ \text{V}}{10^{-2}\ \text{m}} = 50\cdot 10^{2}\,\frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$E_1 = 5000\,\frac{\text{V}}{\text{m}}; \qquad E_2 = 5000\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

17.46. A kondenzátorra – a kapacitásán kívül – jellemző az a feszültség is, amelyre még feltölthető anélkül, hogy a lemezek között (a szigetelőrétegen keresztül) elektromos kisülés jönne létre. Ezt a maximális feszültséget á t ü t é s i f e s z ü l t s é g nek nevezzük.

A feladatban megadott maximális feszültségek az egyes kondenzátorok átütési feszültségei.

A feladat követelményének teljesítéséhez elképzelhető, hogy valamennyi kondenzátort párhuzamosan; vagy mindhármat sorosan; vagy kettőt párhuzamosan és a harmadikat velük sorosan; végül kettőt sorosan és a harmadikat velük párhuzamosan kapcsolhatjuk össze. Összesen nyolc lehetőséget kell tehát elemeznünk.



a) Ha a kondenzátorokat mind párhuzamosan kötjük, a rendszerre kapcsolható feszültség legfeljebb $U = 200$ V lehet, mert ellenkező esetben a 2. kondenzátor „átüt".

b) Mindhárom kondenzátor soros kapcsolása esetén első pillanatra azt gondolhatjuk, hogy maximális feszültséget lehet kapcsolni a rendszerre, mert az egyes kondenzátorok feszültségeinek összege adja a rendszer feszültségét:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U.$$

Gondoljuk meg azonban, hogy mivel soros kapcsolás esetén mindegyik kondenzátoron ugyanannyi a töltés, a rendszerre kapcsolt feszültség az egyes kondenzátorokon kapacitásaikkal fordított arányban oszlik meg. Ezért előfordulhat, hogy az átütési feszültségek összegével egyenlő feszültséget kapcsolva a rendszerre, valamelyik kondenzátorra nagyobb feszültség jut, mint saját átütési feszültsége.

A soros rendszerre kapcsolható feszültség meghatározásához előbb számítsuk ki, hogy mennyi töltés halmozható az egyes kondenzátorokra az átütés veszélye nélkül. A $Q = UC$ összefüggés alkalmazásával:

$$Q_1 = 1000\ \text{V} \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 10^{-3}\ \text{C};$$

$$Q_2 = 200\ \text{V} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 0{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{C};$$

$$Q_3 = 500\ \text{V} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{C}.$$

A rendszerre tehát $Q = 4 \cdot 10^{-4}$ C töltést lehet vinni. Az eredő kapacitás:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3};$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6};$$

$$C = \frac{6}{11}\, 10^{-6}\ \text{F}.$$

A rendszerre kapcsolható maximális feszültség:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{\frac{6}{11} \cdot 10^{-6}} = 733\ \text{V}.$$

c) Vegyes kapcsolás esetén az eredő kapacitás:

$$C' = C_{I} + C_{II};$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_{III}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_I + C_{II}} + \frac{1}{C_{III}};$$

$$C = \frac{(C_I + C_{II})\, C_{III}}{C_I + C_{II} + C_{III}}.$$

1. Ha $C_{III} = C_3$;

akkor $C = \frac{3}{2}\ \mu\text{F}$.

A párhuzamosan kapcsolt tagra vihető legnagyobb feszültség a C_1; illetve C_2 kapacitású kondenzátorok átütési feszültségei közül a kisebb, vagyis:

$$U' = 200\ \text{V}.$$

Ekkor a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok össztöltése:

$Q' = (C_1 + C_2)\,U'$

$Q' = C'U'$;

$Q' = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ C.

A C_3-ra vihető legtöbb töltés $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ C $> Q'$.

A C' és C_3 kapacitású elemek sorba vannak kötve, és így a rajtuk levő töltések megegyeznek. Ezért egyiken sem lehet Q'-nél több töltés.
Így a rendszerre kapcsolható maximális feszültség:

$$U = \frac{Q'}{C_3} + \frac{Q'}{C'};$$

$$U = Q'\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C'} = \frac{Q'}{C};$$

$U = 400$ V.

2. Ha $C_{III} = C_2$; akkor $C = \frac{4}{5}\,\mu$F.

A maximális feszültség hasonlóan okoskodva, mint az előbb:
$U = 300$ V.

3. Ha $C_3 = C_1$; akkor $C = \frac{5}{6}\,\mu$F.

Az 1. esetben követett gondolatmenettel a maximális feszültség:
$U = 1200$ V.

d) A másik lehetséges vegyes kapcsolásban az eredő kapacitás:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_I} + \frac{1}{C_{II}};$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{C_I + C_{II}}{C_I C_{II}};$$

$$C'' = \frac{C_I C_{II}}{C_I + C_{II}};$$

$$C = \frac{C_I C_{II}}{C_I + C_{II}} + C_{III}.$$

1. Ha $C_{III} = C_3$; akkor $C = \frac{11}{3}\,\mu$F.

Mivel a C_3 kapacitású kondenzátorra kapcsolható legnagyobb feszültség 500 V; a vizsgált vegyes kapcsolású tagra köthető maximális feszültség:

$U \leq 500$ V.

2. Ha $C_{III} = C_2$; akkor $C = \frac{11}{4}\,\mu$F. És $U \leq 200$ V.

3. Ha $C_{III} = C_1$; akkor $C = \frac{11}{5}\,\mu$F. És $U \leq 500$ V.

A lehetséges esetek áttekintése után látható, hogy a rendszerre akkor lehet a legnagyobb feszültséget kötni, ha a 2. és 3. kondenzátort párhuzamosan, és az 1. kondenzátort velük sorosan kapcsoljuk.

A rendszerre köthető maximális feszültség ekkor:

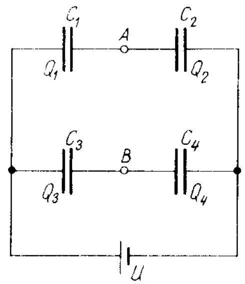
$U = 1200$ V.

A rendszer kapacitása:

$C = \frac{5}{6}\,\mu$F.

17.47. A kérdéses feszültség:

$$U_{AB} = U_1 - U_3 = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_3}{C_3}. \qquad (1)$$



Használjuk fel, hogy:

$Q_1 = Q_2$; (2)

$Q_3 = Q_4$. (3)

Mivel:

$$U_1 + U_2 = U; \quad U_3 + U_4 = U;$$

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = U; \quad \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = U.$$

A (2) és (3) összefüggés helyettesítésével:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1}{C_2} = U; \quad \frac{Q_3}{C_2} + \frac{Q_3}{C_4} = U.$$

Ebből:

$$Q_1 = U \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad Q_3 = U \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}.$$

Helyettesítsünk (1)-be:

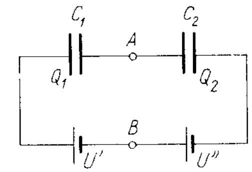
$$U_{AB} = U \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{C_4}{C_3 + C_4} \right);$$

$$U_{AB} = U \frac{C_2 C_3 + C_2 C_4 - C_1 C_4 - C_2 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

$$U_{AB} = U \frac{C_2 C_3 - C_1 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

17.48. A keresett feszültség:

$$U_{AB} = U' - U_1 = U' - \frac{Q_1}{C_1}. \qquad (1)$$



A kondenzátorokon a töltés:

$$Q_1 = Q_2 = Q = C\,(U' + U'').$$

Az eredő kapacitás:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2};$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Helyettesítsünk az (1) összefüggésbe:

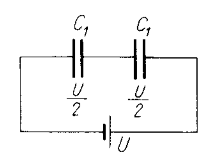
$$U_{AB} = U' - \frac{C\,(U' + U'')}{C_1} = U' - \frac{C_2\,(U' + U'')}{C_1 + C_2};$$

$$U_{AB} = \frac{C_1 U' + C_2 U' - C_2 U' - C_2 U''}{C_1 + C_2};$$

$$U_{AB} = \frac{C_1 U' - C_2 U''}{C_1 + C_2}.$$

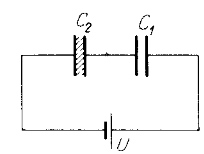
17.49. Amikor egy kondenzátor lemezei között levegő helyett más szigetelő anyag van, a kondenzátor kapacitása nagyobb. A szigetelő anyag minőségére jellemző az a szám, amely megmutatja, hogy a kondenzátor kapacitása hányszorosára növekszik, ha levegő helyett az illető anyagot helyezzük a lemezek közé.
Ezt a számot a szigetelő anyag (relatív) d i e l e k t r o m o s á l l a n d ó j á n a k n e v e z z ü k (ε).

A feladatban a szigetelő behelyezése után a kondenzátor kapacitása:



$$C_2 = \varepsilon C_1.$$

Az eredő kapacitás:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{\varepsilon C_1} = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon C_1};$$

$$C = \frac{\varepsilon C_1}{1 + \varepsilon}.$$

A kondenzátorok töltése:

$$Q_1 = Q_2 = Q = CU = \frac{\varepsilon C_1}{1+\varepsilon} U.$$

A kondenzátor feszültsége:

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{\varepsilon C_1} = \frac{U}{1+\varepsilon}.$$

Mivel az eredeti állapotban a kondenzátor feszültsége $\frac{U}{2}$ volt, a két feszültség aránya;

$$\frac{2}{1+\varepsilon}.$$

A szigetelő anyag behelyezésével a kondenzátor feszültsége $\frac{2}{1+\varepsilon}$ – szorosára változik.

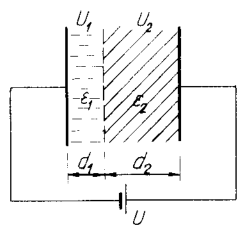
17.50. A feladat megoldása előtt gondoljuk meg, hogy ha egy feltöltött és magára hagyott kondenzátor lemezei közé levegő helyett ε dielektromos állandójú szigetelőt teszünk, kapacitása ε-szorosára növekszik,

$C' = \varepsilon C.$

A szigetelő anyag bevitelével ilyen esetben a kondenzátor lemezein levő töltés elrendeződése nem változik meg. Ezért a kapacitás növekedése következtében a kondenzátor feszültsége kisebb lesz:

$$\frac{Q}{U'} = \varepsilon \frac{Q}{U},$$

$$U' = \frac{U}{\varepsilon}.$$



Mivel a lemezek között a térerősség

$$E = \frac{U}{d},$$

a szigetelő anyag behelyezése folytán a térerősség is kisebb lesz:

$$E' = \frac{U'}{d} = \frac{U}{\varepsilon d}; \qquad E' = \frac{E}{\varepsilon}.$$

Végül is azt kaptuk, hogy az elektromos térben azon a helyen, ahol levegő helyett szigetelő anyag van, a térerősség ε-szor kisebb lesz, mint levegőben.

Feladatunkban most a két szigetelő réteggel ellátott kondenzátorra kapcsolt U feszültség nem változik, állandó marad. A feszültség megoszlik a két rétegen.

$$U = U_1 + U_2 = E_1' d_1 + E_2' d_2.$$

Ha ugyanilyen töltés esetén a kondenzátor lemezei között csak levegő volna, a térerősség mindenhol E lenne.

Ezt helyettesítve:

$$\frac{E}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{E}{\varepsilon_2} d_2 = U;$$

$$\frac{E}{7} 10^{-2} + \frac{E}{2} 2 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^3.$$

Ebből:

$$E = 2{,}625 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Ezért most az egyes szigetelő rétegekben a térerősség:

$$E_1' = \frac{E}{\varepsilon_1} = \frac{2{,}625 \cdot 10^5}{7};$$

$$E_1' = 3{,}75 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

$$E_2' = \frac{E}{\varepsilon_2} = \frac{2{,}625 \cdot 10^5}{2};$$

$$E_2' = 13{,}125 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

A feszültség az egyes rétegeken:

$$U_1' = E_1' d_1 = 3{,}75 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2},$$

$$U_1' = 375 \text{ V}.$$

$$U_2' = E_2' d_2 = 13{,}125 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2};$$

$$U_2' = 2625 \text{ V}.$$

18. Egyenáram I.

18.1. Ohm törvénye szerint:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4{,}5\ \text{V}}{12\ \Omega};$$

$$\underline{I = 0{,}375\ \text{A}.}$$

18.2. Az elektromos áram teljesítménye (egyenáram esetén):

$P = UI.$

Ebből:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{60\ \text{W}}{110\ \text{V}};$$

$$\underline{I = 0{,}545\ \text{A}.}$$

18.3. *a)* Soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás:

$R = R_1 + R_2 = 16\ \Omega + 24\ \Omega,$

$\underline{R = 40\ \Omega.}$

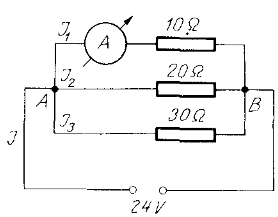
b) Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{24} = \frac{3+2}{48} = \frac{5}{48};$$

$$R = \frac{48}{5}\ \Omega;$$

$$\underline{R = 9{,}6\ \Omega.}$$

18.4. Az ábrának megfelelő elrendezés egyszerű párhuzamos kapcsolás, ahol a mellékágak elágazási csomópontjai (A és B) között ugyanakkora (24 V) a feszültség.



Ezért a 10 ohmos ellenállást tartalmazó ágban – a műszer által is jelzett – áramerősség:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{24\ \text{V}}{10\ \Omega};$$

$$\underline{I_1 = 2{,}4\ \text{A}.}$$

(A további adatokra nem volt szükségünk, mert az áramforrás feszültségét állandónak tekintettük. Ha az áramforrás belső ellenállása nem volna elhanyagolható, feszültsége a rákapcsolt ellenállástól függene. Ilyen feladatokkal a későbbiekben találkozunk majd.)

18.5. Az elektromos áram teljesítménye:

$P = UI.$

Az R ellenálláson, Ohm törvényének alkalmazásával:

$$P = U\frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}.$$

Ha az izzószál ellenállásának a hőmérséklettől való (egyébként számottevő) függését nem vesszük figyelembe, az ellenállást mindkét feszültségen ugyanakkorának tekintjük. Ekkor az izzószálon a teljesítmények aránya a feszültségek n é g y z e t e i n e k arányával egyezik meg. Mivel a feszültség f e l e a névleges feszültségnek, 110 V-on az izzó teljesítménye a névleges teljesítmény n e g y e d r é s z e lesz.

<u>Az izzó teljesítménye a névleges teljesítménynél 75%-kal kisebb.</u>

Ugyanezt az eredményt kapjuk formális számítással is.

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R}; \qquad P_2 = \frac{U_2^2}{R}; \qquad U_2 = \frac{U_1}{2};$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{U_1^2}{4U_1^2} = \frac{1}{4}.$$

(N é v l e g e s feszültségnek, teljesítménynek, áramerősségnek stb. nevezik azokat az adatokat, amelyek mellett az elektromos eszköz – itt izzólámpa – a felhasználás szempontjából a legkedvezőbben működik. Az eszköz általában működtethető a névlegesnél kisebb feszültség, áramerősség, teljesítmény stb. mellett is, de akkor már kevésbé felel meg annak a célnak, amire készítették.)

18.6. A *18.5.* feladat megoldásában alkalmazott

$$P = \frac{U^2}{R}$$

összefüggés alapján az U feszültségre készült (U névleges feszültségű) és P névleges teljesítményű izzólámpa („üzemi") ellenállása fordítottan arányos a teljesítménnyel. Ezért a 100 W-os izzó ellenállása kisebb, mint a 60 W-os izzó ellenállása.

18.7. A huzal keresztmetszete:

$A = r^2\pi = 1{,}2^2\ \text{mm}^2\ 3{,}14 \approx 4{,}52\ \text{mm}^2.$

Az ellenállás:

$$R = \varrho \frac{l}{A} = 0{,}017\ \frac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{30\ \text{m}}{4{,}52\ \text{mm}^2};$$

$R \approx 0{,}113\ \Omega.$

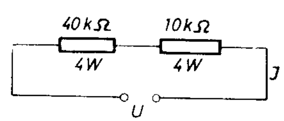
18.8. A sorosan kötött ellenállások valamelyik elemén a feszültség Ohm törvénye szerint:

$U_i = IR_i;$

ahol I az ellenállásokon folyó áram (mindenhol egyező) erősségét, R_i a kiszemelt ellenállást jelenti.
Az eredő ellenállást az egyes ellenállások összege adja meg. Amikor az egyik ellenállást megváltoztatjuk, pl. növeljük, nagyobb lesz az eredő ellenállás. Ennek következtében – állandó feszültségű áramforrás esetén – az áramerősség kisebb lesz (Ohm törvényének megfelelően).
Ezért az egyik ellenálláson nő, a másikon csökken a feszültség.

18.9. Számítsuk ki a névleges teljesítmény és üzemi ellenállás ismeretében az egyes ellenállásokra külön-külön kapcsolható feszültségeket. A

$$P = UI = \frac{U^2}{R}$$



összefüggés alapján:

$U_1^2 = P_1R_1 = 4\ \text{W}\ 4\cdot10^4\ \Omega = 16\cdot10^4\ \text{V}^2;$
$U_1 = 400\ \text{V}.$
$U_2^2 = P_2R_2 = 4\ \text{W}\cdot10^4\ \Omega = 4\cdot10^4\ \text{V}^2;$
$U_2 = 200\ \text{V}.$

Első pillanatra azt gondolhatnánk, hogy a rendszerre 400 V + + 200 V = 600 V feszültséget lehet kapcsolni az elégés veszélye nélkül, mert soros kapcsolás esetén „a részfeszültségek összegeződnek". Ez a megállapítás azonban így természetesen téves. Az áramforrásra sorosan kötött ellenállásokra jutó feszültségek összege valóban egyenlő az áramforrás feszültségével, azonban a rendszerre kapcsolt feszültség az ellenállások arányában oszlik meg az egyes ellenállásokon.
Feladatunkban, ha a rendszerre 600 V-ot kapcsolnánk, $R_1 = 4R_2$ felhasználásával az egyes ellenállásokra jutó feszültségek az alábbiak volnának:

$$U_1 = \frac{4}{5}U = \frac{4}{5}\cdot 600\ \text{V} = 480\ \text{V};$$

$$U_2 = \frac{1}{5}U = \frac{1}{5}\cdot 600\ \text{V} = 120\ \text{V}.$$

Ezért az első ellenállásra a megengedettnél nagyobb feszültség jutna, amelynek következtében esetleg tönkremenne.
A feladatot helyesen úgy oldhatjuk meg, ha előbb kiszámítjuk, hogy mekkora áramerősséget bírnak ki az egyes ellenállások, majd ezt felhasználva állapítjuk meg, hogy mekkora feszültséget lehet kapcsolni a rendszerre ahhoz, hogy az áramerősség egyik ellenállás esetében se lépje túl a megengedett értéket.
Az egyes ellenállásokon lehetséges maximális áramerősség:

$P = UI = I^2R;$

$$I_1^2 = \frac{P_1}{R_1} = \frac{4\ \text{W}}{4\cdot10^4\,\Omega} = 10^{-4}\ \text{A}^2;$$

$I_1 = 10^{-2}\ \text{A} = 0{,}01\ \text{A}.$

$$I_2^2 = \frac{P_2}{R_2} = \frac{4\ \text{W}}{10^4\ \Omega} = 4\cdot10^{-4}\ \text{A}^2;$$

$I_2 = 2\cdot10^{-2}\ \text{A} = 0{,}02\ \text{A}.$

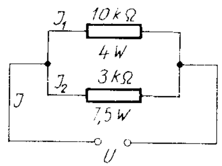
Az áramkörben a megengedett áramerősség legfeljebb $I = 0{,}01$ A lehet.
A rendszerre kapcsolható feszültség:
$R = R_1 + R_2 = 4\cdot10^4 + 10^4 = 5\cdot10^4\ \Omega;$
$U = IR = 10^{-2}\ \text{A}\cdot5\cdot10^4\ \Omega = 5\cdot10^2\ \text{V};$
$U = 500\ \text{V}.$

(Ebben az esetben — mint azt könnyen ellenőrizhetjük — az első ellenállásra a megengedett 400 V, a másodikra a megengedettnél kevesebb: 100 V jut.)

18.10. Állapítsuk meg először, hogy mekkora a megengedett legnagyobb áramerősség az egyes ellenállásokon külön-külön.

$P = UI = I^2R;$

$$I_1^2 = \frac{P_1}{R_1} = \frac{4\ \mathrm{W}}{10^4\ \Omega} = 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{A}^2;$$



$$I_1 = 2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{A} = 0{,}02\ \mathrm{A}.$$

$$I_2^2 = \frac{P_2}{R_2} = \frac{7{,}5\ \mathrm{W}}{3000\ \Omega} = 25\cdot 10^{-4}\ \mathrm{A}^2;$$

$$I_2 = 5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{A} = 0{,}05\ \mathrm{A}.$$

Első gondolatunk — a *18.9.* feladatnál elmondottakhoz hasonlóan — az lehetne, hogy az áramkör főágában a megengedett áramerősség 0,02 A + 0,05 A = 0,07 A, mert párhuzamos kapcsolás esetén „az áramerősségek összegeződnek". Ez a megállapítás azonban ilyen megfogalmazásban természetesen ugyancsak téves. A párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon folyó áramok erősségeinek összege valóban egyenlő a főágban folyó áram erősségével, azonban minden egyes ellenálláson (ágon) a feszültség ugyanakkora (két közös csomópontban kapcsolódnak), és ezért a z e g y e s á g a k b a n a z á r a m e r ő s s é g e k f o r d í t o t t a n a r á n y o s a k a z e l l e n á l l á s o k - k a l.

Feladatunkban, ha a főágban az áramerősség 0,07 A volna, az $R_2 : R_1 = 3 : 10$ felhasználásával az egyes ágakon az áramerősségekre az alábbiakat kapnánk:

$$I_1 = \frac{3}{13}I = \frac{3}{13}\cdot 0{,}07\ \mathrm{A} \approx 0{,}016\ \mathrm{A};$$

$$I_2 = \frac{10}{13}I = \frac{10}{13}\cdot 0{,}07\ \mathrm{A} \approx 0{,}054\ \mathrm{A}.$$

A második ellenállás tönkremenne.

A feladatot helyesen úgy oldhatjuk meg, ha előbb kiszámítjuk, hogy az egyes ellenállásokat külön-külön legfeljebb mekkora feszültségre szabad kapcsolni, majd a kedvező, tehát a kisebb feszültség ismeretében határozzuk meg a főág áramerősségét.

Az egyes ellenállások névleges feszültsége:

$$P = UI = \frac{U^2}{R};$$

$$U_1^2 = P_1R_1 = 4\ \mathrm{W}\cdot 10^4\ \Omega = 4\cdot 10^4\ \mathrm{V}^2;$$

$$U_1 = 2\cdot 10^2\ \mathrm{V} = 200\ \mathrm{V}.$$

$$U_2^2 = P_2R_2 = 7{,}5\ \mathrm{W}\cdot 3000\ \Omega = 2{,}25\cdot 10^4\ \mathrm{V}^2;$$

$$U_2 = 1{,}5\cdot 10^2\ \mathrm{V} = 150\ \mathrm{V}.$$

A rendszerre legfeljebb $U = 150$ V feszültséget lehet kapcsolni.

A főágban folyó áram erőssége:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{3000} = \frac{3+10}{30\,000} = \frac{13}{3\cdot 10^4};$$

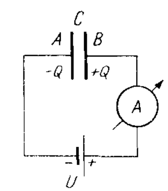
$$R = \frac{3}{13}\cdot 10^4\ \Omega;$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{150\ \mathrm{V}}{\frac{3}{13}\cdot 10^4} = 650\cdot 10^{-4}\ \mathrm{A};$$

$$\underline{I = 0{,}065\ \mathrm{A}.}$$

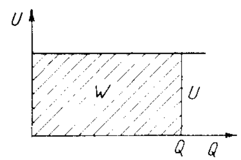
(Az ellenállások arányát felhasználva ellenőrizhetjük, hogy ebben az esetben a második ellenálláson a megengedett 0,05 A az áramerősség, az első ellenálláson pedig a megengedettnél kisebb: 0,015 A.)

18.11. *a)* Amikor az eredetileg töltetlen kondenzátort az áramforrás sarkaihoz kötjük, a vezetékekben elektromos áram (töltésáramlás) indul meg: a kondenzátor fegyverzeteire (az áramforrás megfelelő sarkaival egyező előjelű) töltések vándorolnak. Ez a folyamat úgy megy végbe, hogy az (eredetileg semleges) B lemezről negatív töltések mennek át az áramforrásba, és ezáltal a lemez pozitív töltésű lesz. Egyidejűleg az áramforrásból ugyancsak negatív töltések haladnak az A lemezre, és így az negatív töltésű lesz. Az A és B lemezen ellenkező előjelű, de abszolút értékben egyenlő töltések halmozódnak fel. Végeredményben azt mondhatjuk, hogy az áramforrás, mint valami „elektromos szivattyú", Q töltést vitt át a B lemezről az A-ra.



Az áramlási folyamat addig tart, amíg az A és B kondenzátorlemez feszültsége a vele összekapcsolt telepsarok feszültségét el nem éri. Ekkor az áram megszűnik. (A kondenzátor lemezei között szigetelő anyag van, ezért a lemezek között áramlás nem jön létre.)
A kondenzátor feltöltődése, az áramlás rövid idő alatt végbemegy (az áramkörbe kapcsolt műszer rövid áramlökést jelez, majd nullára áll vissza a mutató).

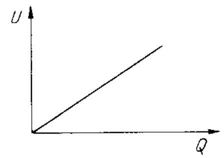
b) A feltöltődés után a kondenzátor feszültsége (a lemezek közötti potenciálkülönbség) ugyanakkora, mint az áramforrás feszültsége (a két sarok közötti potenciálkülönbség).



$U_c = U = 200$ V.

c) A feltöltött kondenzátor töltése a

$$C = \frac{Q}{U} \qquad (1)$$

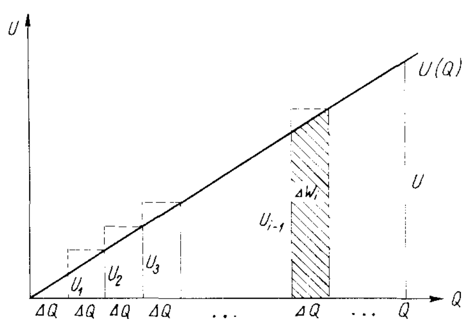


összefüggés alapján:

$Q = CU = 10 \cdot 10^{-6}$ F 200 V;

$Q = 2 \cdot 10^{-3}$ C.

d) A feltöltött kondenzátor energiája egyenlő azzal a munkával, amelyet az áramforrás végez, miközben a Q töltést a kondenzátor lemezeire viszi át.
(Ezt a munkát természetesen az áramforrás energiája fedezi; az áramforrás energiája – a vezetékekben létrejött veszteségtől eltekintve – ugyanannyival csökken, mint amekkora energiát a kondenzátor kapott.)



Az elektromos erőtérben a munkavégzés, miközben a Q töltés U potenciálkülönbségű két pont között mozdul el, homogén elektrosztatikus tér esetén:

$W = QU$.

Ilyen esetben a két pont közötti feszültség állandó és független a mozgatott töltéstől. (Lásd például a *17.7.* feladatot!)
A végzett munkát a diagramon a téglalap területe szemlélteti.

Ezzel szemben a kondenzátor feltöltődésekor, amikor (az áramforrás hatására) Q töltés megy át az áramkör mentén egyik lemezről a másikra, a kondenzátor A és B lemeze között a feszültség nem állandó. Kezdetben a kondenzátor feszültsége zérus, a feltöltés során növekszik, és csak a folyamat végén éri el az U feszültséget. A folyamat valamely pillanatában a kondenzátor feszültsége éppen attól függ, hogy addig mennyi töltés jutott már át egyik fegyverzetről a másikra.
Felhasználva, hogy a kondenzátor U feszültsége bármely pillanatban egyenesen arányos a fegyverzetein már felhalmozódott Q töltéssel:

$$U = \frac{1}{C} Q$$

a feltöltődés során végzett munkát az alábbi gondolatmenettel számíthatjuk ki.
A feltöltés folyamatát lépésekben képzeljük el. Az egyes lépésekben kicsi ΔQ töltések jutnak át egyik lemezről a másikra.
Az első lépésben a kondenzátor feszültsége kezdetben zérus, és a lemezeire jutó ΔQ töltés következtében a végén U_1 feszültségű lesz. A második lépés elején már U_1 feszültségű a kondenzátor, és a lemezeire vitt újabb ΔQ töltés hatására a végén U_2 feszültségű. A harmadik lépés elején U_2 feszültségű kondenzátor az újabb kis ΔQ töltés következtében a végére U_3 feszültségű lesz. És így tovább.
Az egyes lépések közben a feszültség csak igen kis mértékben változik meg, és ezért nem követünk el számottevő hibát, ha egy-egy lépésben a feszültséget állandónak tekintjük (annyinak, amennyi a lépés elején volt), és a közben végzett munkát ezzel a közelítéssel számítjuk ki. A feltöltés teljes folyamata alatt végzett munkát ezen kis munkavégzések összege adja meg:

$W = \Sigma \Delta W_i$.

Az egy-egy lépés során végzett munka közelítő értékét a ΔQ töltés és a részfolyamat elejéhez tartozó kondenzátorfeszültség szorzata adja meg. Az első lépésben $\Delta W_1 = 0 \cdot \Delta Q = 0$; a másodikban: $\Delta W_2 = U_1 \cdot \Delta Q$; a harmadikban: $\Delta W_3 = U_2 \cdot \Delta Q$; stb. Az i-edik lépésben:

$\Delta W_i = U_{i-1} \cdot \Delta Q$.

A diagramon az egyes részfolyamatokban végzett munka közelítő értékét a kis téglalapok területe, a teljes feltöltési folyamat során végzett munkát pedig ezen kis területek összege szemlélteti. Minél több lépésre bontva képzeljük el a folyamatot, annál jobb közelítésben kapjuk meg a tényleges munkát, ugyanakkor a diagramon a téglalapok területeinek összege egyre jobban közelíti a függvény grafikonja alatti síkidom: a Q alapú és U magasságú háromszög területét.

A teljes feltöltéshez szükséges munka számértéke egyenlő a háromszög területének számértékével. Ezért a munka:

$$W = \frac{1}{2} QU.$$

Vagy felhasználva az (*1*) összefüggést:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2.$$

Megfontolásaink alapján a kondenzátor energiája:

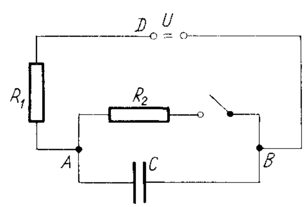
$$\underline{E = \frac{1}{2} CU^2.} \qquad (2)$$

Feladatunkban:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} \cdot 200^2\ \mathrm{V}^2 = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} \cdot 4 \cdot 10^4\ \mathrm{V}^2 = 2 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{J}.$$

$\underline{E = 0{,}2 \text{ joule.}}$

18.12. *a)* A kondenzátor energiája a *18.11* feladat megoldásában foglaltak szerint:



$$E = \frac{1}{2} CU^2.$$

1. Z á r t k a p c s o l ó á l l á s esetén az ellenállásokon állandó és egyenlő nagyságú áram folyik. A kondenzátoron áram nem folyik (mivel egyenfeszültségű áramforrást kapcsoltunk a rendszerre), azonban feltöltött állapotban van, akkora feszültségen, amekkora az A és B pontok között kialakult.

Tekintve, hogy $R_1 = R_2$; a sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokon a feszültség egyenlő arányban oszlik meg, tehát a kondenzátor feszültsége:

$U_C = U_{AB} = U_2 = 50$ V.

A kondenzátor energiája:

$$E = \frac{1}{2} CU_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}\ 50^2\ \mathrm{V}^2;$$

$\underline{E = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}.}$

2. N y i t o t t k a p c s o l ó á l l á s esetén az áramkörben áram nem folyik, az A és B pontok között a feszültség megegyezik a telep feszültségével, mert az A pontban a potenciál ugyanannyi, mint D-ben. (Sztatikus állapotban a vezető pontjai azonos potenciálúak. A vezető két pontja között csak akkor van potenciálkülönbség, ha a töltések mozognak, áram folyik.)

A kondenzátor ebben az esetben is feltöltött állapotban van. Feszültsége:

$U_C = U_{AB} = 100$ V.

Energiája:

$$E = \frac{1}{2} CU_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}\ 100^2\ \mathrm{V}^2;$$

$\underline{E = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{J}.}$

Megfigyelhetjük, hogy nyitott kapcsolóállásban a kondenzátor energiája négyszer annyi, mint zárt kapcsolóállás esetén.

b) A telep csak akkor ad le folyamatosan teljesítményt, amikor az áramkörben áram folyik.

1. Z á r t k a p c s o l ó á l l á s esetén a leadott teljesítmény:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{100^2\ \mathrm{V}^2}{200\ \Omega};$$

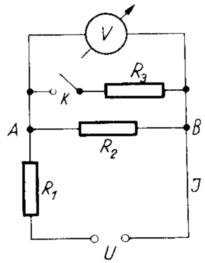
$\underline{P = 50\ \mathrm{W}.}$

2. N y i t o t t k a p c s o l ó á l l á s esetén – eltekintve a kondenzátor feltöltődésének rövid idejétől – a körben áram nem folyik.

A teljesítmény:

$\underline{P = 0.}$

18.13. *a)* A voltmérő mindkét esetben az A és B pontok közötti feszültséget méri.



1. A k a p c s o l ó n y i t o t t á l l á s a esetén a sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenálláson folyik csak áram. Mivel $R_1 = R_2$, az U feszültség egyenlő arányban oszlik meg a két ellenálláson, tehát az A és B pontok közötti feszültség:

$$U_2 = \frac{U}{2}. \qquad (1)$$

2. A m i k o r a k a p c s o l ó z á r t á l l á s ú, az R_2 és R_3 párhuzamosan kapcsolódik a velük soros R_1-hez. („Vegyes" kapcsolás.) Az A és B pontok közötti feszültség ebben az esetben:

$$U_{2,3} = U - U_1; \qquad (2)$$

ahol az U_1 feszültség Ohm törvénye értelmében:

$$U_1 = I R_1. \qquad (3)$$

Az áramerősség kiszámításához az eredő ellenállásra van szükségünk. Használjuk fel, hogy $R_1 = R_2 = R_3 = R$.
Az eredő:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R};$$

$$R' = \frac{R}{2};$$

$$R'' = R_1 + R' = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R.$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U}{R''} = \frac{U}{\frac{3}{2}R} = \frac{2U}{3R}.$$

Behelyettesítve *(3)*-ba, majd *(2)*-be:

$$U_1 = \frac{2U}{3R} R = \frac{2}{3} U;$$

$$U_{2,3} = U - \frac{2}{3} U = \frac{U}{3}. \qquad (4)$$

Használjuk fel, hogy U_2 és $U_{2,3}$ különbsége ismert:
$U_2 - U_{2,3} = 50$ V.
Ebből *(1)* és *(4)* felhasználásával:

$$\frac{U}{2} - \frac{U}{3} = 50;$$

$$\frac{3U - 2U}{6} = 50;$$

$$\underline{U = 300 \text{ V}.}$$

b) A telep által „leadott" teljesítmény:

$$P = UI = \frac{U^2}{R_e};$$

ahol U a telep feszültsége, R_e az áramkör eredő ellenállása.
1. A kapcsoló n y i t o t t állása esetén:

$$P_1 = \frac{U^2}{R_e} = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{U^2}{2R} = \frac{300^2 \text{ V}^2}{2 \cdot 25\ \Omega};$$

$$\underline{P_1 = 1800 \text{ W}.}$$

2. A kapcsoló z á r t állása közben:

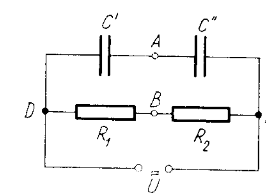
$$P_2 = \frac{U^2}{R_e} = \frac{U^2}{R''} = \frac{U^2}{\frac{3}{2}R} = \frac{2 \cdot 300^2 \text{ V}^2}{3 \cdot 25\ \Omega};$$

$$\underline{P_2 = 2400 \text{ W}.}$$

18.14. Az R_1 és R_2 sorosan kapcsolt ellenállásokon állandó áram folyik. A kondenzátorokon áram nem folyik át, ellenben feltöltött állapotban vannak.
Az ellenállássoron, a D és F pont között, a feszültség U (amely megoszlik az ellenállásokon). Használjuk fel, hogy az áramerősség mindkét ellenálláson ugyanakkora:

$$I_1 = I_2;$$

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}.$$



Mivel $U_2 = U - U_1$:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U - U_1}{R_2}; \qquad U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U.$$

A D és B pont közötti feszültség:

$$U_{DB} = U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U.$$

A sorosan kapcsolt kondenzátorokon a felhalmozódott töltés egyenlő:

$Q' = Q''$;

$C'U' = C''U''$.

A kondenzátorsoron, a D és F pont között, a feszültség ugyancsak U (és megoszlik a két kondenzátoron).

Ezért $U'' = U - U'$.

Behelyettesítve:

$C'U' = C''(U - U')$;

$$U' = \frac{C''}{C' + C''} U.$$

A D és A közötti feszültség:

$$U_{DA} = U' = \frac{C''}{C' + C''} U.$$

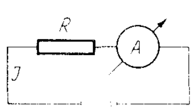
A feszültség az A és B pont között:

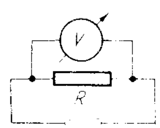
$$U_{AB} = U_{DA} - U_{DB} = \frac{C''}{C' + C''} U - \frac{R_1}{R_1 + R_2} U;$$

$$U_{AB} = \frac{C'' R_2 - C' R_1}{(C' + C'')(R_1 + R_2)} U.$$

18.15. Az *áramerősségmérőt* a fogyasztóval *sorosan* kell kapcsolni az áramkörbe, a mérés helyére. Az árammérő akkor mér jól (nem hamisítja meg a mérni kívánt áramerősséget), ha belső ellenállása kicsi.

A *feszültségmérőt* a fogyasztóval *párhuzamosan* kapcsoljuk: arra a két pontra, amelyek közötti feszültséget mérni akarjuk. A feszültségmérő akkor nem hamisítja meg a mérni kívánt feszültséget, ha belső ellenállása igen nagy.





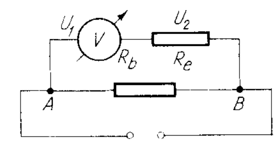
a) Ha az árammérőt tévedésből feszültségmérő módjára kapcsoljuk, kicsi belső ellenállása miatt, a két pont közötti feszültség hatására a műszeren igen nagy áramerősség jön létre, a műszer *kiég*.

b) Amikor a feszültségmérőt kapcsoljuk az áramkörbe árammérő módjára (tehát sorosan), a műszer nagy belső ellenállása miatt az áramkörben igen kicsire csökken az áram (mintegy „lefojtja" az áramot). Ekkor a műszer ugyan nem megy tönkre, de a mérni kívánt áramerősséget nyilvánvalóan megváltoztatja.

18.16. Az előtét-ellenállást sorosan kötjük a feszültségmérőhöz. Mérés közben a műszeren és az előtéten ugyanakkora az áramerősség:

$I_1 = I_2$;

$$\frac{U_1}{R_b} = \frac{U_2}{R_e}.$$



Ebből az előtét-ellenállásra jutó U_2 feszültség:

$$U_2 = \frac{R_e}{R_b} U_1.$$

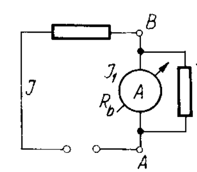
Az előtét-ellenállással ellátott műszerrel akkor mérhetjük a legnagyobb feszültséget (a műszer tönkretevése nélkül), ha U_1 legfeljebb az eredeti méréshatárt éri el. Ekkor a kijelölt (A és B) pont között a megengedett legnagyobb feszültség:

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = \left(1 + \frac{R_e}{R_b}\right) U_1 = \frac{R_b + R_e}{R_b} U_1;$$

$$U_{AB} = \frac{800\,\Omega + 15\,200\,\Omega}{800\,\Omega}\, 5\ \text{V};$$

$U_{AB} = 100$ V.

18.17. A műszeren és a vele párhuzamosan kapcsolt védőellenálláson (söntön) a mért I áramerősség megoszlik. Az A és B pontok között a feszültség a műszeren és a söntágon egyenlő:



$U_1 = U_2$;

$I_1 R_b = I_2 R_s$.

Ebből a söntön folyó áram erőssége:

$$I_2 = \frac{R_b}{R_s} I_1.$$

A műszerrel a kiégetés veszélye nélkül mérhető legnagyobb I áramerősség esetén I_1 legfeljebb a méréshatárt érheti el. Az áramelágazások törvénye szerint:

$$I = I_1 + I_2 = \left(1 + \frac{R_b}{R_s}\right) I_1 = \frac{R_s + R_b}{R_s} I_1;$$

$$I = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \Omega + 10^{-1}\ \Omega}{2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \Omega} 2\text{A};$$

$$\underline{I = 10\ \text{A}.}$$

18.18. $+21\%$; -19%.

18.19. Kiég.

18.20. $A \geqq 1{,}8\ \text{mm}^2$.

18.21. $U_1 = 120$ V; $U_2 = 60$ V; $U_3 = 40$ V.

18.22. $U_1 = 120$ V; $U_2 = 80$ V.

18.23. A 40 W-os izzó kiég.

18.24. 20 μA.

18.25. 20 ohm; 15 ohm; 30 V.

18.26. Két azonos teljesítményű, 110 V-os izzót sorbakötve kell kapcsolnunk a 220 V-os hálózatra.
(És ezzel párhuzamosan akárhány, ugyanígy sorbakötött, egymással egyenlő teljesítményű 2–2 izzót kapcsolhatunk.)

18.27. 1,8 W.

18.28. $U_{AB} = 44$ V. Az A és B pontok rövidre zárásakor mindegyik ellenállás 110 V feszültséget kap.

18.29. $R_e = 79{,}2\ k\Omega$.

18.30. $R_s \approx 4{,}16 \cdot 10^{-3}\ \Omega$

18.31. Ellenkező esetben rövid idő alatt tönkremegy (kiég).

18.32. Az áramforrás energiája annyival csökken, amennyi energiát az izzó 10 óra alatt „felhasznál". Az elektromos teljesítmény ismeretében:

$$E = Pt = 25\ \text{W}\ 10\ \text{h} = 250\ \text{Wh} = 9 \cdot 10^5\ \text{J};$$

$$\underline{E = 0{,}25\ \text{kWh}.}$$

18.33. A szolgáltatott elektromos energia:

$$E = UIt = 4{,}5\ \text{V}\ 0{,}3\ \text{A}\ 8\ \text{h};$$

$$\underline{E = 10{,}8\ \text{Wh}.}$$

18.34. A kétszeres ellenállású huzal keresztmetszete feleakkora, mint a másiké, és így súlya is csak feleakkora, mint a kisebb ellenállású huzalé.

18.35. Az ellenállás értékének változása Δt hőmérséklet-változás esetén:

$$\Delta R = \alpha R_0 \Delta t.$$

Ha a fajlagos ellenállás 0 °C-on ismert, és

$\Delta t = t - 0\ °\text{C} = t$; az ellenállás t hőmérsékleten:

$$R = R_0 + \Delta R = R_0 + \alpha R_0 t = R_0 (1 + \alpha t).$$

Feladatunkban az eredő ellenállás:

$$R = R_1 + R_2 = R_{01}(1 + \alpha_1 t) + R_{02}(1 + \alpha_2 t);$$

ahol R_{01} a szénszál, R_{02} pedig a vashuzal ellenállása 0 °C-on. Az

$R_0 = \varrho \frac{l}{A}$ összefüggés helyettesítésével:

$$R = \varrho_1 \frac{l_1}{A}(1+\alpha_1 t) + \varrho_2 \frac{l_2}{A}(1+\alpha_2 t);$$

$$R = \frac{\varrho_1 l_1 + \varrho_2 l_2}{A} + \frac{\varrho_1 l_1 \alpha_1 + \varrho_2 l_2 \alpha_2}{A}\, t.$$

Az eredő ellenállás akkor független a hőmérséklettől, ha a második tag zérus. Mivel a huzal keresztmetszete nem zérus, szükséges, hogy

$\varrho_1 l_1 \alpha_1 + \varrho_2 l_2 \alpha_2 = 0$

teljesüljön.
Ebből:

$$\frac{l_1}{l_2} = -\frac{\varrho_2 \alpha_2}{\varrho_1 \alpha_1} = \frac{1,2\cdot 10^{-1}\cdot 6\cdot 10^{-3}}{40\cdot 8\cdot 10^{-4}};$$

$$\frac{l_1}{l_2} \approx \frac{1}{44}.$$

18.36. A 110 V-os izzó üzemi áramerőssége:

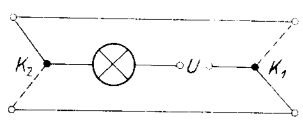
$$I = \frac{P}{U} = \frac{25\ \text{W}}{110\ \text{V}} = 0,227\ \text{A}.$$

A 3,5 V-os izzó 0,3 A-t fogyaszt, az áramerősség valóban nagyobb az előbbinél. Az izzó „fényereje" azonban a másodpercenként kisugárzott energiával, a teljesítménnyel van kapcsolatban. A zsebizzó teljesítménye:

$P = UI = 3,5\ \text{V}\cdot 0,3\ \text{A} = 1,05\ \text{W}.$

Ez lényegesen kisebb a hálózatra készült izzólámpa teljesítményénél.

18.37. A célnak megfelelő, ún. alternatív-kapcsolást az ábra mutatja.



18.38. A 36 izzót sorosan kötve 36·6 V = 216 V feszültségre lehetett volna kötni már eredetileg is. Az egy-egy izzóra jutó többletfeszültséget (4/36 V = 1/9 V-ot) azonban az izzók még kibírják: valamivel erősebb a fényük, ezzel szemben élettartamuk rövidebb.
Ha a füzér 35 izzóból áll, a 220 V-os hálózatról egy izzóra kb. 6,3 V jut. Az izzók egy ideig működhetnek ezen a feszültségen —

miközben a normálisnál erősebben világítanak — azonban rövid idő alatt tönkremennek.

18.39. Az izzók által időegység alatt kibocsátott fénymennyiséget az együttesen felvett elektromos teljesítmény határozza meg.
Ha az egyes izzólámpák ellenállása R, soros kapcsolásban az eredő ellenállás:

$R_e = 2R;$

párhuzamos kapcsolásban az eredő:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}; \qquad R_e = \frac{R}{2}.$$

A két izzóból álló rendszer által felvett elektromos teljesítmény az adott feszültségen soros kapcsolás esetén:

$$P = \frac{U^2}{R_e} = \frac{U^2}{2R};$$

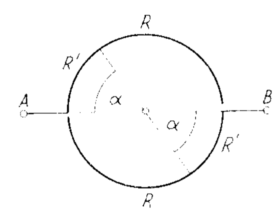
párhuzamos kapcsolás esetén:

$$P = \frac{U^2}{R_e} = \frac{U^2}{\frac{R}{2}} = \frac{2U^2}{R}.$$

A két eredmény összevetésével látható, hogy (a feladat körülményei között) párhuzamos kapcsolásban négyszer akkora a teljesítmény, mint soros kapcsolás esetén.
(Az ellenállás hőmérséklettől való függésétől eltekintettünk.)

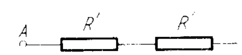
18.40. A bekapcsolt ív ellenállása — egyenletes huzal-keresztmetszetet feltételezve — egyenesen arányos az ívdarab hosszával, és ezért az α szöggel is.

Mivel az R ellenállású félkörívhez π szög tartozik, az egységnyi szögnek megfelelő ellenállás $\frac{R}{\pi}$.



Az α szöghöz tartozó ellenállás:

$$R' = \frac{R}{\pi}\alpha.$$

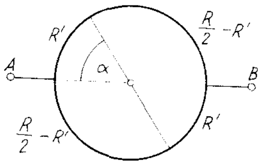


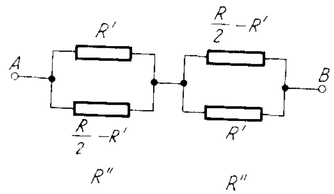
Az elhanyagolhatóan kicsi ellenállású csúszka a két R' ellenállást sorosan köti össze, ezért az eredő ellenállás:

$$R_e = R' + R' = 2R' = \frac{2R}{\pi}\alpha = \frac{200}{\pi}\alpha;$$

$$R_e = \frac{2R}{\pi}\alpha. \quad (0 \leq \alpha \leq \pi.)$$

18.41. A *18.40.* feladat megoldását felhasználva, vegyük figyelembe, hogy most mind a négy ívdarab vezeti az áramot, és az elhanyagolható ellenállású csúszka közbeiktatásával a rendszer az ábrán vázolt egyszerű kapcsolásnak felel meg.





Az eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{\frac{R}{2} - R'} = \frac{1}{R'} + \frac{2}{R - 2R'} = \frac{R - 2R' + 2R'}{R'(R - 2R')};$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{R}{R'(R - 2R')};$$

$$R'' = \frac{R - 2R'}{R}R';$$

$$R_e = 2\frac{R - 2R'}{R}R' = \frac{R - \frac{R}{\pi}\alpha}{R}\frac{R}{\pi}\alpha = \frac{\pi - \alpha}{\pi}\frac{R}{\pi}\alpha;$$

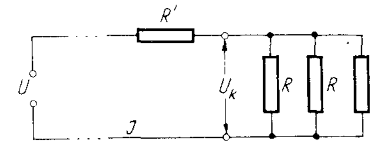
$$\frac{1}{R_e} = \frac{\pi - \alpha}{\pi^2}R\alpha = 720\frac{\pi - \alpha}{\pi^2}\alpha;$$

$$R_e = \frac{R}{\pi}\frac{\pi - \alpha}{\pi}\alpha.$$

18.42. Az alumínium vezetékpár két huzalának együttes hossza $l = 200$ m. A vezeték ellenállása:

$$R' = \varrho\frac{l}{A} = \varrho\frac{l}{r^2\pi} = 0{,}029\frac{\Omega\,\text{mm}^2}{\text{m}}\cdot\frac{200\ \text{m}}{1\ \text{mm}^2\,3{,}14} \approx 1{,}85\,\Omega.$$

Az egyes fogyasztók ellenállása:



$$P = \frac{U^2}{R};$$

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2\ \text{V}^2}{200\ \text{W}} = 242\ \Omega.$$

a) A párhuzamosan kapcsolt három fogyasztó eredő ellenállása:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{3}{R};$$

$$R_e = \frac{R}{3} = \frac{242\ \Omega}{3} = 80{,}67\ \Omega.$$

A vezetéken folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R' + R_e} = \frac{220\ \text{V}}{82{,}52\ \Omega} = 2{,}67\ \text{A}.$$

A fogyasztók sarkain a feszültség:

$$U_k = U - U' = U - IR' = 220\ \text{V} - 2{,}67\ \text{A}\ 1{,}85\ \Omega;$$

$$U_k = 220\ \text{V} - 4{,}94\ \text{V} \approx 215\ \text{V};$$

$$U_k = 215\ \text{V}.$$

b) A fogyasztók sarkaira jutó feszültségnek a fogyasztók számától való függését akkor láthatjuk jobban, ha a számítást általánosan végezzük, és a végeredményt elemezzük.

$$U_k = U - U' = U - IR' = U - \frac{U}{R' + R_e}R';$$

$$U_k = \frac{R' + R_e - R'}{R' + R_e}U = \frac{R_e}{R' + R_e}U.$$

Egy fogyasztó esetén:

$$U_k = \frac{R}{R' + R} U.$$

Két fogyasztó esetén:

$$U_k = \frac{\frac{R}{2}}{R' + \frac{R}{2}} U = \frac{R}{2R' + R} U.$$

Három fogyasztó esetén:

$$U_k = \frac{\frac{R}{3}}{R' + \frac{R}{3}} U = \frac{R}{3R' + R} U.$$

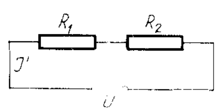
Azonosan méretezett n fogyasztó esetén:

$$U_k = \frac{R}{nR' + R} \cdot U.$$

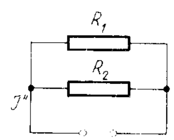
Az eredményből kitűnik, hogy a fogyasztók számának növekedésével (a terhelés fokozódásával) a fogyasztókra jutó feszültség csökken.

18.43. A soros kapcsolásra:

$$I' = \frac{U}{R_1 + R_2}. \qquad (1)$$



A párhuzamos kapcsolás esetén:



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$$

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$I'' = \frac{U}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$I'' = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U. \qquad (2)$$

Helyettesítsük az adatokat az (1) és (2) egyenletekbe:

$$3 = \frac{120}{R_1 + R_2};$$

$$16 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} 120.$$

Az egyenletek egyszerűsítésével:

$R_1 + R_2 = 40;$

$R_1 R_2 = 7{,}5\,(R_1 + R_2).$

Az egyik ismeretlen kiküszöbölésével:

$R_1 = 40 - R_2;$

$(40 - R_2)\,R_2 = 7{,}5 \cdot 40;$

$40\,R_2 - R_2^2 = 300;$

$R_2^2 - 40\,R_2 + 300 = 0;$

$$R_2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1200}}{2} = \frac{40 \pm 20}{2}.$$

Az R_2 ellenállás lehetséges értékei:

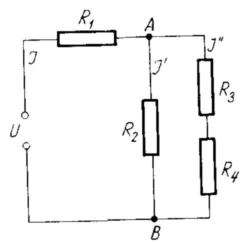
$R_2 = 30\ \Omega;\quad R_2 = 10\ \Omega.$

Az R_1 ellenállás lehetséges értékei:

$R_1 = 10\ \Omega;\quad R_1 = 30\ \Omega.$

Az ismeretlen ellenállások: $30\ \Omega$; $10\ \Omega$.

18.44. Az R_4 ellenállás adatai alapján:



$P = UI = I^2R;$

$$I^2 = \frac{P}{R};$$

$$I''^2 = \frac{40\ \text{W}}{10\ \Omega} = 4\ \text{A}^2;$$

$I'' = 2\ \text{A}.$

Ebből az A és B pont közötti feszültség egyszerűen számítható:

$U_{AB} = I''\,(R_3 + R_4) = 2\ \text{A}\,(20\ \Omega + 10\ \Omega) = 60\ \text{V}.$

Ennek alapján viszont I' meghatározható:

$$I' = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{60\ \text{V}}{40\ \Omega} = 1{,}5\ \text{A}.$$

A főágban az áramerősség:

$$I = I' + I'' = 1{,}5\ \text{A} + 2\ \text{A} = 3{,}5\ \text{A}.$$

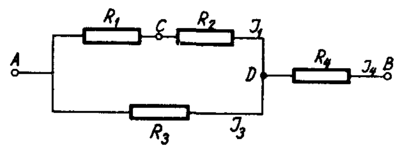
A telep kapocsfeszültsége:

$$U = U_{AB} + IR_1 = 60\ \text{V} + 3{,}5\ \text{A}\ 10\ \Omega = 60\ \text{V} + 35\ \text{V};$$

$$\underline{U = 95\ \text{V}.}$$

18.45. Az eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3};$$



$$\frac{1}{R'} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_2)\,R_3};$$

$$R' = \frac{(R_1 + R_2)\,R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$$

$$R = \frac{(R_1 + R_2)\,R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 = \frac{(50 + 150)\ 50}{50 + 150 + 50} + 80 = 120\ \Omega.$$

A rendszeren az áramerősség:

$$I_4 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{240\ \text{V}}{120\ \Omega} = 2\ \text{A}.$$

$$\underline{I_4 = 2\ \text{A}.}$$

A D és B pontok közötti feszültség:

$$U_{DB} = I_4 R_4 = 2\ \text{A}\ 80\ \Omega = 160\ \text{V}.$$

Az A és D pontok közötti feszültség:

$$U_{AD} = U_{AB} - U_{DB} = 240\ \text{V} - 160\ \text{V} = 80\ \text{V}.$$

Az I_3 áramerősség:

$$I_3 = \frac{U_{AD}}{R_3} = \frac{80\ \text{V}}{50\ \Omega} = 1{,}6\ \text{A};$$

$$\underline{I_3 = 1{,}6\ \text{A}.}$$

Ebből:

$$I_1 = I_4 - I_3 = 2\ \text{A} - 1{,}6\ \text{A} = 0{,}4\ \text{A};$$

$$\underline{I_1 = 0{,}4\ \text{A}.}$$

A keresett feszültség:

$$U_{CD} = I_1 R_2 = 0{,}4\ \text{A}\ 150\ \Omega = 60\ \text{V}.$$

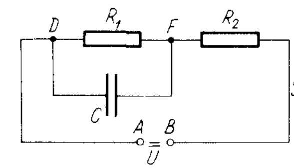
$$\underline{U_{CD} = 60\ \text{V}.}$$

(Ellenőrzésül:

$$U_{AC} = I_1 R_1 = 0{,}4\ \text{A}\ 50\ \Omega = 20\ \text{V};$$

$$U_{AC} + U_{CD} = 20\ \text{V} + 60\ \text{V} = 80\ \text{V} = U_{AD}.)$$

18.46. Egyenfeszültség esetén elektromos áram csak a sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenálláson folyik, a kondenzátor pedig feltöltött állapotban van.



Az áramerősség:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{225}{150 + 600} = \frac{225\ \text{V}}{750\ \Omega} = 0{,}3\ \text{A}.$$

A D és F pontok közötti feszültség:

$$U_{DF} = IR_1 = 0{,}3\ \text{A}\ 150\ \Omega = 45\ \text{V}.$$

A kondenzátor töltése:

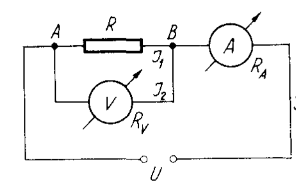
$$C = \frac{Q}{U};$$

$$Q = CU = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 45\ \text{V} = 225 \cdot 10^{-6}\ \text{C}.$$

$$\underline{Q = 2{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{C}.}$$

18.47. Az áramkör eredő ellenállását, a műszerek ellenállását figyelembe véve kell meghatároznunk.

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} = \frac{R + R_V}{R\,R_V};$$



$$R' = \frac{R\,R_V}{R + R_V};$$

$$R_e = \frac{R\,R_V}{R + R_V} + R_A = \frac{40 \cdot 800}{40 + 800} + 10 \approx 48{,}1\ \Omega.$$

Az (árammérő által jelzett) áramerősség:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{3\ \mathrm{V}}{48{,}1\ \Omega} = 0{,}0623\ \mathrm{A}.$$

$\underline{I \approx 62\ \mathrm{mA}.}$

Az árammérőre mint ellenállásra jutó feszültség:

$U' = IR_A = 0{,}0623\ \mathrm{A} \cdot 10\ \Omega = 0{,}623\ \mathrm{V}.$

Az A és B pontok közötti feszültség (amit a feszültségmérő jelez):

$U_{AB} = U - U' = 3\ \mathrm{V} - 0{,}623\ \mathrm{V} = 2{,}377\ \mathrm{V}.$

$\underline{U_{AB} \approx 2{,}4\ \mathrm{V}.}$

18.48. A *18.47.* feladat megoldásához tartozó ábrát itt is felhasználva, az adatokból látjuk, hogy az egyelőre ismeretlen R ellenállás A és B végpontja között a feszültség 1,83 V.

A feszültségmérőn folyó áram erőssége:

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_V} = \frac{1{,}83\ \mathrm{V}}{800\ \Omega} = 2{,}29 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}.$$

Az R ellenálláson folyó áram erőssége:

$I_1 = I - I_2 = 117 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} - 2{,}29 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} = 114{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}.$

Az ellenállás értéke:

$$R = \frac{U_{AB}}{I_1} = \frac{1{,}83\ \mathrm{V}}{114{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}} \approx 16\ \Omega.$$

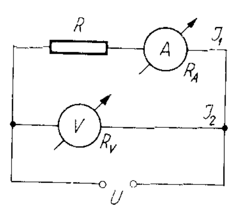
Az ellenálláson folyó áram erőssége, ha a műszerek nem volnának bekapcsolva:

$$I' = \frac{U}{R} \approx \frac{3\ \mathrm{V}}{16\ \Omega} \approx 0{,}1875\ \mathrm{A};$$

$\underline{I' \approx 188\ \mathrm{mA}.}$

18.49. A feszültségmérő az áramforrás feszültségét mutatja:

$\underline{U = 3\ \mathrm{V}.}$



Az R ellenálláson folyó áram erőssége (amelyet az áramerősségmérő jelez):

$$I_1 = \frac{U}{R + R_A} = \frac{3}{40 + 10} = \frac{3\ \mathrm{V}}{50\ \Omega} = 0{,}06\ \mathrm{A}.$$

$\underline{I = 60\ \mathrm{mA}.}$

18.50. A *18.49.* feladat megoldásához tartozó ábrát itt is felhasználva, az adatokból látjuk, hogy az áramforrás feszültsége:

$U = 3\ \mathrm{V};$

az R ellenállás pedig:

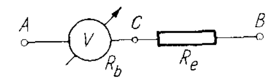
$$I_1 = \frac{U}{R + R_A};$$

$$R + R_A = \frac{U}{I_1};$$

$$R = \frac{U}{I_1} - R_A = \frac{3\ \mathrm{V}}{0{,}18\ \mathrm{A}} - 10\ \Omega = 6{,}67\ \Omega.$$

$\underline{R = 6{,}67\ \Omega.}$

18.51. Előtét-ellenállást kell alkalmazni. Mivel a műszeren és az előtéten azonos az áramerősség:



$$\frac{U_{AC}}{R_b} = \frac{U_{CB}}{R_e}.$$

De $U_{CB} = U_{AB} - U_{AC}$;

ezért:

$$\frac{U_{AC}}{R_b} = \frac{U_{AB} - U_{AC}}{R_e};$$

$$R_e = \frac{U_{AB} - U_{AC}}{U_{AC}} R_b = \frac{100 - 0{,}05}{0{,}05} \cdot 20 \cdot 10^3 = 39{,}98 \cdot 10^6\ \Omega;$$

$\underline{R_e \approx 40\ \mathrm{M}\Omega.}$

Amikor a műszer mutatója a 30-as skálaosztásnál áll meg, a skála

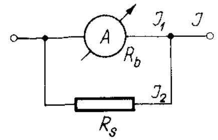
$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$ részéhez mutat.

Mivel az 50 egység 100 V-nak felel meg, a mért feszültségérték:

$\frac{3}{5} \cdot 100 = 60$ egység; $\underline{U = 60\ \mathrm{V}.}$

18.52. Söntöt kell alkalmazni. Mivel a műszeren és a söntön a feszültség egyenlő:

$$I_1 R_b = I_2 R_s.$$



Azonban $I_2 = I - I_1$;

ezért:

$$I_1 R_b = (I - I_1) R_s;$$

$$R_s = \frac{I_1}{I - I_1} R_b = \frac{0{,}01}{2 - 0{,}01} \cdot 10^{-2} = 5{,}025 \cdot 10^{-5}\ \Omega;$$

$$\underline{R_s \approx 5 \cdot 10^{-5}\ \Omega.}$$

Ha a műszer mutatója a teljes skála 3/10 részéhez mutat, és a végkitérés 2 A-nak felel meg, a mért áramerősség:

$$I = \frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{6}{10}\ \text{A};$$

$$\underline{I = 0{,}6\ \text{A}.}$$

19. Egyenáram II.

19.1. *a)* Az ellenállást <u>0-tól 100 ohmig</u> lehet változtatni.

b) Az áramerősség az

$$I = \frac{U}{R}$$

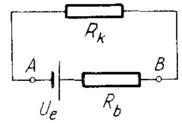
összefüggés alkalmazásával számítható. Amikor az egész ellenállást beiktatjuk a csúszka segítségével:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{100\ \text{V}}{100\ \Omega} = 1\ \text{A}.$$

Ha az ellenállást csökkentjük, az áramerősség növekszik. Az ellenállás zérushoz való közelítésével az áramerősség (állandó feszültségű áramforrás esetén) elvben végtelen nagyra növekedne. Az áramerősség tehát elvben <u>végtelentől 1 A-ig</u> változtatható. Ez a valóságban természetesen több okból sem következhet be. Egyrészt azért, mert bizonyos nagyságú áramerősség esetén az ellenállás túlzottan felmelegszik, és elég. (Melegedés közben ellenállása egyébként ugyancsak megváltozik.) Valóságos áramkörben – szerencsés esetben – biztosító is van, és ez meghatározott áramerősség-értéknél az áramkört megszakítja. Másrészt az áramforrásnak is van valamilyen kis (belső) ellenállása, és ez is határt szab az áramerősség korlátlan növekedésének.
Mindenesetre a változtatható ellenállások tényleges gyakorlati felhasználásakor figyelembe kell venni, hogy az mekkora áramerősséget bír ki, és célszerű az áramkör adataiból előre megbecsülni, hogy a változtatható ellenállást milyen határok között szabad alkalmazni.

19.2. A **18.** fejezet valamennyi feladatánál az áramforrást úgy tekintettük, mintha ellenállása egyáltalán nem volna, (illetve zérus lenne), a sarkain pedig a feszültség állandó volna.

A valóságos áramforrásnak ellenállása van. Ez általában kis értékű, tehát nagy külső ellenállás esetén elhanyagolható, mert miatta nem módosul lényegesen a körben folyó áram erőssége, illetve az áramforrás sarkain mérhető ún. k a p o c s f e s z ü l t s é g . Olyan esetekben azonban, amikor az áramforrás ellenállása nem sokkal kisebb a külső ellenállásnál, az áramforrás belső ellenállását is figyelembe kell venni. Feladatunkban az áramerősség az Ohm-törvény alkalmazásával:



$$I = \frac{U_e}{R};$$

ahol U_e az elem e l e k t r o m o t o r o s e r e j e , R pedig az áramkörben levő összes ellenállás eredője, beszámítva az áramforrás belső ellenállását is. Mivel az áramforráson és a külső körön ugyanaz az áramerősség, a belső ellenállás a külsővel sorosan kapcsolódik.

$$I = \frac{U_e}{R} = \frac{U_e}{R_k + R_b} = \frac{2\,V}{15\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{2\,V}{20\,\Omega};$$

$\underline{I = 0{,}1\ A.}$

A kapocsfeszültség, amely az A és B pontok között mérhető:

$U_k = IR_k = 0{,}1\ A\ 15\,\Omega;$

$\underline{U_k = 1{,}5\ V.}$

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az elem belső ellenállására jutó feszültséget az elektromotoros erőből levonjuk.

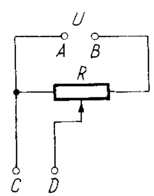
$U_b = IR_b = 0{,}1\ A\ 5\,\Omega = 0{,}5\ V;$

$U_k = U_e - U_b = 2\ V - 0{,}5\ V = 1{,}5\ V.$

19.3. *a)* A C és D pontok között a feszültség a csúszka bal oldali végállása esetén zérus, a jobb oldali végállás esetén pedig 100 V.

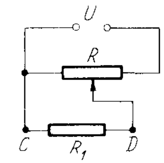
$\underline{0 \leqq U_{CD} \leqq 100\ V.}$

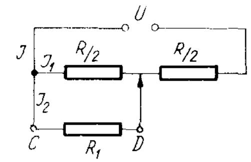
b) Középállás esetén a C és D közötti feszültség fele az A és B közötti feszültségnek, mert U_{AB} egyenlő arányban oszlik meg az R ellenállás két (50 – 50 ohmos) darabján.



$\underline{U_{CD} = 50\ V.}$

19.4. Az áramkör kissé módosított ábrája mutatja, hogy vegyes kapcsolású áramkör ismeretlen adatait kell számítanunk. Az eredő ellenállás:





$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{50} + \frac{1}{200} = \frac{5}{200};$$

$$R' = \frac{200}{5} = 40\ \Omega;$$

$$R_e = 50 + 40 = 90\ \Omega;$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{100\ V}{90\ \Omega} = \frac{10}{9}\ A.$$

A C és D pont közötti feszültség:

$$U_{CD} = U - I\frac{R}{2} = 100 - \frac{10}{9}\cdot 50 = 100\ V - 55{,}55\ V;$$

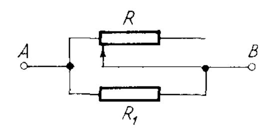
$\underline{U_{CD} = 44{,}4\ V.}$

19.5. Az A és B közötti ellenállás:

$\underline{50\ \Omega \leqq R_{AB} \leqq 150\,\Omega.}$

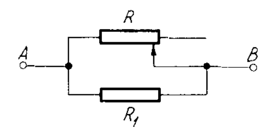
19.6. Amikor a csúszka a bal oldali véghelyzetben van, $R_{AB} = 0.$

A jobb oldali véghelyzet esetén R és R_1 párhuzamosan kapcsolt ellenállások. Ekkor:



$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{3}{100};$$

$$R_{AB} = \frac{100}{3} = 33{,}3\,\Omega.$$

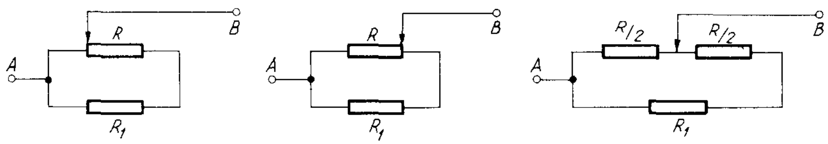


Az A és B közötti ellenállás:

$\underline{0 \leqq R_{AB} \leqq 33{,}3\,\Omega.}$

19.7. *a)* A feladat megoldása a csúszka két véghelyzetében ugyanaz, mint a *19.6.* feladaté:

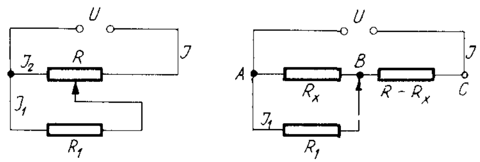
$\underline{R_{AB} = 0}$; ill. $R_{AB} = 33{,}3\,\Omega$. (Közben az R_{AB} nagyobb is lehet, mint $33{,}3\,\Omega$.)



b) A megadott adatokkal, ebben a kapcsolásban, a csúszka középállásánál az eredő ellenállás ugyanaz, mint a jobb oldali végállásban.

$R_{AB} = 33{,}3\,\Omega.$

19.8. A kapcsolás vázlatát az ábra mutatja.



A fogyasztón az áramerősség, ha kivezetéseire a megkívánt feszültség jut:

$P_1 = U_1 I_1;$

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{100\ \text{W}}{50\ \text{V}} = 2\ \text{A}.$$

Ez azt jelenti, hogy a feszültségosztó ellenállás jobb oldali részén $I = I_1 + I_2 > 2$ A áramerősség jön létre, tehát csak a 100 ohmos tolóellenállás lehet alkalmas.

A csúszka helyének kiszámításához jelöljük R_x-szel a tolóellenállásnak az R_1-el párhuzamosan kapcsolt részét. Mivel az AB és BC közötti feszültség, továbbá I_1 és R ismert:

$$(I - 2)\,R_x = 50; \qquad (1)$$

$$I\,(100 - R_x) = 150. \qquad (2)$$

A *(2)* egyenletből:

$$I = \frac{150}{100 - R_x}.$$

Behelyettesítve az *(1)* egyenletbe:

$$\frac{150}{100 - R_x} R_x - 2R_x = 50.$$

Ebből:

$150R_x - 200\,R_x + 2R_x^2 = 5000 - 50\,R_x;$

$2R_x^2 = 5000;$

$R_x^2 = 2500;$

$R_x = 50\,\Omega.$

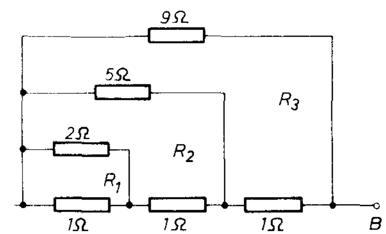
Mivel a tolóellenállásokat általában egyenletes keresztmetszetű huzallal és egyenletes csévéléssel készítik, a csúszkát a tolóellenállás közepére kell állítani.

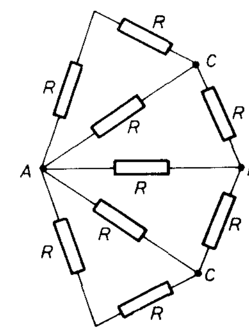
19.9. *a)* A számolást lépésenként végezhetjük:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$R_1 = \frac{2}{3}\,\Omega.$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5};$$





$$R_2 = \frac{5}{4}\,\Omega.$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{\frac{5}{4} + 1} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9};$$

$$R_3 = \frac{9}{5}\,\Omega;$$

$$R_{AB} = \frac{9}{5}\,\Omega = 1{,}8\,\Omega.$$

b) Felhasználva a szimmetrikus elrendezést:

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R};$$

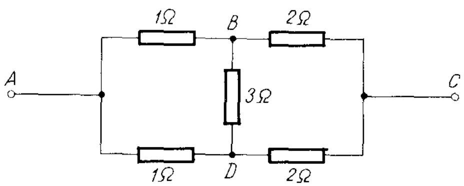
$$R_{AC} = \frac{2R}{3}.$$

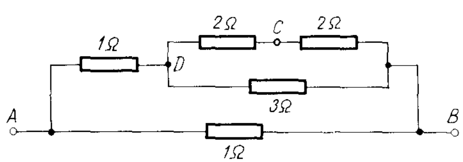
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{\frac{2R}{3} + R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{2R}{3} + R} = \frac{3}{5R} + \frac{1}{R} + \frac{3}{5R};$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{6+5}{5R} = \frac{11}{5R};$$

$$\underline{R_{AB} = \frac{5R}{11};}$$

19.10. *a)* Az ábra átalakításával:





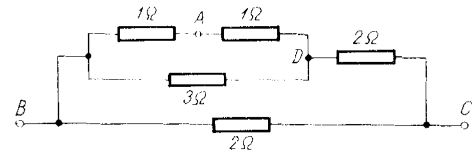
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2+2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12};$$

$$R_1 = \frac{12}{7}\,\Omega.$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{1 + \frac{12}{7}} + \frac{1}{1} = \frac{7}{19} + \frac{1}{1} = \frac{26}{19};$$

$$\underline{R_{AB} = \frac{19}{26}\,\Omega = 0{,}73\,\Omega.}$$

b) Az elrendezés hasonló az előzőhöz:

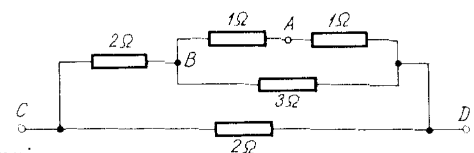


$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}; \qquad R_1 = \frac{6}{5}\,\Omega.$$

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{\frac{6}{5} + 2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{16} + \frac{1}{2} = \frac{13}{16};$$

$$\underline{R_{BC} = \frac{16}{13}\,\Omega = 1{,}23\,\Omega.}$$

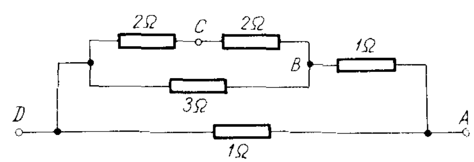
c) Ez az elrendezés ugyanolyan, mint a *b)* esetben, ezért:



$$R_{CD} = R_{BC};$$

$$\underline{R_{CD} = \frac{16}{13}\,\Omega = 1{,}23\,\Omega.}$$

d) Ez az elrendezés ugyanolyan, mint az *a)* esetben, ezért:



$$R_{DA} = R_{AB};$$

$$\underline{R_{DA} = \frac{19}{26}\,\Omega = 0{,}73\,\Omega.}$$

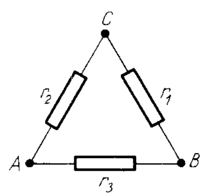
e) Az elrendezés szimmetriája miatt (az A és C pontra kötött feszültség esetén) a B és D pontok azonos feszültségűek. Közöttük – a 3 ohmos ellenálláson – áram nem folyna. Ezért az A és C közötti eredő ellenállás számításakor a 3 ohmos ellenállást figyelmen kívül hagyhatjuk.

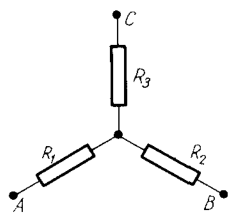
$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$R_{AC} = \frac{3}{2}\,\Omega = 1{,}5\,\Omega.$$

19.11. A feladat követelményei az alábbi egyenletekkel fejezhetők ki:

a) Az R_{AB} eredő ellenállás:





$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3};$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{(r_1 + r_2)\,r_3};$$

$$R_{AB} = \frac{(r_1 + r_2)\,r_3}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$R_{AB} = R_1 + R_2.$$

Ebből:

$$R_1 + R_2 = \frac{(r_1 + r_2)\,r_3}{r_1 + r_2 + r_3}. \qquad (1)$$

b) Az R_{BC} eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{r_2 + r_3} + \frac{1}{r_1} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1\,(r_2 + r_3)};$$

$$R_{BC} = \frac{r_1\,(r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$R_{BC} = R_2 + R_3.$$

Ebből:

$$R_2 + R_3 = \frac{r_1\,(r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3}. \qquad (2)$$

c) Az R_{AC} eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{r_1 + r_3} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{(r_1 + r_3)\,r_2};$$

$$R_{AC} = \frac{(r_1 + r_3)\,r_2}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$R_{AC} = R_1 + R_3.$$

Ebből:

$$R_1 + R_3 = \frac{(r_1 + r_3)\,r_2}{r_1 + r_2 + r_3}. \qquad (3)$$

Az (*1*); (*2*) és (*3*) egyenletrendszerből az R_1; R_2; R_3 ismeretlen kiszámítható. Az egyenletek jobb oldalán levő törteket jelöljük átmenetileg rendre: a; b; c-vel.
Így az egyenletrendszer:

$$R_1 + R_2 = a; \qquad (4)$$
$$R_2 + R_3 = b; \qquad (5)$$
$$R_1 + R_3 = c. \qquad (6)$$

Vonjuk ki (*6*)-ból (*5*)-öt, majd adjuk hozzá (*4*)-hez:

$$2R_1 = a - b + c;$$

$$R_1 = \frac{a - b + c}{2}. \qquad (7)$$

Vonjuk ki (*4*)-ből (*6*)-ot, majd adjuk hozzá (*5*)-höz:

$$2R_2 = a + b - c;$$

$$R_2 = \frac{a + b - c}{2}. \qquad (8)$$

Végül vonjuk ki (*5*)-ből (*4*)-et, majd adjuk hozzá (*6*)-hoz:

$$2R_3 = -a + b + c;$$

$$R_3 = \frac{-a + b + c}{2}. \qquad (9)$$

Az a; b és c törtek behelyettesítésével:

$$R_1 = \frac{1}{2}\;\frac{(r_1 + r_2)r_3 - r_1(r_2 + r_3) + (r_1 + r_3)r_2}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\;\frac{(r_1 + r_2)r_3 + r_1(r_2 + r_3) - (r_1 + r_3)r_2}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(r_1 + r_2)r_3 + r_1(r_2 + r_3) + (r_1 + r_3)r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Ebből:

$$\underline{R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3};}$$

$$\underline{R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3};}$$

$$\underline{R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.}$$

19.12. A kapocsfeszültség:

$0{,}8\ U_e = IR_k$.

Ebből:

$$I = \frac{0{,}8\ U_e}{R_k} = \frac{0{,}8\ U_e}{25}. \qquad (1)$$

Az áramerősséget a teljes körre számítva:

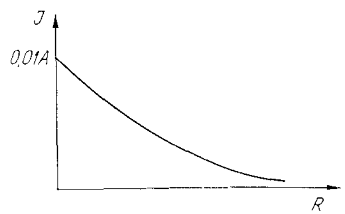
$$I = \frac{U_e}{R_b + R_k} = \frac{U_e}{R_b + 25}. \qquad (2)$$

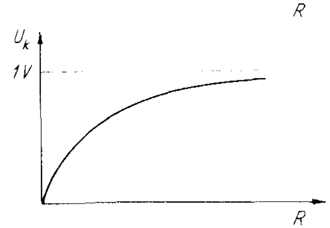
Az (1) és (2) egyenletekből:

$$\frac{0{,}8\ U_e}{25} = \frac{U_e}{R_b + 25};$$

$$R_b = \frac{25}{0{,}8} - 25 = 31{,}25 - 25;$$

$$\underline{R_b = 6{,}25\Omega.}$$





19.13. *a)* Az áramerősség:

$$I = \frac{U_e}{R_b + R} = \frac{1}{100 + R}.$$

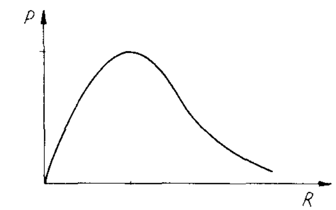
b) A kapocsfeszültség:

$$U_k = IR = \frac{R}{100 + R}.$$

c) A fogyasztón létrejött teljesítmény:

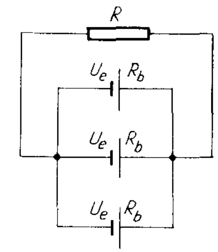
$$P = U_k I = \frac{R}{(100 + R)^2}.$$

A megfelelő diagramokat az ábra mutatja.



19.14. Az egyenlő elektromotoros erejű és belső ellenállású elemek párhuzamos kapcsolása esetén az eredő elektromotoros erő ugyanannyi, mint egy elemé:

$U_e = 1{,}5$ V.



A telep belső ellenállása:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{3}{R_b};$$

$$R_e = \frac{R_b}{3} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5\ \Omega.$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U_e}{R + R_e} = \frac{1{,}5}{11{,}5 + 1{,}5} = \frac{1{,}5}{13}\text{A},$$

$$\underline{I \approx 0{,}115\ \text{A}.}$$

A kapocsfeszültség:

$U_k = IR_k \approx 0{,}115 \cdot 11{,}5 \approx 1{,}322$ V;

$$\underline{U_k \approx 1{,}32\ \text{V}.}$$

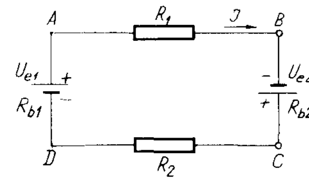
19.15. A feladat szerinti elrendezésben a sorosan kapcsolt elemek elektromotoros erői összegeződnek, mert (az áramirányt figyelembe véve) feszültségeik „egyirányúak".
Az áramerősség:

$$I = \frac{U_e}{R_e} = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{R_1 + R_{b2} + R_2 + R_{b1}};$$

$$I = \frac{4\ \text{V}}{5\ \Omega + 8\ \Omega + 5\ \Omega + 8\ \Omega} = \frac{4\ \text{V}}{26\ \Omega}.$$

$$\underline{I = 0{,}154\ \text{A}.}$$

Vegyük észre, hogy itt valójában a zárt áramhurkokra vonatkozó K i r c h h o f f m á s o d i k t ö r v é n y é t alkalmaztuk, amely szerint: ha a hurok mentén valamilyen áramirányt (akár önkényesen) kijelölünk, és a hurkot az áram irányában haladva (gondolatban) körbejárjuk, akkor a körben levő elektromotoros erők (megfelelő előjellel vett) algebrai összegéhez hozzáadva az áramerősség és az egyes ellenállások szorzataiból képezett összeget, az így kapott feszültségösszeg zérus.



Röviden: *zárt hurok mentén az elektromotoros erők és az ellenállásokra jutó feszültségek algebrai összege zérus.*

P o z i t í v előjelű a feszültség, ha a körüljárás irányában a potenciál c s ö k k e n, és n e g a t í v, ha n ö v e k s z i k.

$\Sigma U_e + \Sigma IR = 0.$

Feladatunkban pl. az A pontból kiindulva és a felvett áramirányt követve:

$$IR_1 - U_{e2} + IR_B + IR_2 - U_{e1} + IR_{b1} = 0.$$

(Az $ABCD$ irányú körüljárással a felvett t e c h n i k a i áramirányt követtük. A technikai áram, a p o z i t í v t ö l t é s mozgása, a nagyobb potenciálú helytől a kisebb potenciálú hely felé irányul az elektromos térben, a vezetőben, minden ellenálláson. Az IR szorzatokat ezért kellett pozitív előjellel vennünk.

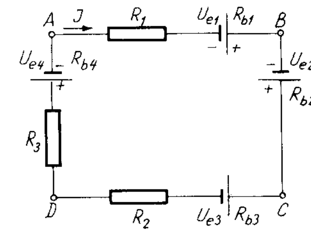
A feszültségforrás pozitív sarka nagyobb potenciálú, mint a negatív sarok. Amikor az áramforráson (gondolatban) a negatív saroktól haladunk a pozitív felé, a potenciál növekszik. Ezért itt az U_e előjele most negatív.)

Ebből:

$$I = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{R_1 + R_2 + R_{b1} + R_{b2}}.$$

(Ha az áramirányt önkényesen a berajzolt technikai áramiránnyal ellentétesen vettük volna fel, eredményül n e g a t í v áramerősséget kaptunk volna, ami azt jelezné, hogy a technikai áramiránnyal ellentétes áramot tételeztünk fel.)

19.16. A *19.15.* feladat megoldásában részletezett, Kirchhoff második törvényén alapuló módszert alkalmazzuk. Vegyük fel önkényesen, minden különösebb meggondolás nélkül feltételezett technikai áramirányként pl. az ábrán jelzett irányt. (Válasszuk körüljárási iránynak pl. az $ABCD$ irányt.)



A törvényt alkalmazva:

$$IR_1 - U_{e1} + IR_{b1} - U_{e2} + IR_{b2} + U_{e3} + IR_{b3} + IR_2 + IR_3 + U_{e4} + IR_{b4} = 0.$$

Ebből:

$$I = \frac{U_{e1} + U_{e2} - U_{e3} - U_{e4}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{b1} + R_{b2} + R_{b3} + R_{b4}} =$$

$$= \frac{10 + 10 - 6 - 20}{20 + 40 + 10 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}01} = \frac{6\ \text{V}}{70{,}41\ \Omega}.$$

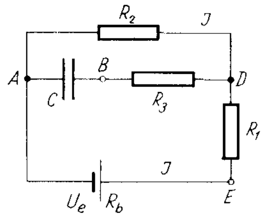
Az áramerősség abszolút értéke:

$I = 85{,}2$ mA.

A technikai áramirány az ábrában jelzett iránnyal ellentétes. (Erre utal a negatív előjel.)

19.17. A kondenzátor lemezei között szigetelő anyag van, ezért a lemezek között – normális körülmények esetén – áram nem folyhat át. Lehetséges azonban, hogy a kondenzátor lemezeire (tévedés vagy áramköri hiba miatt) olyan nagy feszültség jut, amelyet a lemezek közötti réteg már nem képes „elszigetelni”, és ezért a kondenzátor „átüt”: a kondenzátoron is áthalad az áram. Átütés következtében a kondenzátor általában tönkremegy, mert a szigetelő réteg pl. elég. Lehetséges viszont az is, hogy a szigetelő réteg csak kisebb mértékben károsodik, ezért kis feszültségen még jól szigetel, és ilyen módon a kondenzátor még használható. A sérült szigetelésű kondenzátor azonban rendszerint még kisebb feszültségen is kisebb-nagyobb mértékben vezeti az áramot: „á t v e z e t”. Az ilyen kondenzátornak lehet ugyan valamennyi kapacitása, azonban mint ellenállást is figyelembe kell venni az áramkörben. A kondenzátorokon a kapacitásértéken kívül feltüntetik azt a maximális feszültséget is, amelyen még károsodás nélkül használható. (Ez az ü z e m i feszültség természetesen kisebb a kondenzátor ún. á t ü t é s i feszültségénél.) (Feladatainkban a megadott kondenzátorokat – hacsak azt külön nem említjük – hibátlanoknak és az adott körülmények között lehetséges feszültségnél nagyobb üzemi feszültségűnek tekintjük.)

19.18. Az áramkör A B D ágán áram nem folyik, tehát a kondenzátor jobb oldali fegyverzetétől kezdve a D pontig, a BD vezető mentén, a potenciál minden pontban ugyanakkora.
Ezért a kondenzátor akkora feszültségre töltődik, amennyi az elektromos áramlás közben az A és D pont között kialakul.



Az áramerősség:

$$I = \frac{U_e}{R_b + R_1 + R_2} = \frac{3{,}6}{10 + 40 + 70} = \frac{3{,}6\ \mathrm{V}}{120\ \Omega} = 0{,}03\ \mathrm{A}.$$

Az R_2 ellenálláson a feszültség:

$U_{AD} = U_2 = IR_2 = 0{,}03\ \mathrm{A}\ 70\ \Omega = 2{,}1\ \mathrm{V}.$

A kondenzátoron a feszültség:

$U_C = U_{AB} = U_{AD} = 2{,}1\ \mathrm{V};$

$U_C = 2{,}1\ \mathrm{V}$

19.19. $R \approx 330\ \Omega.$

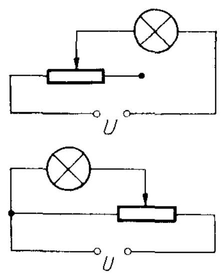
19.20. *a)* $30\ \Omega \leqq R \leqq 300\ \Omega;$

b) $6{,}67\ \Omega \leqq R \leqq 66{,}7\ \Omega.$

19.21. A kétféle lehetőséget az ábra mutatja.

a) $I_{min} = 1{,}05\ \mathrm{A};$

b) $I_{min} = 1{,}7\ \mathrm{A}.$



19.22. Nem.

19.23. $R = 10\ \Omega.$

19.24. *a)* $U_{EF} = 0;\ U_{CD} = 0.$

b) $U_{BC} = 0.$

19.25. Az R_1 és R_2 ellenálláson áram folyik.

Az R_3 vezető minden pontja az A ponttal egyező feszültségű. ($U_{AC} = 0.$)

19.26. $U_k = 0{,}72\ \mathrm{V};$ $I = 72\ \mathrm{mA}.$

19.27. $U_k = 2{,}03\ \mathrm{V};$ $I = 184\ \mathrm{mA}.$

19.28. $U_e = 2{,}42\ \mathrm{V};$ $R_e = 6{,}2\ \Omega.$

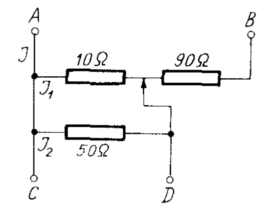
19.29. Nincsen.

19.30. Igen. (A negatív előjel csak azt jelzi, hogy az illető ellenálláson a feltételezettel ellenkező irányban folyik az áram.)

19.31. $R_{b1} : R_{b2} = 2 : 3.$

19.32. Nem történik baja.

19.33. *a)* Amikor a csúszó érintkező a bal oldali ütköző mellett van, az ábrának megfelelő áramkör jön létre. Az áramkör eredő ellenállása:



$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50} = \frac{6}{50};$$

$$R' = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}\ \Omega;$$

$$R_e = 90 + \frac{25}{3} = \frac{270 + 25}{3} = \frac{295}{3} = 98{,}3\,\Omega.$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{100}{98{,}3} = 1{,}02\ \mathrm{A}.$$

$U_{CD} = 100 - 1{,}02 \cdot 90 = 100 - 91{,}8 = 8{,}2\ \mathrm{V};$

$U_{CD} = 8{,}2\ \mathrm{V}.$

b) A jobb oldali végállásban:

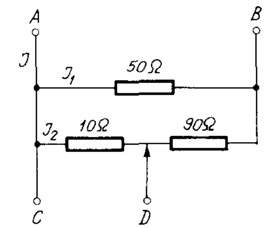
$U_{CD} = U_{AB} = 100\ \mathrm{V};$

$U_{CD} = 100\ \mathrm{V}.$

19.34. Az áramkörben az eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{3}{100};$$

$$R_e = \frac{100}{3}\,\Omega.$$



Az áramerősség:

$$I = \frac{100\text{ V}}{\dfrac{100}{3}\,\Omega} = 3\text{ A};$$

$$I_2 = I - I_1 = I - \frac{U_{AB}}{R} = 3 - \frac{100}{50} = 1\text{ A}.$$

a) A 10 ohmos részre jutó feszültség:

$U_{CD} = I_2 \cdot 10 = 1\text{ A} \cdot 10\,\Omega = 10\text{ V}.$

A csúszka bal oldali végállása esetén a keresett feszültséghatár:

$U_{CD} = 10\text{ V}.$

b) A csúszka jobb oldali végállása esetén:

$U_{CD} = U_{AB} = 100\text{ V}.$

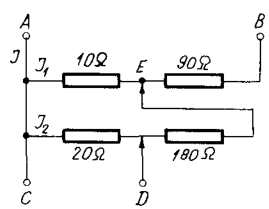
A C és D pont közötti feszültség határai:

$\underline{10\text{ V} \leq U_{CD} \leq 100\text{ V}.}$

19.35. *a)* Mindkét csúszka bal oldali végállása esetén:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = \frac{21}{200};$$

$$R' = \frac{200}{21}\,\Omega.$$



$$R_e = 90 + \frac{200}{21} = \frac{1890+200}{21} = \frac{2090}{21}\,\Omega.$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U_{AB}}{R_e} = \frac{100}{\dfrac{2090}{21}} = \frac{2100}{2090} = 1{,}005\text{ A}.$$

$$I_2 = I - I_1 = I - \frac{U_{AE}}{10} = I - \frac{U_{AB}-U_{EB}}{10};$$

$$I_2 = I - \frac{U_{AB}-90\,I}{10} = 1{,}005 - \frac{100-90\cdot 1{,}005}{10},$$

$I_2 = 1{,}005 - 0{,}955 = 0{,}05\text{ A}.$

A C és D pont közötti feszültség:

$U_{CD} = I_2 \cdot 20 = 0{,}05 \cdot 20 = 1\text{ V};$

$\underline{U_{CD} = 1\text{ V}.}$

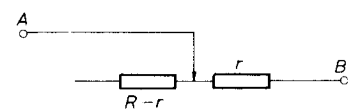
b) Mindkét csúszka jobb oldali állása esetén:

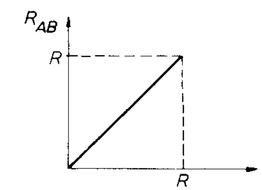
$\underline{U_{CD} = U_{AB} = 100\text{ V}.}$

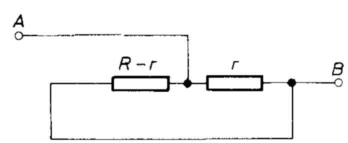
19.36. Jelöljük a tolóellenállás csúszkától jobbra eső részének ellenállását r-rel.

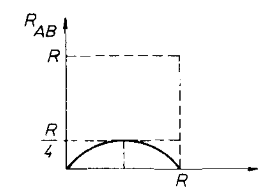
a) Az első kapcsolásban az A és B közötti ellenállás a csúszka minden helyzetében nyilvánvalóan egyenlő r-rel.

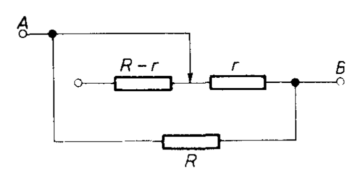
$R_{AB} = r.$

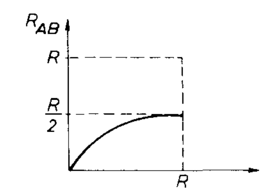












b) A második esetben az r és az $R - r$ ellenállások párhuzamos kapcsolása van az A és B között.

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R-r} = \frac{R-r+r}{r(R-r)} = \frac{R}{r(R-r)};$$

$$R_{AB} = r\cdot\frac{R-r}{R} = r\left(1-\frac{r}{R}\right) = r - \frac{1}{R}r^2.$$

A diagram paraboladarab, amelynek zérushelyei:

$R_{AB} = 0$; ha $r = 0$;

$R_{AB} = 0$; ha $\frac{R-r}{R} = 0$; ha $r = R$.

Az eredő akkor maximális, ha $r = \frac{R}{2}$. Ekkor:

$$R_{AB} = \frac{R}{2} - \frac{1}{R}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R}{2} - \frac{R}{4} = \frac{R}{4}.$$

c) A harmadik kapcsolásban az A és B pont között r és R párhuzamos kapcsolása szerepel.

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{r+R}{rR};$$

$$R_{AB} = \frac{rR}{r+R}.$$

A függvény diagramjának egyetlen zérushelye van:
$R_{AB} = 0$; ha $r = 0$.

A függvény értéke a $r = R$ helyettesítési értéknél a másik szélső helyzetben:

$$R_{AB} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}.$$

A két szélső helyzet között a függvény növekszik.

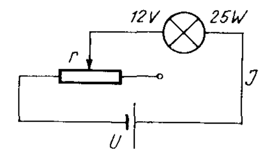
19.37. Az egyszerű *lineáris* potenciométer egyenletes keresztmetszetű vezetőből (fémhuzalból vagy pl. szénszalagból) készül. Ebben az esetben a csúszó érintkező és az ellenállás vége közötti vezetődarab hosszával *egyenesen arányos* a bekapcsolt ellenállás.
A technikában használatos logaritmikus potenciométer nem egyenletes keresztmetszetű vezetőből készül, hanem pl. olyan módon, hogy az ellenállást szolgáltató szénszalag fokozatosan

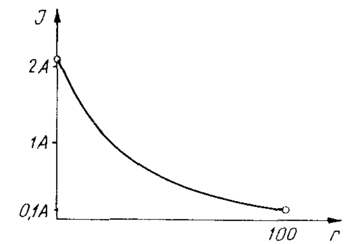
vékonyodik. A szalagból a csúszka tolásával egyszeres, kétszeres, háromszoros stb. darabot beiktatva, ezek ellenállásainak aránya nem kétszeres, háromszoros lesz, hanem az ellenállás a bekapcsolt szalag hosszának logaritmusával arányos.

19.38. A fogyasztó ellenállása:

$$P = UI = \frac{U^2}{R};$$

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{12^2}{25} = \frac{144}{25} = 5{,}76\,\Omega.$$





Az áramkörben folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R + r}.$$

A r növekedésével I értéke csökken. Az áramerősség maximális értéke $r = 0$ esetén jön létre:

$$I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{12\text{ V}}{5{,}76\,\Omega} = 2{,}083\text{ A}.$$

Az áramerősség minimuma $r = 100\,\Omega$ esetén következik be:

$$I_{min} = \frac{U}{R + 100} = \frac{12}{5{,}76 + 100} = \frac{12\text{ V}}{105{,}76\,\Omega} = 0{,}113\text{ A}.$$

19.39. Keressük pl. az A és B pontok közötti eredő ellenállást. Használjuk ki, hogy az A és B pontra feszültséget kapcsolva, a C és D pont – a szimmetrikus felépítés miatt – azonos potenciálú lesz. Ezzel a kapcsolást – az egyes potenciálszinteket megrajzolva – egyszerűbbé alakíthatjuk át. (A C és D pontok közötti ellenállást akár el is hagyhatjuk.)

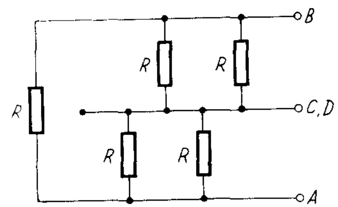
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}.$$

$$R' = \frac{R}{2};$$

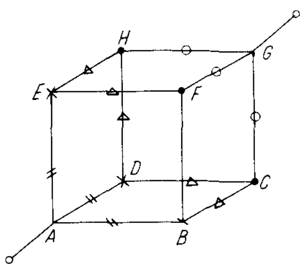
$$R'' = R' + R' = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R;$$

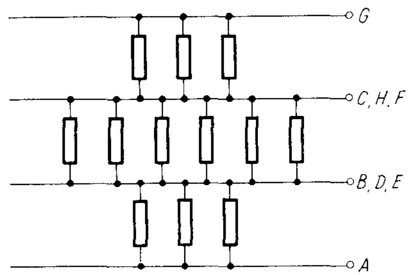
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R} = \frac{2}{1} = 2;$$

$$R_{AB} = \frac{1}{2}\ \Omega.$$



19.40. *a)* Keressük az eredő ellenállást pl. az A és G pontok között. Használjuk ki, hogy – a szimmetrikus elrendezés miatt – az





E, B, D pontok azonos potenciálúak, és a C, F, H pontok potenciálja ugyancsak egymással egyenlő. Ezzel egyszerűbb, síkbeli ábrához jutunk.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{3}{R};$$

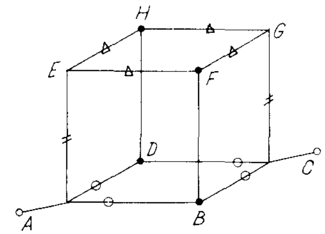
$$R_1 = \frac{R}{3};$$

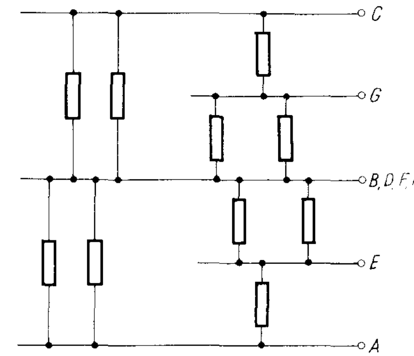
$$\frac{1}{R_2} = \frac{6}{R};$$

$$R_2 = \frac{R}{6};$$

$$R_{AG} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{4R + R}{6} = \frac{5R}{6}; \qquad R_{AG} = \frac{5}{6}\ \Omega.$$

b) Keressük az eredő ellenállást pl. az A és C pontok között. A szimmetrikus elrendeződés miatt most azonos potenciálúak: a B, D, F és H pontok. Ezért az R_{BF} és R_{DH} ellenállások el is hagyhatók.





$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{R};$$

$$R_1 = \frac{R}{2};$$

$$R_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R;$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R} = \frac{2}{3R} + \frac{2}{R} = \frac{8}{3R};$$

$$R_3 = \frac{3}{8}R.$$

$$R_{AC} = 2\,R_3 = \frac{6}{8}R = \frac{3}{4}R;$$

$$R_{AC} = \frac{3}{4}\ \Omega.$$

c) Keressük az eredő ellenállást pl. az A és B pontok között. Itt a szimmetria miatt azonos potenciálú a C és F; valamint a D és E pont.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{R};$$

$$R_1 = \frac{R}{2};$$

$$R_2 = \frac{R}{2} + R + \frac{R}{2} = 2R;$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R} + \frac{2}{R} = \frac{5}{2R};$$

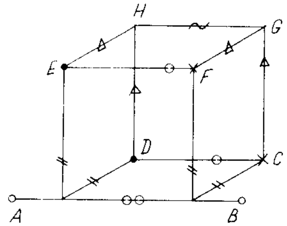
$$R_3 = \frac{2R}{5};$$

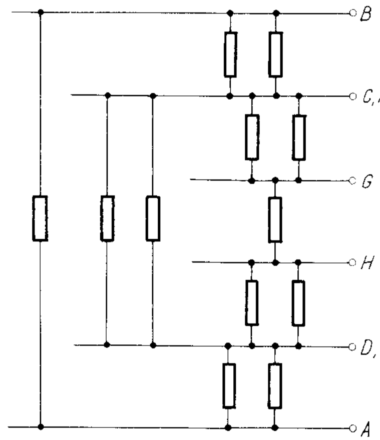
$$R_4 = \frac{R}{2} + \frac{2R}{5} + \frac{R}{2} = \frac{7R}{5};$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{5}{7R} + \frac{1}{R} = \frac{12}{7R};$$

$$R_{AB} = \frac{7R}{12} = \frac{7}{12}R;$$

$$R_{AB} = \frac{7}{12}\,\Omega.$$





19.41. $P = UI = I^2 R;$

$$R = \frac{P}{I^2};$$

$$I = \frac{U_e}{R_b + R} = \frac{U_e}{R_b + \frac{P}{I^2}} = \frac{U_e I^2}{I^2 R_b + P};$$

$I^2 R_b + P = U_e I;$

$R_b I^2 - U_e I + P = 0;$

$I^2 - 2I + 0{,}75 = 0;$

$I_1 = 1{,}5$ A; $\quad I_2 = 0{,}5$ A.

(Annak meggondolását, hogy miért lehetséges két megoldás, az olvasóra bízzuk!)

19.42. $P = I^2R = \left(\frac{U_e}{R_b + R}\right)^2 R.$

Az első esetben:

$$P = \left(\frac{U_e}{4+8}\right)^2 8 = \frac{U_e^2}{18}.$$

A második esetben:

$$\frac{U_e^2 R}{(4+R)^2} = \frac{U_e^2}{18};$$

$18\,R = (4 + R)^2;$

$R^2 - 10R + 16 = 0;$

$R_1 = 8\,\Omega;\quad R_2 = 2\,\Omega.$

19.43. *a)* $I = \frac{U_1 - U_2}{R_{b1} + R_{b2}} = \frac{13 - 12}{0{,}09 + 0{,}01} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ A.

$I = 10$ A.

b) $P_k = U_1 I = 13$ V·10 A $= 130$ W;

$P_v = 130$ W.

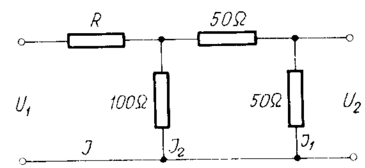
c) $P_v = I^2R_{b1} + I^2R_{b2} = I^2(R_{b1} + R_{b2}) = 100$ A²·0,1 Ω;

$P_v = 10$ W.

d) $U_t = U_2 I = 12$ V·10 A $= 120$ W;

$U_t = 120$ W.

19.44. Az eredő ellenállás:



$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{2}{100};$$

$R' = 50\ \Omega;$

$R_e = 50 + R.$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U_1}{50 + R}.$$

Az 50 ohmos ellenálláson a feszültség ismert:

$I_1\,50 = 100;$

$I_1 = 2$ A.

Mivel a két ág ellenállása egyenlő:

$I_2 = 2$ A;

$I = I_1 + I_2 = 4$ A.

A teljesítmény felhasználásával:

$P = U_1 I$;

$$U_1 = \frac{P}{I} = \frac{880 \text{ W}}{4 \text{ A}} = 220 \text{ V}.$$

$\underline{U_1 = 220 \text{ V}.}$

Az *(1)* egyenlet felhasználásával:

$$50 + R = \frac{U_1}{I};$$

$$R = \frac{U_1}{I} - 50 = \frac{220}{4} - 50 = 55 - 50 = 5\Omega.$$

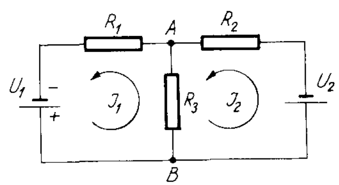
$\underline{R = 5\Omega.}$

19.45. A feladat megoldásához a *19.15.* feladatnál használt eljárás általánosított formáját, az ún. „ablak-módszert" érdemes alkalmaznunk. A módszer lényege abban áll, hogy a kapcsolásban az egyes zárt áramhurkokat („ablakokat") részben egymástól független áramköröknek tekintjük, és ezekben azonos körüljárási iránnyal folyó, képzeletbeli (fiktív) áramokat veszünk fel önkényesen, majd az egyes ablakokra különkülön alkalmazzuk a huroktörvényt.

A *19.15.* feladat megoldásában részletezett eljárást itt annyival kell még kiegészítenünk, hogy az R_3 ellenálláson a feszültség számításához azt kell elképzelnünk, mintha ott két egymással ellentétes irányú áram folyna, amelyek különbsége adja meg a tényleges áramerősséget. Ezért az első ablak körüljárásakor az R_3 ellenálláson a feszültséget $(I_1 - I_2) R_3$; a második ablak körüljárásakor pedig $(I_2 - I_1) R_3$ ablakban kell felírnunk.

A feszültségösszeg a bal oldali hurokra:

$I_1 R_1 - U_1 + (I_1 - I_2) R_3 = 0.$



A jobb oldali hurokra:

$(I_2 - I_1) R_3 + U_2 + I_2 R_2 = 0.$

Az adatokkal:

$50\, I_1 - 1{,}5 + 100\,(I_1 - I_2) = 0.$

$100\,(I_2 - I_1) + 1 + 80\, I_2 = 0.$

A műveletek elvégzése után:

$150\, I_1 - 100\, I_2 = 1{,}5;$

$-\,100\, I_1 + 180\, I_2 = -\,1.$

A második egyenlet 1,5-szeresét az elsőhöz hozzáadva:

$170\, I_2 = 0.$

$I_2 = 0.$

Behelyettesítve:

$150\, I_1 = 1{,}5;$

$I_1 = 0{,}01$ A.

A feladat szerinti elrendezés és adatok esetén tehát a jobb oldali hurokban az áramerősség zérus, ezért az R_3 ellenálláson az áram erőssége:

$I_{BA} = I_1 - I_2 = 0{,}01$ A;

$\underline{I_{BA} = 10 \text{ mA}.}$

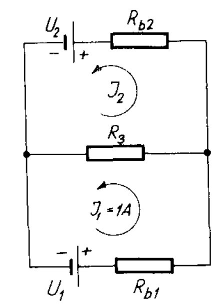
<u>Az *AB* ágon az áram a *B* ponttól az *A* pont felé folyik.</u>

(A feladat másképpen is megoldható!)

19.46. A *19.45.* feladatban követett módszer alkalmazásához célszerű, ha az ábrát kissé átalakítjuk. Emellett – a tévedések kizárása érdekében – az elemek belső ellenállását külön feltüntetjük.

A felső hurokra:

$U_2 + (I_2 - I_1) R_3 + I_2 R_{b2} = 0;$



az alsó hurokra:

$(I_1 - I_2) R_3 - U_1 + I_1 R_{b1} = 0.$

Az adatokkal:

$2 + (I_2 - 1) R_3 + 2 I_2 = 0.$

$(1 - I_2) R_3 - 2 + 1 = 0.$

Ebből:

$I_2 R_3 - R_3 + 2 I_2 = -2;$

$-\, I_2 R_3 + R_3 = 1.$

Az egyenletek összeadásával:

$\underline{I_2 = -0{,}5 \text{ A}.}$

(A kettes jelzésű elemen az áram iránya az önkényesen felvett I_2-vel ellentétes.)

Behelyettesítve:

$0{,}5\,R_3 + R_3 = 1;$

$\frac{3}{2} R_3 = 1;$

$R_3 = \frac{2}{3}\,\Omega.$

Az R_3 ellenálláson az áramerősség:

$I_3 = I_1 - I_2 = 1, + 0{,}5 = 1{,}5$ A.

$I_3 = 1{,}5$ A.

19.47. A körben az áramerősség:

$$I = \frac{U_e}{R_b + R}.$$

A teljesítmény:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U_e^2 R}{(R_b + R)^2}.$$

A teljesítmény (adott U_e és R_b esetén) az R ellenállás függvénye. Maximális értékének meghatározása szélsőérték-számítási feladat. A matematikában szokásos jelöléssel az

$$y = \frac{ax}{(b + x)^2}$$

alakú függvény maximumát kell keresni. A differenciálszámításról tanultak szerint ezt úgy kaphatjuk meg, ha kiszámítjuk az y deriváltját, majd meghatározzuk, hogy a derivált függvény x milyen értéke mellett zérus.

A derivált:

$$y' = \frac{a\,(b + x)^2 - 2\,ax\,(b + x)}{(b + x)^4}.$$

Az $y' = 0$ akkor teljesül, ha a számláló zérus:

$ax^2 - ab^2 = 0;$

$x^2 = b^2;$

$x = \pm b.$

Fizikai értelme az $x = b$ megoldásnak van.

(Azt, hogy $x = b$ esetén a szélső érték valóban maximum, a második derivált előjele mutatja. Ezt a számítást itt mellőzzük.)

Felhasználva, hogy $b = R_b$ és $x = R$:

P maximális, ha $R = R_b$-vel.

Meghatározott elektromotoros erejű és belső ellenállású telep esetén a teljesítmény akkor maximális, ha a telepre kapcsolt ellenállás egyenlő a belső ellenállással.

19.48. *a)* $P = UI = 10^5\,\text{V} \cdot 1{,}5 \cdot 10^4\,\text{A};$

$P = 1{,}5 \cdot 10^9$ W.

b) Egy villámlás során az elektromos munka:

$W = Pt = 1{,}5 \cdot 10^9\,\text{W} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,\text{s} = 3 \cdot 10^7$ J.

A másodpercenkénti száz villám teljesítménye:

$$P' = \frac{100\,\text{W}}{1\,\text{s}} = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^7\,\text{J}}{1\,\text{s}} = 3 \cdot 10^9\,\text{W}.$$

A villámok és az erőmű teljesítményének aránya:

$$\frac{P_{\text{villám}}}{P_{\text{erőmű}}} = \frac{3 \cdot 10^9\,\text{W}}{5 \cdot 10^9\,\text{W}} = 0{,}6.$$

A Földön a villámok teljesítménye csak kb. 60%-a a krasznojarszki erőmű teljesítményének!

20. Elektromágnesesség

20.1. $M = 2 \cdot 10^{-4}$ Nm; $I = 4$ A; $A = 2{,}5$ cm^2 $= 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ m^2; $B = ?$

$$B = \frac{M}{I\ A} = \frac{2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm}}{4\mathrm{A}\ 2{,}5\ 10^{-4}\ \mathrm{m}^2};$$

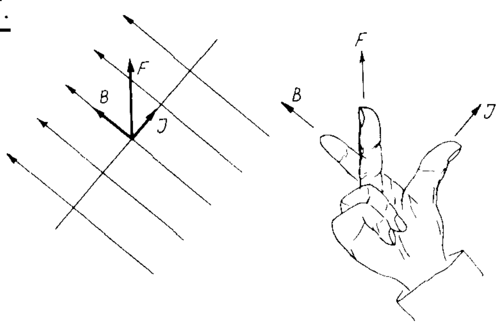
$$B = 0{,}2 \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{Am}^2} = 0{,}2 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Am}^2} = 0{,}2 \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{Am}^2} = 0{,}2 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2};$$

$$\underline{B = 0{,}2 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}.$$

20.2. $B = 0{,}1 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$; $I = 5$ A; $l = 20$ cm $= 0{,}2$ m. $F = ?$

$$F = I\,l\,B = 5\ \mathrm{A} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 0{,}1 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 0{,}1\ \mathrm{N};$$

$$\underline{F = 0{,}1\ \mathrm{N}.}$$

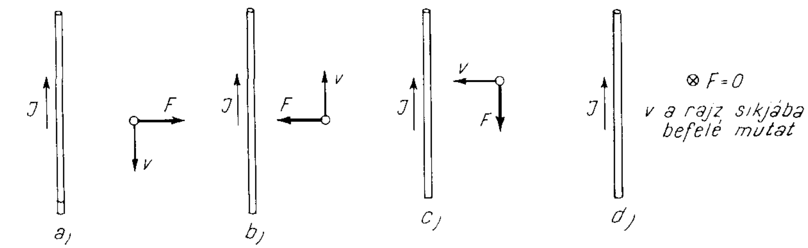


Az erő iránya egyidejűleg merőleges az áram irányára és az indukcióvektorra is. Ennek szemléltetésére az ún. jobbkéz-szabályt használjuk, eszerint ha jobb kezünk hüvelykujja az áram irányába mutat, a mutatóujj pedig B irányába, akkor F az ezekre merőlegesen állított középső ujj irányába mutat, amint az ábrán látható.

20.3. Az előző feladatban az erő irányára érvényes jobbkéz-szabályt idéztük fel. Eszerint F merőleges az áram irányára és B-re is, tehát <u>merőleges az áram irányába mutató vektor és a B vektor által kifeszített síkra.</u>

20.4. <u>Igen.</u> A mágneses tér erőt fejt ki az elektromos töltésre, ha az mozog, és sebessége nem párhuzamos a mágneses tér indukcióvektorával. Ezt az erőt szokás Lorentz-erőnek nevezni. A mágneses térben mozgó töltésre ható Lorentz-erő gyorsítja a töltést, úgy, hogy a töltés sebességének iránya változik.

20.5. Mágneses térben mozgó töltésre ható Lorentz-erő irányára nézve a *20.2.* feladat megoldásában felidézett jobbkéz-szabály a mérvadó, csak az ottani áramiránynak a pozitív töltés sebességének iránya felel meg. Az F tehát merőleges v-re és B-re is úgy, amint a jobb kéz középső ujja merőleges lehet a hüvelyk- és mutatóujjakra.



Az erő irányának meghatározásához ismerni kell a B vektor irányát. A hosszú, egyenes vezető által létesített mágneses tér B-je az ábrán látható töltések helyén a rajz síkjára merőlegesen befelé mutató vektor. Ezt figyelembe véve a jobbkéz-szabály alapján az ábrán jelzett erőirányokat kapjuk.
Az ábra szerinti *d)* esetben nincs erő, mert v és B párhuzamos A Lorentz-erőnek nemcsak az iránya függ v és B irányától, hanem a nagysága is. Ha v és B párhuzamos vektorok, az erő nulla, ha v és B merőlegesek, $F = Q\ v\ B$. Általában az igaz, hogy a Lorentz-erő szempontjából a B vektornak a v-re merőleges $B_\perp$ összetevője hatásos, a v-vel párhuzamos $B_\parallel$ összetevő nem játszik szerepet. A Lorentz-erő nagysága $F = Q\ v\ B_\perp$.

20.6. A vezetőkeret indukciófluxusa kezdetben

$\Phi_0 = 0;$

a mozgás végén:

$$\Phi = B\,A = 0{,}2\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\cdot 50\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 = 10^{-3}\,\mathrm{Vs}.$$

A fluxus megváltozása:

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = 10^{-3}\ \mathrm{Vs}.$$

Így az átlagos indukált feszültség:

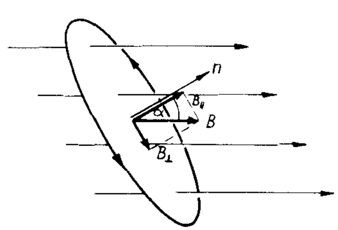
$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{Vs}}{0{,}01\,\mathrm{s}} = 0{,}1\ \mathrm{V};$$

$$\underline{U = 0{,}1\ \mathrm{V}.}$$

20.7. **T** betűt rakunk ki az acélrudakból úgy, hogy legyen vonzás az érintkező részek között. Ekkor a **T** betű szára a mágnes. Ellenkező esetben nincs erő, mert a mágnesrúd közepén gyenge a mágneses térerősség.

20.8. Ha a töltés homogén mágneses térben mozog a B indukcióvektorra merőleges v sebességgel, akkor a B-re és a v-re merőleges Lorentz-erő (lásd *20.5.* megoldást) mozgásirányába (v irányba) eső vetülete zérus, így ez az erő nem végez munkát. A munkatétel szerint tehát nem változtatja a töltés mozgási energiáját, vagyis nem változtatja a töltés sebességének nagyságát, hatására a v iránya változik, a mozgás pályája a B-re merőleges síkban elgörbül. A sebesség nagyságának állandósága miatt a töltésre ható $F = Q\,v\,B$ erő állandó. A töltésre ható erő a B-re merőleges síkban v-re merőleges, és nagysága állandó. Ez az erő pedig csak egyenletes körmozgást hozhat létre a B-re merőleges síkban.

20.9. A vezetőkeret síkja normálisának iránya a keretben folyó áram irányával úgy függ össze, mint a jobbmenetű csavar haladási iránya a forgási iránnyal. A vezetőkeretre ható nyomaték maximális, ha a keret normálisa merőleges az indukcióvektorra, vagyis ha n és B vektor 90°-os szöget zár be. A forgatónyomaték zérus, ha n és B párhuzamos, bezárt szögük nulla. Forgatónyomatékot csak az n-re merőleges B hoz létre. Abban



az esetben, amikor n B-vel 0-tól és 90°-tól különböző α szöget zár be, a keretre ható forgatónyomatékot B-nek n-re merőleges összetevője $B_\perp$ hozza létre. Az n-nel párhuzamos $B_\parallel$ összetevő hatástalan. Az ábrán látható, hogy

$$B_\perp = B\cdot\sin\alpha.$$

Így a keretre ható nyomaték:

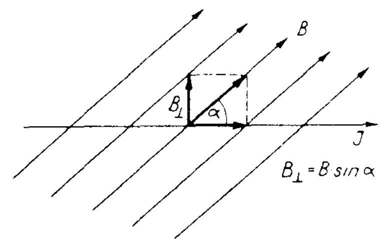
$$M = IAB\cdot\sin\alpha = 2\ \mathrm{A}\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2\cdot 0{,}2\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\cdot 0{,}5 = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm};$$

$$\underline{M = \mathbf{2\cdot 10^{-3}\ Nm}.}$$

A keretre ható nyomaték mindig olyan, hogy a keret normálisát az indukcióvektorral egy irányba „igyekszik" beállítani.

20.10. Homogén mágneses térben csak forgatónyomaték hat az árammal átfolyt hurokra. Egyensúlyi helyzetben akkor lesz, ha a nyomaték $M = 0$. Ez két esetben következik be, mégpedig akkor, ha a hurok normálisa (lásd a *20.9.* feladat megoldását) paralel vagy antiparalel a mágneses tér indukcióvektorával, vagyis akkor, ha n és B szöge 0° vagy 180°. A 0°-nak megfelelő helyzetben az egyensúly stabilis, mert ebből a helyzetből kitérítve a hurkot a fellépő nyomaték hatására ebbe a helyzetbe visszatér. A 180°-nak megfelelő antiparalel helyzetben labilis az egyensúly, mert bármilyen kis szöggel kimozdítva, a hurkot ebből a helyzetből a fellépő nyomaték a másik egyensúlyi helyzet felé forgatja.

20.11. A *20.2.* feladat megoldásában felidéztük az áramra ható erőről tanultakat abban az esetben, amikor az áramátjárta vezető merőleges a mágneses tér indukcióvektorára, B-re. Ha az áram és B nem merőlegesek, akkor az áramra ható erő szempontjából B-nek az áram irányára merőleges összetevője ($B_\perp$) az érdekes. $F = I\,l\,B_\perp$. Az erő irányára nézve általánosan is a *20.2.* megoldásban felidézett jobbkéz-szabály a mérvadó. Ezek szerint a feladat kérdéseire a válaszok:



a) $F = I\,l\,B = 20\ \mathrm{A}\cdot 1\ \mathrm{m}\ 0{,}5\cdot\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 10\ \mathrm{N};$ $\quad\underline{F = 10\ \mathrm{N}.}$

b) $F = I\,l\,B_\perp$, de most $B_\perp = 0$, így $\quad\underline{F = 0.}$

c) $F = I\,l\,B_{\perp}$; $B_{\perp} = B\cdot\sin\alpha$; tehát

$$F = I\,l\,B\cdot\sin\alpha = \quad 20\ \mathrm{A}\cdot 1\ \mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\cdot 0{,}5 = 5\ \mathrm{N};$$

$$\underline{F = 5\ \mathrm{N}.}$$

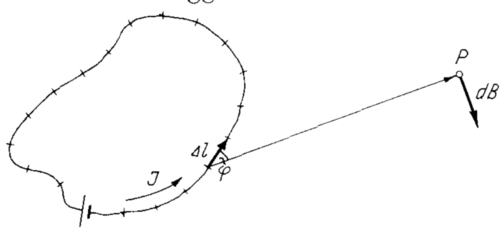
20.12. A gimnáziumok számára készült tankönyvben szereplő képlet alapján az „igen hosszú" egyenes vezető által gerjesztett mágneses tér térerőssége:

$$H = \frac{I}{2\,\pi\,r};$$

ahol I az áramerősség, r annak a pontnak a távolsága a vezetőtől, amelyben a térerősséget ki akarjuk számítani.
Feladatunkban $I = 100$ A; $r = 0{,}5$ m.

$$H = \frac{100\ \mathrm{A}}{2\pi\cdot 0{,}5\ \mathrm{m}} = 31{,}8\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}; \qquad \underline{H = 31{,}8\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.}$$

Megjegyzés:
A tankönyvben nemcsak az egyenes vezető mágneses térerősségének kiszámítására alkalmas képlet található, hanem néhány más vezetőelrendezés (tekercs, toroid, körvezető) esetén alkalmazható képletek is, amelyek között látszólag kevés kapcsolat van. Pedig ezek mindegyike egy az áramok által gerjesztett mágneses térre vonatkozó általános törvény, a B i o t – S a v a r t - törvény, speciális esetei. Eszerint: egy tetszőleges áramkör által létesített mágneses mező olyan, mintha az áramkör minden kis szakasza külön-külön járulna a mágneses mező létesítéséhez. Úgy képzeljük el a tér egy kiválasztott pontjában a térerősség létrejöttét, hogy az egyes elemi vezetődarabok külön-külön hoznak létre elemi indukcióerősségeket, és ezek adódnak azután össze eredő indukcióerősséggé.



Tekintsük az ábrán látható áramkört. Képzeljük a vezetékeket Δl darabokra felbontva, és az áram irányába nyíllal ellátva. Ezáltal az egész áramkört elemi vektorokra bontottuk. A Biot – Savart-törvény szerint egy Δl hosszúságú áramelem által az r távolságban levő P pontban létesített mágneses indukció arányos az áramerősséggel, arányos az áramelem hosszával, arányos az áramelem és az áramelemtől a ponthoz húzott sugár által bezárt szög sinusával, viszont fordítva arányos az áramelem és a kiválasztott pont közötti távolság négyzetével.
Az ábra jelölését használva ez a törvény a következő alakba írható:

$$\Delta B \sim \frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r^2}; \qquad \Delta B = k\,\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r^2}.$$

A k arányossági tényezőt $\dfrac{\mu_0}{4\pi}$ alakban szokás írni. Az ilyen választásnak az az előnye, hogy így a numerikus számítást zavaró 4π tényező más fontos összefüggésekben nem fog fellépni. Ezzel a B i o t – S a v a r t - t ö r v é n y:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r^2}.$$

Az elemi indukcióvektor iránya merőleges mind az áramelemre, mind a sugár irányára, mégpedig úgy, hogy a Δl; r és ΔB iránya ebben a sorrendben a jobb kéz hüvelyk-, mutató- és az ezekre merőlegesen állított középső ujj irányának felel meg (jobbkézszabály).
Az így kiszámított ΔB a P pontban uralkodó indukciónak csak egy kis részét adja. Az egész indukcióerősséget úgy határozzuk meg, hogy az egyes áramelemek által gerjesztett indukcióelemeket mint vektorokat összegezzük. Ha az áramkör síkban fekszik, akkor ezen sík bármely pontjában az elemi indukcióvektorok bármelyike merőleges erre a síkra. Ábránkon a P pontban a rajz síkjában vagy befelé, vagy kifelé mutató vektor. Így ebben a pontban a teljes indukció az elemi indukciók algebrai összege, vagyis:

$$B = \sum \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r^2}.$$

μ_0 állandó számértéke és dimenziója I; B és r egységének megválasztása miatt már meghatározott. Dimenziója a fenti egyenlőségből kiolvasható, számértéke mérésekkel határozható meg.

Ezek alapján:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} .$$

Ezt a tényezőt a vákuum permeabilitásának nevezzük.
Vigyük át a μ_0 konstanst az egyenlőség másik oldalára.

$$\frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \sin\varphi}{r^2} .$$

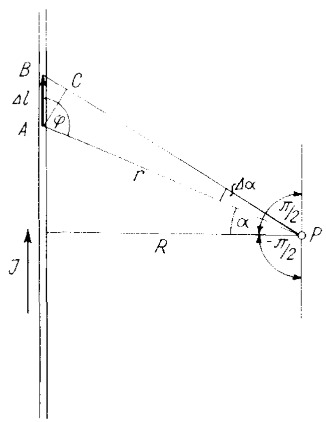
A baloldalon szereplő $\frac{B}{\mu_0}$ mennyiséget a mágneses mező másik jellemzőjének tekintjük, és térerősségnek nevezzük, a szokásnak megfelelően H-val jelöljük, vagyis:

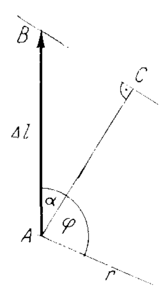
$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \sin\varphi}{r^2} .$$

A mágneses térerősség egysége a fenti egyenlőség alapján:

$$1 \frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{m}^2} = 1 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} .$$

A Biot–Savart-törvény alkalmazásával határozzuk meg egy végtelen hosszú egyenes vezető térerősségét, a vezetőtől tetszés szerint R távolságban levő P pontban.
E célból válasszuk az ábrán látható módon a vezető egy tetszés szerinti Δl darabját. Ezen áramelem által a P pontban létesített térerősségelem:





$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \cdot \sin\varphi}{r^2} .$$

Ebből látható, hogy annál kisebb az áramelem által létesített térerősség a P pontban, minél messzebb vesszük fel az áramelemet. Ugyanis az r^2 növekszik, és a $\sin\varphi$ csökken, ha messzebb van P-től. Ilyen módon érezhető nagyságban csak a vezető közeli részei vesznek részt a mágneses tér kialakításában, tehát P pontból egy elég hosszú egyenes vezető végtelen hosszúnak tekinthető.
A teljes térerősséget úgy kapjuk meg, hogy az egyes áramelemek által létrehozott térerősségelemeket összeadjuk, tehát

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{I \cdot \Delta l \cdot \sin\varphi}{r^2} .$$

Az ábráról leolvashatók a következő összefüggések:
$\sin\varphi = \sin(180° - \varphi) = \cos\alpha$;

$$r = \frac{R}{\cos\alpha};$$

$$\Delta l = \frac{\overline{AC}}{\cos\alpha} = \frac{r \cdot \Delta\alpha}{\cos\alpha} .$$

Ezeket H kifejezésébe beírva kapjuk, hogy

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{R} \cdot \Sigma \cos\alpha \cdot \Delta\alpha .$$

Az összegzést természetesen úgy kell elvégezni, hogy közben az áramelemek hosszát minden határon túl csökkentjük, vagyis H tulajdonképpen az előbbi összeg határértéke:

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{R} \cdot \lim \Sigma \cos\alpha \cdot \Delta\alpha .$$

Miközben az összes áramelemet figyelembe vesszük, az α értéke $-\frac{\pi}{2}$-től $\frac{\pi}{2}$-ig változik.

Ezért:

$$\lim \Sigma \cos\alpha \cdot \Delta\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \, d\alpha = \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2;$$

tehát a P pontbeli térerősség nagysága:

$$H = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \cdot 2 = \frac{I}{2\pi R};$$

és iránya a jobbkéz-szabálynak megfelelően a rajz síkjába befelé, arra merőlegesen mutat.

20.13. A töltéseknek a feladatban leírt mozgása áramot jelent. Egy adott pontban t idő alatt áthaladó töltésmennyiség egyenlő azzal a töltéssel, amennyi azon az egyenes szakaszon van, amely t idő alatt áthalad az adott ponton. Az áthaladó egyenes szakasz hossza vt. Az ezen levő töltés $Q = \sigma vt$, ha σ a hosszegységre jutó töltés.
Az adott ponton időegység alatt áthaladó töltés, vagyis az áramerősség:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{\sigma vt}{t} = \sigma v.$$

Az egyenestől R távolságban a mágneses térerősség:

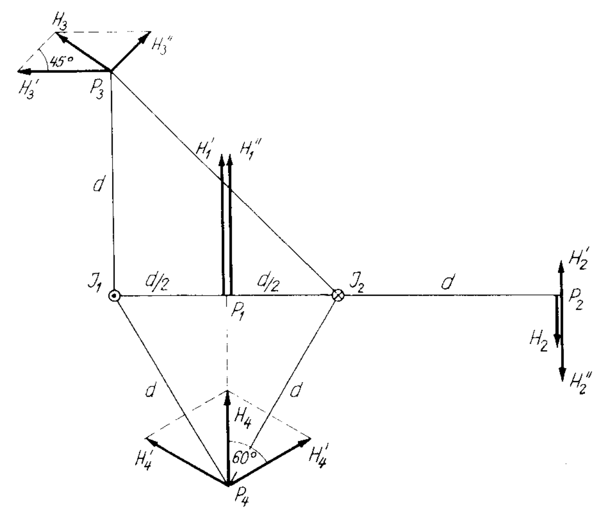
$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{\sigma v}{2\pi R} = \frac{2 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\pi \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}};$$

$$\underline{H = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.}$$

20.14. A két vezetőben folyó áram által létesített mágneses térerősség meghatározásánál a „szuperpozíció" elvét alkalmazzuk: A tér egy pontjában uralkodó térerősséget úgy számítjuk ki, hogy meghatározzuk az egyes vezetők által külön-külön létesített térerősséget, majd ezeket vektoriálisan összegezzük.
Az egyes pontokban az I_1 áramú vezető által létesített térerősséget H'-tel az I_2 áramú által gerjesztett térerősséget H''-tel jelöljük.
Minthogy a végtelen hosszú egyenes vezetőtől R távolságban a térerősség:

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Az egyes pontokban a térerősség, felhasználva az ábráról leolvasható összefüggéseket, a következők:



P_1 pontban:

$$H_1 = H'_1 + H''_1 = \frac{I_1}{2\pi \frac{d}{2}} + \frac{I_2}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{I_1 + I_2}{\pi d} = \frac{40}{20 \cdot 10^{-2} \cdot \pi}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}};$$

$$\underline{H_1 = 63{,}6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.}$$

P_2 pontban:

$$H_2 = H''_2 - H'_2 = \frac{I_2}{2\pi d} - \frac{I_1}{2\pi 2d} = \frac{2I_2 - I_1}{4\pi d} = \frac{20}{4\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}};$$

$$\underline{H_2 = 7{,}95\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.}$$

P_3 pontban (felhasználva a cosinustételt):

$$H_3 = \sqrt{H'^2_3 + H''^2_3 - 2H'_3H''_3 \cdot \cos 45^\circ};$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2\pi \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi \cdot \sqrt{2}\,d}\right)^2 - \frac{2I_1\,I_2}{4\pi^2 \cdot \sqrt{2}\,d^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{20}{2\pi\cdot 20\cdot 10^{-2}}\right)^2+\left(\frac{20}{2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 20\cdot 10^{-2}}\right)^2-\frac{2\cdot 20\cdot 20\cdot\sqrt{2}}{4\pi^2\cdot\sqrt{2}\cdot 20^2\cdot 10^{-4}\cdot 2}}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}},$$

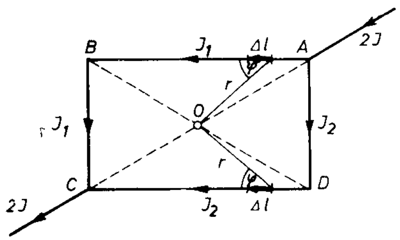
$$H_3 = 11{,}25\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

P_4 pontban:

$$H_4 = H'_4 = H''_4 = \frac{I_1}{2\pi d} = \frac{20}{2\pi\cdot 20\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}\ \mathrm{A} = 15{,}91\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}};$$

$$H_4 = 15{,}91\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

20.15. A téglalap alakú vezetőkeret ABC ágának ellenállása egyenlő az ADB ág ellenállásával, ezért a két ágban folyó áramerősségek is egyenlők;



$$I_1 = I_2 = I.$$

Válasszunk az ABC ágban egy tetszőleges Δl áramelemet. Ez az O pontban a *20.12.* feladat megoldásának megjegyzése alatt megbeszélt Biot–Savart-törvény szerint:

$$\Delta H_1 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r_2}$$

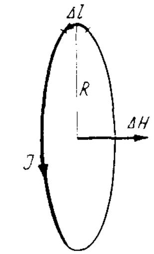
nagyságú térerősséget létesít, amelynek iránya a rajz síkjából kifelé mutató merőleges. Az ADC ágban az ábra szerint szimmetrikusan választott Δl áramelem térerőssége O-ban:

$$\Delta H_2 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin\varphi}{r^2} = \Delta H_1$$

nagyságú térerősséget hoz létre, amelynek iránya az előbbi térerősséggel ellentétes, így ezen két áramelem térerőssége O-ban nulla. Az egyes áramelemek hatását O-ban így páronként kiszámítva, minden lépésben nullát kapunk, tehát az eredő térerősség is nulla a téglalap középpontjában. $H = 0$.

20.16. A tankönyvben közölt képlet szerint egy körvezető centrumában a mágneses térerősség:

$$H = \frac{I}{2R}.$$



Feladatunkban $I = 0{,}5$ A; $R = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ m; tehát:

$$H = \frac{0{,}5}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 16{,}7\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}};$$

$$H = 16{,}7\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Megjegyzés:
A felhasznált képlet helyessége a Biot–Savart-törvény (lásd *20.12.* feladat megoldását) alapján igazolható. Tekintsük az ábrát. Bármely áramelem a centrumban a körvezető síkjára merőleges térerősségelemet létesít, melynek nagysága; (figyelembe véve, hogy Δl és R szöge 90°):

$$H = \frac{1}{4\pi}\,\frac{I\cdot\Delta l\cdot\sin 90^\circ}{R^2} = \frac{I}{4\pi R^2}\,\Delta l.$$

Összegezve az egyes áramelemek hatásait:

$$\Delta H = \sum\frac{I}{4\pi R^2}\Delta l = \frac{I}{4\pi R^2}\,\Sigma\Delta l.$$

Az áramelemek hosszainak összege éppen a kör kerülete, azaz: $\Sigma\,\Delta l = 2\pi R$. Ezért:

$$H = \frac{I}{4\pi R^2}\,2\pi R = \frac{I}{2R}\ \text{valóban.}$$

20.17. A mágneses tér nem változik meg. Bizonyára sokan úgy gondolták, hogy a forgatás hatására megváltozik a mágneses tér, mert megváltozik az áramot képviselő elektronok sebessége a nyugvó megfigyelőhöz képest, és így az áramerősség is. Ez igaz, de a forgatáskor a vezetőben levő pozitív töltések is mozognak a nyugvó megfigyelőhöz képest. Ezek mozgása az ellentétes töltés miatt ellentétes irányú áramot jelent. Az elektronok és a pozitív töltések sűrűsége a vezetőben egyenlő, és így a vezető mozgatásából származó ellentétes irányú áramok egyenlő nagyok, vagyis az összes áramváltozás nulla, a mágneses tér nem változik.

20.18. Hosszú egyenes tekercs belsejében a mágneses térerősség

$H = \frac{IN}{l}$; ahol I az áramerősség, N a tekercs menetének száma, l a tekercs hossza.

Feladatunkban: $I = 1$ A; $N = 300$; $l = 6\cdot 10^{-2}$ m Tehát:

$$H = \frac{1\cdot 300\ \text{A}}{6\cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 5000\,\frac{\text{A}}{\text{m}};$$

$$\underline{H = 5000\,\frac{\text{A}}{\text{m}}.}$$

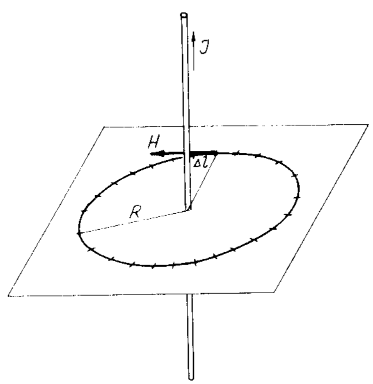
A mágneses indukció:

$$B = \mu_0\cdot H = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\,5000\,\frac{\text{A}}{\text{m}} = 6{,}28\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2};$$

$$B = 6{,}28\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}.$$

Megjegyzés:
A tekercs térerősségét is származtathatnánk a *20.12.* feladat megoldásában megtárgyalt Biot–Savart-törvényből. Ez csak viszonylag bonyolult matematikai számítással volna lehetséges. A Biot–Savart-törvényből kiindulva azonban eljuthatunk az áram és a mágneses tér kapcsolatának egy más alakjához, amely a Biot–Savart-törvénynél általánosabb érvényű.
Induljunk ki az egyenes vezető mágneses terére a Biot–Savart-törvényből nyert eredményünkből. Eszerint egy végtelen hosszú egyenes vezetőtől R távolságban levő pontban a mágneses térerősség:

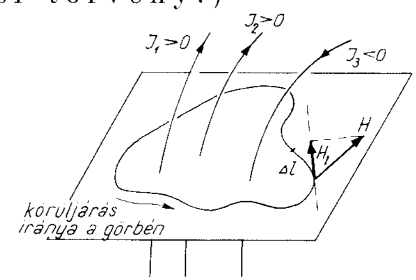
$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$



A végtelen hosszú egyenes vezetőt vegyük körül gondolatban az ábrán látható módon egy tetszés szerinti sugarú körrel. Osszuk be a kört Δl darabokra. Szorozzuk meg mindegyik darabot az abban a pontban található térerősséggel, és az így kapott szorzatokat adjuk össze:

$$\Sigma H\cdot\Delta l = \Sigma\frac{I}{2\pi R}\Delta l = \frac{I}{2\pi R}\Sigma\Delta l = \frac{I}{2\pi R}2\pi R = I;$$

$\Sigma H\cdot\Delta l = I.$
Ugyanezt kapnánk eredményül, ha az áramot egy tetszőleges görbével vennénk körül, és ezen tetszőleges görbe Δl darabjait a Δl helyén levő mágneses térerősség Δl irányú összetevőivel szoroznánk, és ezeket a szorzatokat összegeznénk a görbe mentén körbehaladva.
$\Sigma H_l\cdot\Delta l = I.$
Ha a tetszőlegesen felvett görbe az áramot nem veszi körül, akkor az összeg nulla.
Eredményünk akkor is igaz, ha a mágneses teret nem végtelen hosszú egyenes vezető gerjeszti. Tehát ha egy tetszés szerinti, áramok által átjárt térségben tetszés szerinti zárt vonalat veszünk képzeletben, akkor ezen zárt vonal mentén számított összeg egyenlő lesz a zárt vonalra kifeszített felületen áthaladó áramok algebrai összegével.
$\Sigma H_l\cdot\Delta l = \Sigma I.$ (G e r j e s z t é s i t ö r v é n y.)

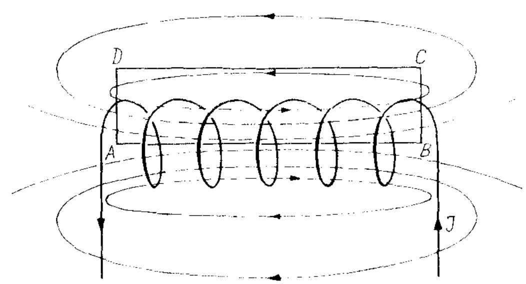


A ΣI képzésénél azokat az áramokat vesszük pozitív előjellel, amelyek a görbén való körülhaladás irányával úgy vannak összehangolva, mint a jobbmenetű csavar haladási iránya a forgás irányával. (Lásd az ábrát!)
Ez az előjelszabály nyilvánvaló, ha arra gondolunk, hogy az ellentétes irányú áramok ellentétes térerősséget hoznak létre.
A gerjesztési törvényből levezethető a tekercs mágneses térerőssége. Az ábrán feltüntetett N menetű tekercs esetén alkalmazzuk a gerjesztési törvényt az $A-B-C-D-A$ zárt vonalra

$$\sum_{ABCDA} H_l\cdot\Delta l = N\cdot I.$$

Ugyanis a tekercsben folyó áram N-szer megy át az $A\ B\ C\ D\ A$ zárt görbe által kifeszített felületen. A $\Sigma H_l\cdot\Delta l$ összeg négy részre bontható, mégpedig az $ABCDA$ téglalap négy oldalára számított összegre. Tehát:

$$\sum_{ABCDA} H_l\cdot\Delta l = \sum_{AB} H_l\cdot\Delta l + \sum_{BC} H_l\cdot\Delta l + \sum_{CD} H_l\cdot\Delta l + \sum_{DA} H_l\cdot\Delta l.$$



A jobb oldalon szereplő első összeg egyszerűen meghatározható, mert a tekercs belsejében a térerősség az egész vonal mentén állandó és az AB vonallal egyirányú ($H_l = H$), tehát:

$$\sum_{AB} H_l \cdot \Delta l = \sum_{AB} H \cdot \Delta l = H \sum_{AB} \Delta l = Hl. \text{ (} l \text{ a tekercs hossza.)}$$

Amint a tekercs belsejéből kilépünk, a mágneses térerősség elhanyagolhatóan kicsi lesz, ezért a jobb oldali összeg három utolsó tagját nullának vesszük. Ezek szerint:

$$Hl = NI;$$

$$H = \frac{NI}{l}.$$

20.19. A tekercsnél követett gondolatmenet szerint a gerjesztési törvényből határozhatjuk meg a toroid belsejében is a térerősséget. Az indukcióvonalak menete az ábrán látható. Írjuk fel a gerjesztési törvényt az R_k sugarú középkör mentén végrehajtva a $H_l \cdot \Delta l$ szorzatok összegzését.

$$\Sigma H_l \cdot \Delta l = NI; \; \Sigma H_l \cdot \Delta l = H \Sigma \Delta l = H\, 2\pi R_k;$$

$$H \cdot 2\pi \cdot R_k = NI;$$

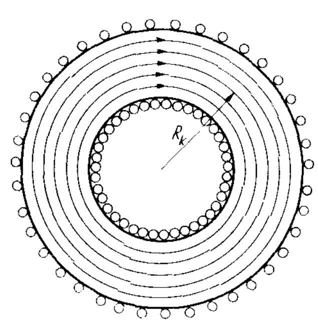
$$H = \frac{NI}{2R_k\pi}.$$

a) A mágneses indukció:

$$B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \frac{N \cdot I}{2R_k \cdot \pi};$$

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \; \frac{1 \cdot 15\,00}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot \pi} \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

$$\underline{B = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}.}$$



A toroid keresztmetszetére vonatkozó fluxus, a keresztmetszeten áthaladó indukcióvonalak száma:

$$\Phi = BA = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} 4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{Vs};$$

$$\underline{\Phi = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{Vs}.}$$

b) A toroidot lágyvassal kitöltve, a mágneses tér indukciója μ_r-szer nagyobb lesz, mint levegő (vákuum) esetében, ha μ_r a lágyvas relatív permeabilitása.
Ennek megfelelően:

$$B = \mu_r \left(\mu_0 \frac{I \cdot N}{2R_k \cdot \pi} \right) = 200 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 0{,}6 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2};$$

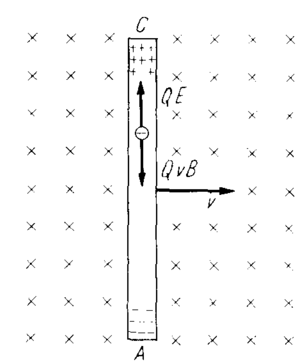
$$\underline{B = 0{,}6 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}.}$$

A megváltozott B-nek megfelelő fluxus:

$$\Phi = B \cdot A = 0{,}6 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{Vs};$$

$$\underline{\Phi = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Vs}.}$$

20.20. *a)* Az ábrán látható AC vezető a feladat feltételeinek megfelelően mozog. A vezetővel együtt mozognak a vezetőben levő töltések is, ezért rájuk hat a Lorentz-erő (mágneses térben mozgó töltésre ható erő). Iránya a vezető hosszával párhuzamos. Mégpedig a pozitív töltésekre ható erő A-tól C felé irányul, a negatív töltésekre ezzel ellentétes erő hat. (Lásd a *20.3.* feladat megoldásában leírt jobbkézszabályt!) A fellépő Lorentz-erő hatására a vezető elektronjai a mozgás kezdetén C-től A felé áramlanak, de csak addig, amíg az áramlás miatt a végeken létrejövő töltéstorlódás révén keletkező, C-től A felé irányuló térerősség a töltések mozgását megszünteti. Ekkor a vezetőben levő elektronra ható két erő (Lorentz-erő és az elektromos tér okozta erő) éppen egyenlő és ellentétes irányú:



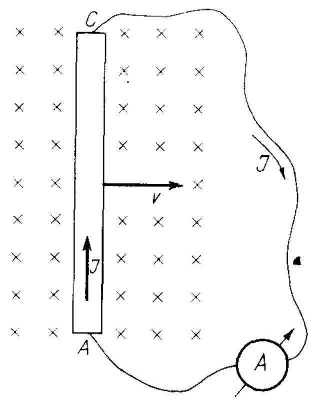
$QE = QvB$;

és ebből a vezetőben keletkező elektromos térerősség:

$E = vB$; melynek iránya C-től A felé mutat.

b) A mozgás hatására a vezetőben létrejövő elektromos tér homogén, hiszen az előbbi kifejezés független a helytől. Így a végpontok között fellépő **indukált feszültség** a feszültség értelmezése szerint

$U = El = vBl.$



A mozgó vezetőben tehát a kezdőpillanattól eltekintve nem folyik áram, de a vezető úgy viselkedik, mint áramforrás, mert ha két végét vezetővel összekötjük, akkor abban C-től A felé, magában a mozgó vezetőben pedig A-tól C felé irányuló áram folyik a Lorentz-erő hatására.

Vizsgáljuk meg azt az erőt, amelyet a mágneses tér az indukált árammal átfolyt AC vezetőre kifejt. Ez az erő $F = IlB$ nagyságú és a jobbkéz-szabálynak megfelelően a sebességgel ellentétes irányú. Ez az erő akadályozza a vezető mozgatását. Az indukált áram akadályozza az őt létrehozó hatást. Ez az indukált áram irányára vonatkozó szabály **Lenz törvénye**.

Lenz törvénye tehát kimondja, hogy **az indukált áram iránya olyan, hogy akadályozza az indukciót okozó állapotváltozást.**

20.21. *a)* A *20.20.* feladat megoldásában láttuk, hogy a mozgási indukció a jelen feladatban leírt feltételek mellett:

$U = vBl$ feszültséget létesít. A vezető sebessége állandó, így az indukált feszültség is.

$$U = vBl = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} = 10^{-2}\,\mathrm{V};$$

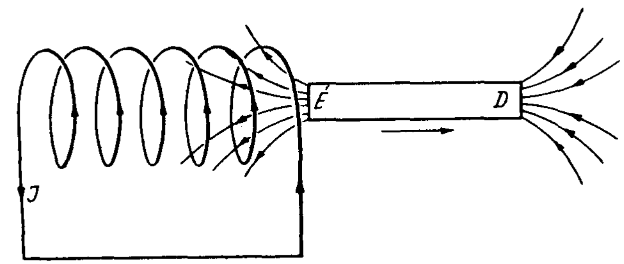
$U = 10^{-2}$ V.

b) A sebesség változik, tehát U is változó lesz.

$$U = vBl = Blat = 10^{-2}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,t = 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}\,t;$$

$$U = 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}\,t.$$

20.22. A mágnesrúd mozgatásakor a tekercsben feszültség indukálódik, mert a belsejében haladó erővonalak száma, a fluxus változik. Lenz törvénye értelmében az indukált feszültség hatására keletkező indukált áram iránya minden esetben olyan lesz, hogy saját mágneses terével akadályozza a mágnesrúd mozgása miatti fluxusváltozást. Ennek megfelelően az egyes esetekben a következő a helyzet:



a) A tekercsben a mágnesrúd indukcióvonalai jobbról balra irányulnak. A mágnesrúd kihúzásakor ezeknek a száma csökken, a tekercsben folyó indukált áram által gerjesztett mágneses tér ezt a csökkenést gátolja úgy, hogy mágneses terének B vonalai mint a mágnesrúd B vonalai jobbról balra haladnak. Ennek megfelelően a tekercs meneteinek az olvasó felé eső részében alulról felfelé folyik az áram.

Hasonló megfontolással kapjuk az áram irányát a másik két esetben is:

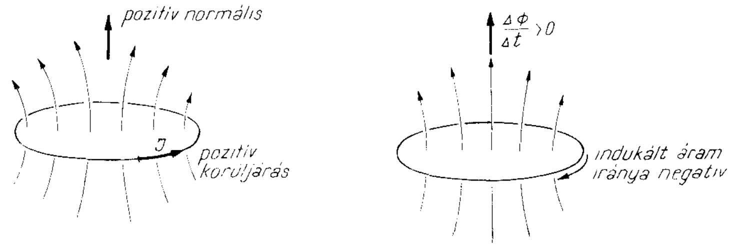
b) az áram iránya az *a)* esetbeni áram irányával megegyező;

c) az áram iránya az *a)* esetbeni áram irányával ellentétes.

20.23. Ha egy vezető által körülhurkolt területen a fluxus (az áthaladó mágneses indukcióvonalak száma) időben megváltozik, akkor a vezetőkben indukált feszültség, és ha a vezeték zárt, indukált áram keletkezik. Az indukált feszültség nagysága egyenlő az időegységre jutó fluxusváltozással, a fluxusváltozás sebességével:

$$|U| = \left|\lim \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|;$$

tehát az indukált feszültség nagysága egyenlő a fluxus idő szerinti differenciálhányadosának abszolút értékével. A differenciálhányados előjele kapcsolatba hozható az indukált feszültség irányával a következő gondolatmenet alapján.



Az ábrán látható vezetőkörben folyó áram iránya és az általa létesített mágneses tér indukcióvonalainak iránya a vezetőkör síkjában úgy van összehangolva, mint a jobbmenetű csavar csavarási iránya a haladás irányával. Az ilyen módon egymáshoz rendelt normális és körüljárási irányt tekintsük pozitívnak. Helyezzük a vezetőkört mágneses térbe. (A vezetőben most nem folyik áram.) Ha a tér indukciója növekedni kezd, a fluxus is növekszik, és a vezetőkörben az előbbi árammal ellentétes irányú áram indukálódik. (Az indukált áram saját mágneses tere így akadályozza a fluxusnövekedést. Lenz törvénye.) Előjel-megállapodásunk szerint ez az áram irány és az őt létesítő indukált feszültség iránya is negatív. ($\Delta\Phi > 0$; $U < 0$.) A fluxusváltozás és az indukált feszültség ellentétes előjelű, vagyis az előbbi előjel-megállapodást figyelembe véve, az indukált feszültség nagyságát és irányát a következő kifejezés adja:

$$U = -\lim \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Feladatunkban a

$0 \leq t < 0{,}25$

s időközben

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0{,}4\,\mathrm{Vs}}{0{,}25\,\mathrm{s}};$$

$\underline{U = -1{,}6\ \mathrm{V}.}$

$0{,}25\ \mathrm{s} \leq t < 0{,}75$ s időközben

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0$$

$\underline{U = 0.}$

$0{,}75\ \mathrm{s} \leq t < 1{,}25$ s időközben

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t};$$

$$U = -\frac{-0{,}8\ \mathrm{Vs}}{0{,}5\mathrm{s}} = 1{,}6\ \mathrm{V};$$

$\underline{U = 1{,}6\ \mathrm{V}.}$

$1{,}25\ \mathrm{s} \leq t \leq 1{,}75$ s időközben

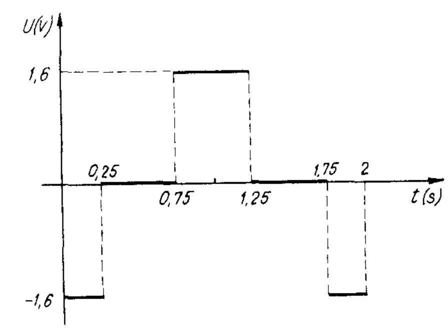
$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0.$$

$\underline{U = 0.}$

$1{,}75\ s \leq t \leq s$ időközben

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t};$$

$U = -\frac{0{,}4\mathrm{Vs}}{0{,}25\mathrm{s}} = -1{,}6\ \mathrm{V}$; $\underline{U = -1{,}6\ \mathrm{V}.}$

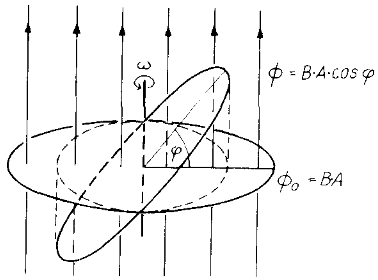


0.24. Amikor az A területű gyűrű síkja merőleges az indukcióvonalakra, a fluxus:
$\Phi_0 = BA.$
φ szöggel elforgatva a gyűrűt, a rajta áthaladó indukcióvonalak száma egyenlő a merőleges vetületén (a 256. oldal ábráján szaggatott vonal) áthaladó fluxussal.
$\Phi = B\,(A \cdot \cos\varphi).$

$A\cdot\cos\varphi$ a vetület területe. A forgatás szögsebessége:
$\omega = 2\pi\cdot f$. Ezért $\varphi = 2\pi\cdot f\cdot t$; és így a fluxus mint az idő függvénye:
$\Phi = BA\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)$.
Az indukált feszültség:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt};$$

$$U = BA\cdot 2\pi\cdot f\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t).$$



Az indukált feszültség legnagyobb értékét akkor veszi fel, amikor: $\sin(2\pi\cdot f\cdot t) = 1$;
vagyis amikor:

$$2\pi\cdot f\cdot t = \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi \quad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots.)$$

$$t = \frac{1}{4f} + \frac{k}{f} = \frac{T}{4} + kT;$$

vagyis a merőleges helyeken való áthaladás után először $\frac{T}{4}$ idő múlva, amikor a gyűrű síkja párhuzamos a B vonalakkal, ezután T időnként.
Az indukált feszültség legnagyobb értéke:
$U_{max} = BA\cdot 2\pi\cdot f$.
Az indukált feszültség hatására gyűrűben:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{BA\cdot 2\pi\cdot f}{R}\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)$$

áram folyik, amelynek legnagyobb értéke:

$$I_{max} = \frac{BA\cdot 2\pi\cdot f}{R} = \frac{0{,}2\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\cdot 5^2\pi\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2\cdot 2\pi\cdot 50\ \mathrm{s}^{-1}}{10^{-1}\ \mathrm{ohm}} = 4{,}9\ \mathrm{A};$$

$\underline{I_{max} = 4{,}9\ \mathrm{A}.}$

20.25. Tudjuk, hogy ha a tekercs belsejében bármilyen okból változik a fluxus, akkor abban az indukciótörvény értelmében feszültség indukálódik. Ha változik a tekercs árama, akkor változik a mágneses fluxus is. Ez a fluxusváltozás természetesen szintén feszültséget indukál a tekercsben, mégpedig olyan irányút, amely az őt létrehozó áram változását csökkenteni akarja. Végeredményben ha az áram nő, ezt az áramnövekedést, ha az áram csökken, a csökkenést igyekszik lassítani. Az indukált feszültség irányának az őt létrehozó áramváltozás irányával való összefüggése Lenz törvényének speciális esete.
Minthogy a tekercs fluxusa arányos a mágneses indukcióval, az viszont arányos a tekercsben folyó áramerősséggel, az indukált feszültség arányos lesz az áramerősség-változással. Ha a tekercs meneteinek száma N, és egy menet fluxusa Φ;

$$U = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Az L arányossági tényezőt a tekercs önindukciós együtthatójának vagy induktívitásának nevezzük.
Esetünkben:

$U = 0{,}12\ \mathrm{V}$; $\Delta t = 0{,}5\ \mathrm{s}$; $\Delta I = 0 - 0{,}5\ \mathrm{A} = -0{,}5\ \mathrm{A}$.

$$L = -\frac{U}{\frac{\Delta I}{\Delta t}} = \frac{0{,}12\ \mathrm{Vs}}{\frac{0{,}5\ \mathrm{A}}{0{,}5}} = 0{,}12\ \mathrm{henry} = 0{,}12\ \mathrm{H};$$

$\underline{L = 0{,}12\ \mathrm{H}.}$

A valóságban az áram nem egyenletesen csökken, és így az indukált feszültség nem állandó.

20.26. Amikor a rézgyűrű farúdra fűződik fel, szabadon esik, ha a légellenállástól eltekinthetünk. Mágnesrúdra való felfűződés esetén azonban a rézvezető inhomogén mágneses térben mozog, ezért a Lorentz-erő hatására a fémben töltéstorlódás jön létre, amely nem állandó. A változó töltéstorlódás hatására ö r v é n y á r a m o k jönnek létre.
Ezen örvényáramok iránya Lenz törvénye szerint olyan, hogy gátolják az őket létrehozó hatást, jelen esetben a rézgyűrű esését. A mágnesrúd tere tehát olyan erővel hat az örvényáramokra, amely az esést gátolja. A rézgyűrű mágnesrúdon nem szabadon esik, a gyorsulása, és így minden pillanatban a sebessége is kisebb, mint a farúdra való felfűződésnél.

20.27. $\underline{I = \frac{20}{3}\ \mathrm{A}.}$

20.28. I párhuzamos legyen B-vel.

20.29. Nem (v és B párhuzamos).

20.30. $x = \dfrac{d}{n+1}$.

20.31. *a)* A rajz síkjára merőlegesen befelé mutat;

b) a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutat.

20.32. $H = 0$.

20.33. $\dfrac{H_2}{H_1} = 4$.

20.34. *a)* $H = \sqrt{\left(\dfrac{I}{2R}\right)^2 + \left(\dfrac{I}{2\pi \cdot R}\right)^2} = 262{,}3\,\dfrac{\text{A}}{\text{m}}$;

b) $H = \dfrac{I}{2R} - \dfrac{I}{2\pi R} = 170{,}4\,\dfrac{\text{A}}{\text{m}}$.

20.35. $\Phi = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ Vs.

20.36. $H = 8971\,\dfrac{\text{A}}{\text{m}}$.

20.37. $I_t = 0{,}1$ A.

20.38. $F = 0{,}25$ N.

20.39. A transzformátor vasmagjának lemezei közé helyezett vékony szigetelőréteg nem engedi, hogy számottevő örvényáramok jöjjenek létre, amelyek energiaveszteséget okoznának.

20.40. $U = 3{,}14 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(6{,}28\,t)$ [V].

20.41. $U = 50$ mV.

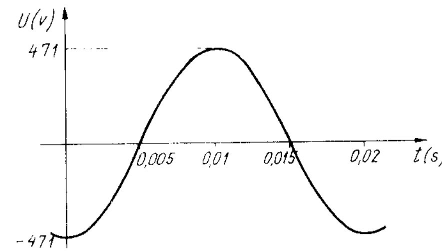
20.42. *a)* $U = 2{,}51$ V;

b) $U = 2{,}15$ V;

c) $U = 1{,}26$ V;

d) $U = 0$.

20.13.



20.14. A légrésben a B állandó és sugárirányú, vagyis a tekercs minden helyzetében merőleges a tekercs huzalának a henger palástjára simuló szakaszára. Egy ilyen vezetőszakaszra ható erő nagysága:

$F_1 = I \cdot l \cdot B$;

és iránya a jobbkéz-szabálynak megfelelően a sugárra merőleges. A henger egyik oldalán N ilyen szakasz húzódik (N menetű a tekercs), és így az ezekre ható erők összege:

$F = N \cdot I \cdot l \cdot B$.

Ezen erőnek a henger forgástengelyére vonatkozó forgatónyomatéka, ha a henger sugara r:

$M = N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot r$.

A henger túlsó oldalán húzódó vezető szakaszokra ható erők forgatónyomatéka ugyanekkora, és a hengert ugyanabban az irányban igyekszik forgatni, így az áram okozta teljes forgatónyomaték:

$M_I = 2N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot r = NI \cdot B \cdot A$;

$A = 2r \cdot l$ a tekercs által körülzárt terület.

Az áram által okozott forgatónyomaték egyenesen arányos az I áramerősséggel. Ezt a nyomatékot a spirálrugó nyomatéka egyensúlyozza ki, amely arányos a tekercs elfordulásának szögével. ($M_r = D \cdot \alpha$.)

Egyensúlyi állapotban a forgatónyomatékok egyenlő nagyságúak;

$M_I = M_r$;

$N \cdot I \cdot B \cdot A = D \cdot \alpha$;

$I = \dfrac{D}{N \cdot B \cdot A}\,\alpha = \text{állandó}\ \alpha$;

tehát az áramerősség egyenesen arányos a szögelfordulással. Ezen függvény alapján készült skálán a mutatóállás leolvasásával közvetlenül az áramerősség határozható meg. Feladatunkban:

$N = 300$; $B = 0{,}25\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$; $A = 4\ \mathrm{cm}^2 = 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$; és a legnagyobb α-hoz tartozó forgatónyomaték $M_{r,\,max} = 3\cdot 10^{-5}$ Nm.

Az egyensúly feltétele

$$M_{I\max} = M_{r,\,max};$$

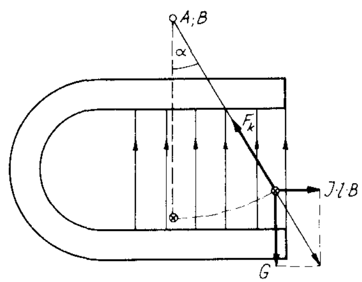
$$N\cdot I_{max} BA = M_{r,\,max};$$

$$I_{max} = \frac{M_{r,\,max}}{N\cdot B\cdot A} = \frac{3\cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nm}}{300\cdot 0{,}25\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\cdot 4\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 10^{-3}\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{mA};$$

$$\underline{I_{max} = 1\ \mathrm{mA}.}$$

Vagyis a feladatban leírt műszer méréshatára 1 mA.

20.45. Az ábra az elrendezést oldalnézetben mutatja. A CD egyenesvezetőre három erő hat, mégpedig a:
$G = 0{,}1$ N (a súlyerő);
$I\cdot l\cdot B$ (az áram okozta erő);
F_k (a felfüggesztő huzalok kényszererőinek összege).
Egyensúly van, tehát az erők eredője nulla, vagyis a G és $I\cdot l\cdot B$ erők eredője a felfüggesztő fonalak irányába mutat, ezért:



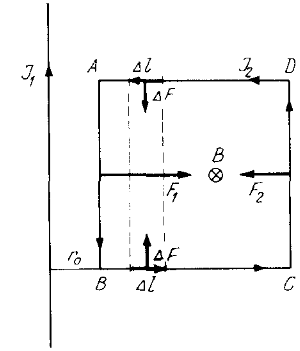
$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{I\cdot l\cdot B}{G} = \frac{2\mathrm{A}\cdot 0{,}2\ \mathrm{m}\cdot 0{,}25\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}{0{,}1\ \mathrm{N}} = 1; \qquad \alpha = 45°;$$

$$\underline{\alpha = 45°.}$$

20.46. A négyzet alakú vezetőkeret az I_1 erősségű áram által gerjesztett mágneses térben van, és így rá erő hat. Az erő meghatározásához ismernünk kell a mágneses tér indukcióját a keret különböző helyein. Az indukcióvektor az I_1 áramtól jobbra fekvő pontok-

ban a rajz síkjára merőleges, és befelé mutat. Az egyes vezetőtől r távolságban az indukció nagysága:

$$B = \mu_0\,\frac{I_1}{2\pi\cdot r}.$$



Ezt felhasználva kiszámítjuk a B értékét a négyzet különböző pontjaiban.

Az AB oldal mentén:

$$B_1 = \mu_0\,\frac{I_1}{2\pi r_0};$$

a DC oldal mentén:

$$B_2 = \mu_0\,\frac{I_1}{2\pi\,(r_0 + a)};$$

az AD és BC oldal mentén változik a B_1 az I_1 áramtól való r távolság függvényében:

$$B = \mu_0\,\frac{I_1}{2\pi r}.$$

Az indukció ismeretében kiszámíthatjuk az egyes oldalakra ható erőket.

Az AB oldalra:

$$F_1 = I_2\cdot a\ B_1 = \mu_0\frac{I_1\cdot I_2\cdot a}{2\pi\cdot r_0};$$

a DC oldalra:

$$F_2 = I_2\cdot a\ B_2 = \mu_0\frac{I_1\cdot I_2\cdot a}{2\pi\,(r_0 + a)};$$

az AD oldal r távolságban levő áramelemére:

$$\Delta F = I_2 \Delta l\cdot\mu_0\,\frac{I_1}{2\pi\cdot r};$$

az AD oldalra ezen párhuzamos és egyenirányú erők összege:

$$F_3 = \Sigma\Delta F = \sum I_2\cdot\Delta l\cdot\mu_0\,\frac{I_1}{2\pi r}.$$

A BC oldalra ható F_4 erő egyenlő nagyságú F_3-mal, de ellentétes irányú, mert ebben az oldalban ellentétes irányú áram folyik.

A négyzetet merevnek tekintve, az egyes oldalakra ható erőket mint merev testre ható erőket összegezhetjük.

Az I_1 árammal párhuzamos irányú erők összege:

$$F_{\parallel} = F_3 + F_4 = F_3 - F_3 = 0.$$

Az áramra merőleges erők összege:

$$F_{\perp} = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{(r_0 + a)}\right);$$

És végül a keretre ható eredő erő:

$$F = F_{\perp} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{(r_0 + a)}\right);$$

amely a példa adataival:

$$\underline{F = 8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}.}$$

Az I_1 áram tehát $8 \cdot 10^{-5}$ N erővel taszítja az I_2 áramú vezetőkeretet. Ugyanekkora erővel taszítja a keret az egyenes vezetőt.

20.47. A vezetőkeret normálisa most merőleges a mágneses mező indukcióvektorára. Így a keretre ható forgatónyomaték:

$$M = IAB.$$

A keret fluxusa:

$$\Phi = BA.$$

Ezt a nyomaték kifejezésébe helyettesítve:

$$M = I\Phi = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Vs} \cdot 0{,}4\ \mathrm{A} = 12{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nm};$$

$$\underline{M = 12{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nm}}$$

20.48. Az N menetű, l hosszúságú üres tekercsben a mágneses indukció ha I az áramerősség:

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}.$$

Ebből a hosszegységre jutó menetek száma:

$$\frac{N}{l} = \frac{B}{\mu_0 I} = \frac{3 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 6\ \mathrm{A}} \approx 4000\ \frac{1}{\mathrm{m}} = 40\ \frac{1}{\mathrm{cm}};$$

tehát az előírt B akkor jöhet létre, ha centiméterenként legalább 40 menet helyezkedik el. A huzal vastagsága (1 mm) miatt 1 cm-re csak 10 menet tekercselhető. A szükséges menetszám úgy biztosítható, ha egymás fölé <u>4 réteget</u> helyezünk el.

20.49. A *20. 16.* feladat megoldásában a Biot–Savart-törvény alapján kiszámítottuk az árammal átfolyt körvezető mágneses mezejének térerősségét a kör középpontjában. A számolásból kitűnik, hogy a kör egyenlő hosszú ívei egyenlő mértékben járulnak hozzá a tényleges térerősséghez. Tehát ha a térerősség:

$$H = \frac{I}{2R};$$

akkor egy negyedkör járuléka ehhez:

$$\frac{H}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{I}{2R}.$$

Így a feladatbeli, I_1 áramerősségű háromnegyed kör által a középpontban létesített térerősség:

$$H_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{2R};$$

amelynek iránya a rajz síkjába befelé mutató merőleges. Az I_2 áramú negyedkör járuléka H_1 irányával ellentétes és:

$$H_2 = \frac{1}{4}\frac{I_2}{2R}.$$

Az eredő térerősség:

$$H = H_1 - H_2 = \frac{1}{8R}(3\,I_1 - I_2).$$

A kérdezett indukció:

$$B = \mu_0 \cdot H = \frac{\mu_0}{8R}(3I_1 - I_2).$$

I_1 és I_2 áramerősségeket az egyes ágak ellenállásai határozzák meg. Jelölje R_2 az I_2 áramú ág ellenállását. A $2d$ átmérőjű negyedkörív ellenállása $\frac{R_2}{4}$; mivel a keresztmetszetének területe négyszerese a d vastagságú huzalénak. Ezek szerint az I_1 áramú ág ellenállása:

$$R_1 = \frac{R_2}{4} + \frac{R_2}{4} + R_2 = \frac{3}{2} R_2.$$

Írjuk fel a Kirchhoff-törvényeket!

$$I_1 \frac{3}{2} R_2 - I_2 \cdot R_2 = 0;$$

$$I_1 + I_2 = I.$$

Ezekből $I_1 = \frac{2}{5} I; \quad I_2 = \frac{3}{5} I;$

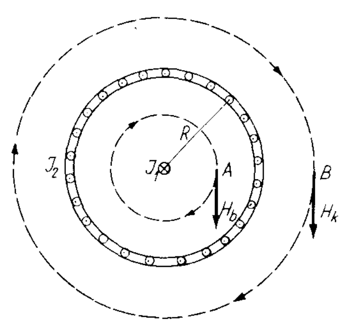
tehát az indukció értéke a kör középpontjában:

$$B = \frac{\mu_0}{8R}\left(3\,\frac{2}{5}I - \frac{3}{5}I\right) = \frac{\mu_0}{8R}\,\frac{3}{5}\,I = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}}{8\cdot 3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}\cdot\frac{3}{5}\cdot 15\,\mathrm{A};$$

$B = 4{,}7\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$; iránya a rajz síkjára befelé mutató merőleges.

Az egyenes vezetőknek nincs hatásuk a kör középpontjában.

20.50. Az ábrán a feladatbeli elrendezés felülnézetben látható. Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy a mágneses térerősség értéke a középvonaltól mért bármelyik r sugarú körvonal mentén állandó, és az erővonalak koncentrikus körök (az ábrán egy belső (A) és egy külső (B) ponton áthaladó erővonalat rajzoltunk meg). Alkalmazzuk a gerjesztési törvényt (lásd *20.18.* feladat megoldását) az A, illetve a B ponton áthaladó körre.



$\Sigma H_b\cdot \Delta l = I_1;$ $\qquad$ $\Sigma H_k\cdot \Delta l = I_1 - I_2;$

$H_b\cdot \Sigma\Delta l = I_1;$ $\qquad$ $H_k\cdot \Sigma\Delta l = I_1 - I_2;$

$H_b\cdot 2r\pi = I_1; \quad (r<R)$ $\qquad$ $H_k\cdot 2r\pi = I_1 - I_2; \quad (r\geq R)$

$$H_b = \frac{I_1}{2\pi r}; \qquad H_k = \frac{I_1 - I_2}{2\pi r};$$

$$B_b = \mu_0\,\frac{I_1}{2\pi r}; \qquad B_k = \mu_0\,\frac{I_1 - I_2}{2\pi r};$$

Így a példabeli kérdésekre a válasz:

a) $r = 5$ cm $> R = 1$ cm.

$$B_k = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,\frac{3\,\mathrm{A} - 2\,\mathrm{A}}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}};$$

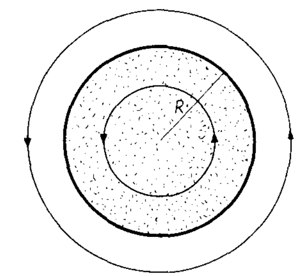
$$B_k = 4\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}.$$

b) $r = 0{,}5$ cm $< R = 1$ cm.

$$B_b = 4\cdot\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,\frac{3\mathrm{A}}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}};$$

$$B_b = 1{,}2\cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}.$$

20.51. A mágneses tér erővonalai koncentrikus körök. Alkalmazzuk a gerjesztési törvényt (lásd *20.18.* feladat megoldását) az ábrán látható körökre.



A hengeres vezető belsejében az $r\leq R$ esetben az r sugarú kör nem a teljes I áramot fogja körül, hanem annak csak egy részét.

Az egységnyi felületen áthaladó áram, az áramsűrűség:

$$j = \frac{I}{R^2\cdot\pi}.$$

Így az r sugarú körön belül folyó áram:

$$I_r = j\cdot r^2\cdot\pi = \frac{I}{R^2\pi}\,r^2\pi = I\,\frac{r^2}{R^2}.$$

Ezért a gerjesztési törvény az r sugarú körre:

$$\Sigma H\cdot\Delta l = I\,\frac{r^2}{R^2};$$

$$H\,\Sigma\,\Delta l = I\,\frac{r^2}{R^2};$$

$$H\cdot 2r\pi = I\,\frac{r^2}{R^2};$$

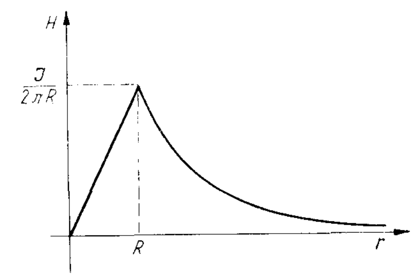
$$H = \frac{I}{2\pi R^2}\,r. \qquad (r \leqq R)$$

Azt látjuk tehát, hogy a mágneses térerősség a vezető belsejében lineárisan nő a vezető felületéig. A vezetőn kívüli körre $(r > R)$ alkalmazva a gerjesztési törvényt:

$$\Sigma H\,\Delta l = I;$$

$$H\cdot 2r\cdot\pi = I;$$

$$H = \frac{I}{2\pi}\,\frac{1}{r}; \quad (r > R)$$



vagyis azt kapjuk, hogy ebben a térségben a térerősség hiperbolikusan csökken a vezető felületén felvett maximális értékről a végtelenben felvett nulla értékig. A $H(r)$ függvény menete a diagramon látható.

20.52. Az a hosszúságú, rövidre záró vezetőben a mozgási indukció törvénye szerint: $U = B\cdot a\cdot v$ feszültség indukálódik. Ez a mozgó vezető úgy viselkedik, mint egy belső ellenállás nélküli U feszültségű telep. Ezen telep sarkaira van párhuzamosan kapcsolva R_1 és R_2 nagyságú ellenállás, amelyeknek eredője:

$$R = \frac{R_1\cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Így az árammérőn átfolyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{B\cdot a\cdot v}{\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1 + R_2}};$$

$$\underline{I = \frac{B\,a\,v\,(R_1 + R_2)}{R_1\cdot R_2}.}$$

20.53. Jelölje Φ a tekercs egy menetére vonatkozó fluxust. Mivel a tekercs belsejében a mágneses térerősség ha benne I erősségű áram folyik:

$$H = \frac{N\,I}{l}.$$

A Φ fluxus:

$$\Phi = BA = \mu_0\,\mu_r\,HA = \mu_0\,\mu_r\,\frac{N\,I}{l}\,A.$$

A fluxus megváltozása:

$$\Delta\Phi = \Delta\left(\mu_0\mu_r\,\frac{NI}{l}\,A\right).$$

Ebben a kifejezésben:

$$\mu_0\,\mu_r\,\frac{NA}{l} = \text{állandó};$$

ezért:

$$\Delta\Phi = \mu_0\,\mu_r\,\frac{NA}{l}\cdot\Delta I.$$

A tekercsben keletkező önindukciós feszültség:

$$U = -N\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\mu_0\,\mu_r\,\frac{NA}{l}\,\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\mu_0\,\mu_r\,\frac{N^2\cdot A}{l}\,\frac{\Delta I}{\Delta t};$$

$$U = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Az $\underline{L = \mu_0\,\mu_r\,\dfrac{N^2 A}{l}}$ arányossági tényező csak a tekercs geometriai adataitól és a tekercsben levő anyagtól függ. Ez az arányossági tényező az önindukciós együttható.

20.54. A belső tekercsben folyó I_1 áram a tekercsen belül:

$H = \dfrac{N_1\,I_1}{l}$ mágneses térerősséget, illetve:

$B = \mu_0\,\dfrac{N_1 I_1}{l}$ indukció erősséget létesít.

A külső tekercs egy menetére jutó fluxus ebben a térben:

$$\Phi_2 = BA = \mu_0 A \frac{N_1 I_1}{l}.$$

Ezen fluxus megváltozása:

$$\Delta\Phi_2 = \Delta\left(\mu_0 A \frac{N_1 I_1}{l}\right) = \mu_0 \frac{A N_1}{l} \Delta I_1;$$

mivel itt csak az I_1 áramerősség változó.

A külső tekercsben indukált feszültség:

$$U = -N_2 \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

a) Az indukált feszültség nagysága:

$$|U| = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \left|\frac{\Delta I_1}{\Delta t}\right| = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{300 \cdot 200 \cdot 8 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{20 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} \frac{5\text{A}}{0{,}1\text{s}};$$

$\underline{U = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{V}.}$

b) Az U kifejezésében szereplő:

$$L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

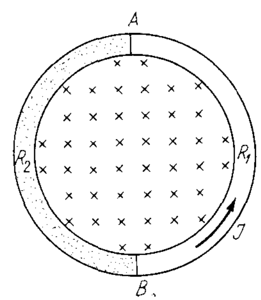
arányossági tényező az adott elrendezés kölcsönös indukció együtthatója. Értéke csak a tekercsek geometriai adataitól és közeg permeabilitásától függ.

$$L_{12} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{300 \cdot 200 \cdot 8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{20 \cdot 10^{-2}\ \text{m}};$$

$$L_{12} \approx 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{henry} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{H};$$

$\underline{L_{12} \approx 3 \cdot 10^{-4}\ \text{H}.}$

20.55. Növekedjék az ábra szerint a rajz síkjába befelé mutató indukcióvonalak száma. A gyűrűben:



$$|U| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 4\ \text{V}$$

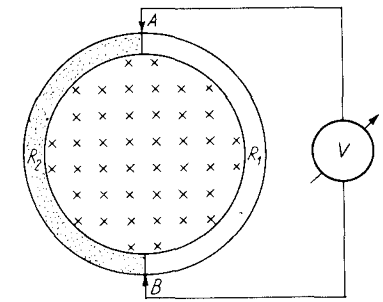
nagyságú feszültség indukálódik, melynek hatására:

$$I = \frac{|U|}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2} \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$$

nagyságú áram folyik az ábrán megjelölt irányban Lenz törvényének megfelelően.

a) Kapcsoljuk a feszültségmérőt a második ábrán látható módon az A; B pontokra.

A feszültséget két módon számíthatjuk ki.



1. A feszültségmérő körét az R_1 ellenállású félgyűrűvel zárjuk. Ekkor az A; B pontok közötti feszültség az R_1 ellenálláson levő ohmos feszültséggel egyenlő;

$$U_1 = I R_1 = |U| \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

2. A feszültségmérő körét az R_2 ellenállású félgyűrűvel zárjuk. Ekkor a feszültségmérő köre közrefogja ugyanazt a változó fluxust, mint a gyűrű, és így a zárt körben a változó fluxus okozta indukált feszültség és az R_2 ellenállás ohmos feszültségének a különbsége hat:

$$U_1 = |U| - I R_2 = |U| - |U| \frac{R_2}{R_1 + R_2} = |U| \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

$$U_1 = |U| \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \qquad \text{(Mint az 1. esetben.)}$$

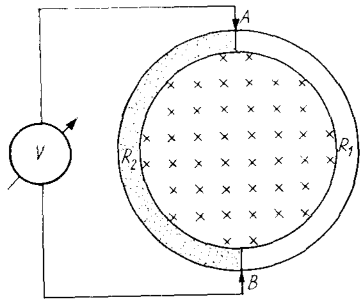
Ezek szerint:

ha a feszültségmérő a gyűrű jobb oldalán van:

$$U_1 = |U| \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 4\ \text{V} \frac{0{,}02\ \text{ohm}}{0{,}45\ \text{ohm}};$$

$\underline{U_1 = 0{,}18\ \text{V}}$ feszültséget mutat.

b) Ha a műszert a harmadik ábra szerint a gyűrű bal oldaláról csatlakoztatjuk az A; B pontokra, az előbbihez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy:



1. $U_2 = I R_2 = |U| \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$;

2. $U_2 = |U| - IR_1$;

$$U_2 = |U| \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right);$$

$$U_2 = |U| \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$U_2 = |U| \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4\ \mathrm{V} \frac{0{,}43\ \mathrm{ohm}}{0{,}45\ \mathrm{ohm}};$$

$\underline{U_2 = 3{,}8\ \mathrm{V}.}$

a műszer által jelzett feszültség. A feszültségmérő tehát mást mutat a két helyzetben. Két pont között nincs egyértelmű feszültség a B változása miatt létrejövő elektromos erőtérben.

20.56. A motor állóhelyzetében átfolyó I_1 áram és a rákapcsolt feszültség alapján a teljes belső ellenállás:

$$R_b = \frac{U}{I_1} = \frac{150\ \mathrm{V}}{25\ \mathrm{A}} = 6\ \mathrm{ohm}.$$

A forgó motorban kisebb áram folyik, mert a forgás következtében fellépő U indukált feszültség csökkenti azt. Ha n fordulatszámnál I az áramerősség, $U - U_i = I R_b$; $U_i = U - IR_b = (150 - 5 \cdot 6)\ \mathrm{V} = 120\ \mathrm{V}$ az indukált feszültség.

Ha a feszültséget lekapcsoljuk a motorról, és a kapcsokra $R_t = 18$ ohm terhelő ellenállást kötünk, majd n fordulatszámmal forgatjuk a forgórészt, akkor az indukált feszültség ismét 120 V, ha az áramerősség 5 A, mint az előbb. 120 V indukált feszültség esetén azonban:

$$I = \frac{U_i}{R_b + R_t} = \frac{120\ \mathrm{V}}{(6 + 18)\ \mathrm{ohm}} = 5\ \mathrm{A};$$

vagyis megegyezik a feltételezettel.

A leadott teljesítmény:

$P = I^2 R_t = (5\ \mathrm{A})^2 \cdot 18\ \mathrm{ohm} = 450\ \mathrm{W}. = 0{,}61$ LE;

$\underline{P = 0{,}61\ \mathrm{LE}.}$

20.57. A forgatás közben változik a gyűrű fluxusa, és így benne az indukált feszültség hatására áram folyik.

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}; \quad I = \frac{1}{R} U.$$

Az áramerősség az időben attól függően változik, hogyan történik a forgatás. A forgatás közben t időpontban legyen $I(t)$ az áramerősség. A t időpontot tartalmazó Δt időtartam alatt a gyűrű tetszőleges keresztmetszetén áthaladó töltés $\Delta Q = I(t) \cdot \Delta t$. A forgatás időtartamát kicsi Δt időtartamokra bontva, a forgatás teljes ideje alatt áthaladó töltésmennyiséget a Δt_i időtartamok alatt áthaladó ΔQ_i töltések összegeként kapjuk:

$$Q = \Sigma \Delta Q_i = \Sigma I(t_i) \cdot \Delta t_i = \Sigma \frac{1}{R} U(t_i) \cdot \Delta t_i;$$

$$Q = \frac{1}{R} \Sigma \left(-\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t_i} \Delta t_i\right);$$

$$Q = -\frac{1}{R} \Sigma \Delta\Phi_i = -\frac{1}{R}\left[\Phi - \Phi_0\right];$$

$$Q = -\frac{1}{R}\left[\Phi - \Phi_0\right].$$

$$\Phi = 0; \quad \Phi_0 = BA = \mu_0 H \pi r^2;$$

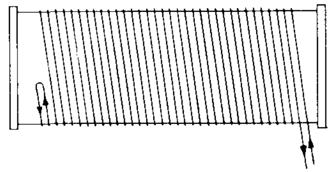
$$Q = -\frac{1}{R}\left[0 - \mu_0 H \cdot r\pi^2\right] = \frac{\mu_0 H \cdot r^2\pi}{R};$$

$$Q = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{10^5}{\pi^2} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\, 4 \cdot 10^{-4} \mathrm{m}^2}{1 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}};$$

$\underline{Q = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\mathrm{C}.}$

Érdemes felfigyelni arra, hogy az áthaladó töltés nem függ a mozgatás sebességétől, a kezdeti és a végső fluxus egyértelműen meghatározza.

20.58. A tekercs indukciós hatását megszüntethetjük, illetve nagyon kicsire csökkenthetjük, ha a tekercselést oly módon végezzük, hogy a tekercs belsejében a mágneses térerősség nulla legyen. Ezt legegyszerűbben a kettős vagy bifiláris tekercseléssel érhetjük el: a feltekercselendő huzalt középen kétfelé hajtjuk, és a két huzalszálat szorosan egymás mellett vezetjük. Így a vezetőn ellentétes irányban folyó áramok mágneses terei gyakorlatilag megsemmisítik egymást, tehát a fluxus és ezzel az induktivitás igen kicsiny.



20.59. A rövidre zárt tekercsben folyó áram erőssége a tekercs indukciófluxusának változásától függ:

$$I_2 = \frac{1}{R}\left(-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right).$$

Ha a tekercset kitöltő anyag kicserélésekor az induktív hatás megváltozik, akkor arra következtethetünk, hogy a $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ változott, ez pedig azt jelenti, hogy a tekercsben a mágneses indukció értéke változott meg. Ha a tekercs „üres", az első tekercs által létesített mágneses indukció értéke:

$$B_0 = \mu_0\frac{I_1 N}{l}.$$

A tekercs belsejét valamilyen anyaggal kitöltve, a mágneses indukció értéke megváltozik:

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 \frac{I_1 N}{l};$$

ahol μ_r a szóban forgó anyag relatív permeabilitása.
A rövidre zárt tekercs indukált áramának változásától a tekercset kitöltő anyag relatív permeabilitására következtethetünk.
A tapasztalat szerint az anyagokat mágneses szempontból három csoportra lehet osztani:

$\mu_r < 1$ (diamágneses anyagok);
$\mu_r > 1$ (paramágneses anyagok);
$\mu_r \gg 1$ (ferromágneses anyagok).

Az első két csoportba tartozó anyagoknál μ_r független a B indukciótól. A technikailag fontos ferromágneses anyagok μ_r-je erősen függ az indukció erősségtől.
Az anyagok különféle mágneses viselkedését az anyagok szerkezete alapján értelmezhetjük.

A paramágneses anyagoknál ($\mu_r > 1$) úgy képzeljük, hogy molekuláinak külső mágneses tér nélkül is van mágneses terük. Minden molekula kis áramkörnek vagy tekercsnek tekinthető, ezek a „molekuláris" tekercsek mágnesezetlen állapotban a legkülönbözőbb térbeli irányokban helyezkednek el, így kifelé mágneses hatásuk nem érvényesül. Ha mágneses térbe helyezzük őket, akkor a rájuk ható nyomaték a külső mágneses térerősség irányába igyekszik állítani őket, így azok mágneses tere erősíteni fogja a külső teret. Paramágneses anyag például: az oxigén, a platina, a mangán.
A diamágneses anyagok ($\mu_r < 1$) az indukciót csökkentik a vákuumban mért indukcióhoz képest. A diamágneses anyagok molekuláját olyan két tekercsnek képzelhetjük amelyben az áramirány ellentétes, és így a molekula saját mágneses tere ha külső mágneses tér nincs, nulla. A külső tér bekapcsolásakor az indukció-törvénynek megfelelően, a „molekuláris tekercsben" áram indukálódik, amely a két egyenlő nagy, de ellentétes irányú mágneses térerősséggel rendelkező tekercsek közül az egyik áramát erősíti, a másikét gyöngíti úgy, hogy végeredményül a külső tér ellen hassanak. Ez a diamágneses hatás természetesen paramágneses anyagoknál is fellép, de ott a nem semleges elemi „tekercsek" párhuzamosításából adódó térerősítés erősebb. Diamágneses anyag például a hidrogén, a víz, a bizmut.
A ferromágneses anyagok úgy, mint a paramágneses anyagok, a külső mágneses tér indukcióerősségét növelik, de míg a paramágneses anyagok permeabilitása egy körüli érték, addig ferromágneses anyagoknál a permeabilitás igen nagy, néhány ezer körül van. Ezt az erős hatást úgy értelmezzük, hogy az eredő mágneses tér kialakításában nem az egyes molekulák mágneses tere szerepel közvetlenül, hanem a ferromágneses anyagokban már eleve a kristályainak egyes tartományai vannak bizonyos irányban mágnesezve, úgy, hogy a különböző tartományok irányítottsága teljesen rendszertelen. Külső mágneses térben egy-egy egész tartomány ugrásszerűen áll be a térerősség irányához közelebb eső irányban. A külső mágneses tér térerősségét növelve, egyre több tartomány egyre inkább a tér irányába fordul be. Amikor azonban a térerősség már olyan nagy, hogy már minden tartomány beállt a térerősség irányába, akkor a további térerősségnövelés már csak igen csekély indukciónövekedést eredményez.

20.60. A kapcsoló zárása után az áramerősség fokozatosan növekedve éri el a végső:

$$I = \frac{U_0}{R}$$

értékét. Amíg az áram erre az értékre felnő, változik a tekercs fluxusa, és ennek megfelelően a tekercs sarkain megjelenik az indukált feszültség, amely hozzájárul az áramforrás U_0 feszültségéhez.
Kirchhoff második törvénye alapján:

$$U_0 - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR;$$

$$U_0 = IR + L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Az áramforrás munkája az áram növekedésének Δt időtartama alatt; amikor az áramerősség I (t), akkor: az *(1)* alapján:

$$U_0 \cdot I \cdot \Delta t = I^2 \cdot R \cdot \Delta t + LI\frac{\Delta I}{\Delta t} \cdot \Delta t;$$

$$U_0 \cdot I \cdot \Delta t = I^2 \cdot R \cdot \Delta t + L \cdot I \cdot \Delta I.$$

A jobb oldalon szereplő első tag az a munka, amely Δt idő alatt az R ellenállást melegíti. Az egyenlőség szerint ez csak egy része az áramforrás $U_0\, I\, \Delta t$ munkájának. A fennmaradó rész az áram növelésére fordítódik, tehát Δt idő alatt a tekercs mágneses terének energiája $L \cdot I \cdot \Delta I$-vel nő. Az áram növekedésének teljes időtartama alatt a mágneses tér növelésére fordított munka, vagyis a tekercs végső mágneses terének energiája, az egymást követő Δt időtartamok alatt végzett munkák összege, tehát:

$$W_m = \Sigma LI \cdot \Delta I = L\Sigma I \cdot \Delta I.$$

Pontosan ezen összeg határértékét kell kiszámítani, miközben minden $\Delta t \to 0$; vagyis minden $\Delta I \to 0$.

$$W_m = L \lim_{\Delta I \to 0} \Sigma I \cdot \Delta I = L\int_0^I I\,dI = L\frac{1}{2}I_b^2;$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2.$$

Megjegyzés:
A tekercs mágneses terének energiáját kifejezhetjük a mágneses tér jellemzőivel; B-vel; H-val.

A *20.53.* feladat megoldásában azt találtuk, hogy egy tekercs önindukciós együtthatója:

$$L = \mu_0\mu_r\frac{N^2A}{l}.$$

Ezt az energiára nyert kifejezésünkbe helyettesítve:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r\frac{N^2A}{l}I^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0\mu_r\frac{NI}{l}\right)\left(\frac{NI}{l}\right)lA.$$

A zárójelekben álló kifejezések éppen a B, illetve a H a tekercsben, tehát:

$$W_m = \frac{1}{2}BH \cdot lA.$$

Ennek az energiának a térfogategységre jutó része, az energiasűrűség:

$$w_m = \frac{W_m}{lA} = \frac{1}{2}BH.$$

20.61. *a)* A tanuló pozitív munkát végzett, ugyanis a széthúzás irányába mutató erőt kellett tekercsre kifejtenie. Az erő és az elmozdulás egyirányú, ezért a munka pozitív. Mekkora a széthúzáshoz szükséges erő? Ha elhanyagolható a széthúzáskor a tekercsben ébredő mechanikai eredetű visszatérítő erő, akkor az erő egyenlő a tekercs meneteiben egyirányban folyó áramok között fellépő vonzóerővel.
b) A tekercs mágneses terének energiája csökkent. A *20.60.* feladatban láttuk, hogy a tekercs mágneses terének energiája:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2.$$

Az áramerősség a széthúzás előtt és után az akkumulátor feszültsége és a kör ellenállása által meghatározott $I = \dfrac{U}{R}$ értékű. Az önindukciós együttható a széthúzás során csökkent, ugyanis:

$$L = \mu_0\frac{N^2A}{l}$$

tehát l növekedésekor L csökken. Összegezve: I = állandó, L csökken; tehát W_m is csökken.

c) A széthúzás folyamata alatt a tekercsben a B indukció l változása miatt változik, és így a tekercs fluxusa is, tehát közben indukált áram folyik. Az indukált áram munkája teljes egészében a huzal melegítésére fordítódott.

21. Váltakozó áram

21.1. Az *a)* diagram kivételével mindegyik ábrán változó áram képe látható. A váltakozó áram nem azonos a változó árammal. Váltakozó áramnak az olyan változó elektromos áramot nevezzük, amelynek nagysága és iránya is periodikusan változik úgy, hogy az egy periódus alatt egy irányban átfolyó töltés nulla. Ezek szerint a *b), c), e), g)* diagram váltakozó áramot ábrázol.

21.2. *a)* Az áram pillanatnyi értéke: I

b) A csúcsérték: I_0

c) A körfrekvencia: ω

d) A fázis: $\omega t+\delta$

e) A fázisállandó vagy kezdőfázis: δ

21.3. *a)* $I_0 = 300$ A;

b) $\omega = 314\ \mathrm{s}^{-1}$;

c) $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$; $(\omega = 2\pi f)$;

d) $T = 0{,}02$ s; $\left(T = \dfrac{1}{f}\right)$;

e) $\delta = \dfrac{\pi}{3}$.

21.4. A dugaszoló aljzat feszültsége $U = U_0 \cdot \sin \omega t$. Hálózati feszültség esetén $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$; tehát $\omega = 2\pi \cdot f = 314\ \mathrm{s}^{-1}$; $U_{\mathrm{eff}} = 220$ V. A csúcsérték $U_0 = \sqrt{2} \cdot U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2} \cdot 220\ \mathrm{V} \approx 310$ V. Így a pillanatnyi feszültség mint az idő függvénye $U = 310 \cdot \sin 314\, t$.

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}02\ \mathrm{s}.$$

21.5. $U = U_0 \cdot \sin\omega t$; $\omega = 2\pi f$.

Ha $t = 0$: $U = 0$. Legyen $U = \dfrac{U_0}{2}$; a $t = t_1$ pillanatban:

$$\frac{U_0}{2} = U_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t_1);$$

$$\sin(2\pi f t_1) = \frac{1}{2};$$

$$2\pi f t_1 = \frac{\pi}{6};$$

$$t_1 = \frac{1}{12f} = \frac{1}{12 \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}0017\ \mathrm{s};$$

$t_1 = 0{,}0017$ s.

21.6. A tekercs, illetve a kondenzátor váltóáramú ellenállása

$$X_L = L\omega;\ X_c = \frac{1}{\omega C};$$

ahol L a tekercs önindukciós együtthatója, C a kondenzátor kapacitása és ω a tekercsen, illetve a kondenzátoron átfolyó váltóáram körfrekvenciája. Így a tekercs és a kondenzátor váltóáramú ellenállása is változik, ha változik a rajtuk átfolyó váltakozó áram frekvenciája.

21.7. *a)* $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$; $\cos\varphi = \dfrac{P}{U_{eff} \cdot I_{eff}} = \dfrac{300\ \mathrm{W}}{220\mathrm{V} \cdot 2\ \mathrm{A}} = 0{,}68$;

$\varphi = 47°$.

b) $Z = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}} = \dfrac{220\ \mathrm{V}}{2\ \mathrm{A}}$;

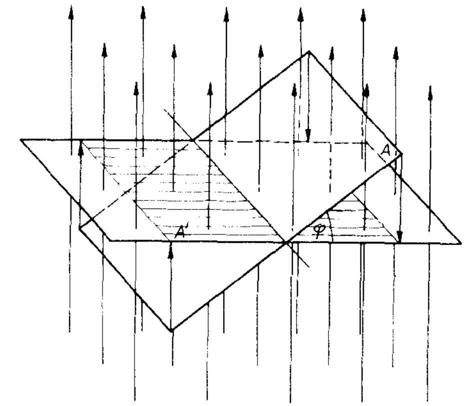
$Z = 110$ ohm.

c) $R = Z \cdot \cos\varphi = 110 \cdot 0{,}68$ ohm;

$R = 74{,}8$ ohm.

21.8. Amikor a keret síkja merőleges az indukcióvektorra, a keret fluxusa:

$\Phi_0 = BA$;



ahol A a keret által körülfogott terület. Ha a keret φ szöggel elfordul, a fluxusa csökken. Annyi lesz, mint az előbbi helyzetére vetített területének $A' = A \cdot \cos\varphi$-nek a fluxusa.

$\Phi = BA \cdot \cos\varphi = \Phi_0 \cdot \cos\varphi$.

Ha a keret ω szögsebességgel egyenletesen forog, $\varphi = \omega t$. Így a fluxus mint az idő függvénye:

$\Phi = \Phi_0 \cdot \cos\omega t$.

Az indukált feszültség:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0\omega \cdot \sin\omega t = U_0 \cdot \sin\omega t;\ U_0 = BA\omega.$$

A forgó keretben valóban váltakozó feszültség indukálódik.

Amikor $U = U_{eff} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$;

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_0 \sin\varphi;\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi = \frac{\pi}{4} = 45°;$$

$\varphi = 45°$.

21.9. Bármely periodikusan változó áram effektív erősségén (I_{eff}) annak az egyenáramnak erősségét értjük, amely a T periódusidő alatt ugyanabban az R ellenállású vezetőben ugyanakkora munkát végez, mint a kérdéses változó áram.

Alkalmazzuk ezt a meghatározást esetünkre. A diagramon látható változó áram munkája egy periódus alatt:

$$W = I_0^2 R \frac{T}{4} + \left(\frac{I_0}{2}\right)^2 \cdot R \frac{T}{2} + I_0^2 R \frac{T}{4} = I_0^2 RT \frac{5}{8}.$$

Az I_{eff} erősségű egyenáram munkája T idő alatt:

$W = I_{eff}^2 \cdot RT$.

A definíció szerint a két munka egyenlő:

$$I_{eff}^2 RT = I_0^2 RT \frac{5}{8};$$

és innen a keresett effektív érték:

$$I_{\text{eff}} = I_0\sqrt{\frac{5}{8}}\,.$$

Ohm törvénye szerint az R ellenálláson a feszültség:

$U(t) = I(t)R$; $U_0 = I_0R$.

A feszültség effektív értéke:

$$U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\cdot R = I_0\sqrt{\frac{5}{8}}\cdot R = U_0\sqrt{\frac{5}{8}}\,;$$

$$U_{\text{eff}} = U_0\sqrt{\frac{5}{8}}\,.$$

Ugyanezen gondolatmenettel kaphatjuk meg a sinusos váltakozó áram és feszültség effektív értékét (lásd *21.40.* feladatot):

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\,;\ U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\,.$$

21.10. Az akkumulátor feltöltéséhez meghatározott töltésmennyiségnek kell az akkumulátoron áthaladnia. Ezt a töltésmennyiséget az akkumulátor töltési kapacitásának nevezik, és amperórákban szokás megadni.

A feladatbeli változó áram egy periódusidő alatt:

$$Q_1 = I_0\frac{T}{4} + \frac{I_0}{2}\cdot\frac{T}{2} + I_0\frac{T}{4} = \frac{3}{4}I_0T$$

töltést szolgáltat. t_1 idő alatt t_1/T-szer többet, vagyis:

$$Q = \frac{3}{4}I_0T\cdot\frac{t_1}{T}$$

töltést.

A keresett egyenáram (a változó áram átlagértéke t_1 idő alatt ugyanannyi töltést kell hogy biztosítson.

$Q = I_{\text{átl}}\cdot t_1$.

A töltés két kifejezését egybevetve:

$$I_{\text{átl}}\cdot t_1 = \frac{3}{4}I_0T\cdot\frac{t_1}{T},$$

$$I_{\text{átl}} = \frac{3}{4}I_0.$$

21.11. Működik. A csengő elektromágnese akkor is vonzza a megszakító szerkezeten levő lágyvasat, ha váltakozó áram folyik benne. Az elektromágnes vasmagja és a vonzott lágyvas is minden félperiódusban átmágneseződik az áram irányának megfelelően.

21.12. A feladatban említett műszerek váltakozó áram esetén is mutatnak valamilyen állandó értéket, amely valamiféle átlagértékét jelenti az áramnak, illetve a feszültségnek. Ez az átlag más és más attól függően, hogy az áram milyen hatásával mérjük őket. A hőhatáson alapuló átlagértéket hatásos vagy effektív értéknek nevezzük. A hőhuzalos műszer közvetlenül az effektív értéket mutatja, vagyis annak az egyenáramnak az értékét, amellyel hőhatás szempontjából helyettesíteni lehetne az adott váltakozó áramot. (Vessük össze a *21.9.* feladat megoldásában található definícióval!) A nem hőhatáson alapuló műszerek skáláját is úgy hitelesítik, hogy az effektív értéket mutassák.

21.13. *a)* A tekercs váltakozó árammal szemben kifejtett ellenállása, impedanciája $X_L = L\omega = L2\pi f = 0{,}2\cdot 314$ ohm $= 62{,}8$ ohm.

A tekercs áramának effektív értéke:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{X_L} = \frac{220\text{ V}}{62{,}8\text{ ohm}} = 3{,}5\text{ A}.$$

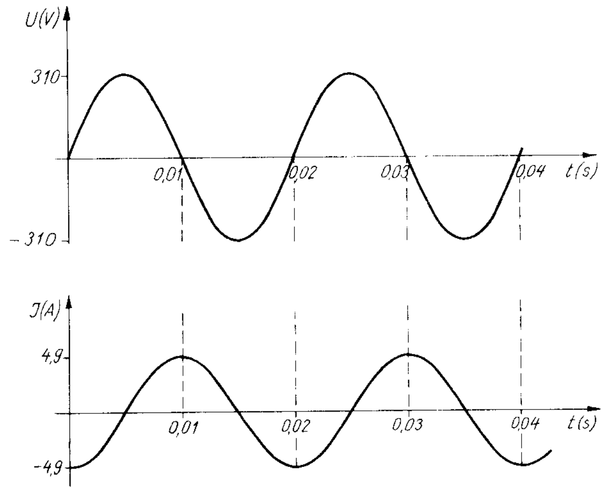
b) Ha a tekercs ohmos ellenállása zérus, a tekercsen levő feszültség és a benne folyó áram fázisának különbsége $\frac{\pi}{2} = 90°$. Így ha a feszültséget az

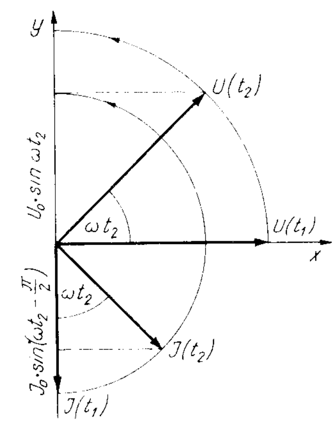
$U = U_0\cdot\sin\omega t$ $(U_0 = \sqrt{2}\cdot U_{\text{eff}} \approx 310\text{ V};\ \omega = 314\text{ s}^{-1})$

függvény írja le, akkor az áramerősséget az

$$I = I_0\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);\quad (I_0 = \sqrt{2}\,I_{\text{eff}} = 4{,}9\text{ A}).$$

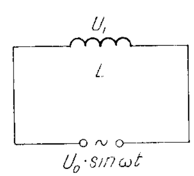
A grafikonokon jól látható, hogy a feszültség csúcsértékei időben negyed periódusidővel megelőzik az áram csúcsértékeit. Ezt szokás úgy kifejezni, hogy azt mondjuk az áram negyed periódussal késik a feszültséghez képest. (Azt is mondhatnánk, hogy az áram háromnegyed periódussal siet a feszültséghez képest.)





c) Az ábra a feszültséget és az áramot ábrázoló forgóvektorokat két időpillanatban ábrázolja. Mindkét pillanatban a feszültség, illetve az áram pillanatnyi értékei a forgóvektorok függőleges egyenesre vonatkozó vetületei. A feszültséget és áramot ábrázoló vektorok által bezárt szög egyenlő a feszültség és az áram fázisának különbségével.

Megjegyzés



A tiszta induktív tekercs impedanciáját és fáziskésleltető hatását a következőképpen érthetjük meg. Vizsgáljuk az ábrán látható kapcsolást. A kérdés az, hogy ha a tekercs sarkaira $U = U_0 \cdot \sin\omega t$ feszültséget kapcsolunk, a körben folyó áram milyen függvénye az időnek. $[I(t) = ?]$ Az $U_0 \cdot \sin\omega t$ feszültséghez minden pillanatban hozzájárul a tekercs két vége közötti $U_i = -L\dfrac{dI}{dt}$ önindukciós feszültség. Kirchhoff második törvénye alapján ezek összege nulla, mert $R = 0$ miatt $IR = 0$.

$$U + U_i = 0; \qquad U - L\frac{dI}{dt} = 0; \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{U}{L};$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}U_0 \cdot \sin\omega t.$$

A keresett I (t) függvény olyan, amelynek differenciálhányadosa a $\sin\omega t$ függvény állandószorosa $\left(\dfrac{U_0}{L}\text{-szerese}\right)$. Ilyen függvény a $-\cos\omega t$ függvény állandószorosa, a $-I_0 \cdot \cos\omega t$ függvény. Ennek a deriváltja: $\dfrac{d}{dt}(-I_0 \cdot \cos\omega t) = I_0\omega \cdot \sin\omega t.$

Összehasonlítva az egyenletből kiolvasott deriválttal:

$I_0\omega \cdot \sin\omega t = \dfrac{U_0}{L}\sin\omega t$; amelyből

$$I_0 = \frac{U_0}{L\omega};$$

tehát az I (t) függvény

$$I = -I_0 \cdot \cos\omega t = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$I = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

vagyis az áram a feszültséghez hasonlóan változik, de ezzel nincs azonos fázisban. Fáziskülönbségük $\dfrac{\pi}{2}$.

Az impedanciát a feszültség és az áram effektív értékeinek hányadosaként értelmezzük, tehát a tekercs impedanciája:

$$X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{\frac{U_0}{L\omega}} = L\omega;$$

$$X_L = L\omega.$$

1.14. A sinusosan változó feszültség hatására $I = I_0 \cdot \sin\omega t$ sinusosan változó áram jön létre a körben. Kirchhoff második törvénye szerint az áramforrás U feszültségének és a tekercsben önindukált

$U_i = -L\dfrac{dI}{dt}$ feszültségnek az összege egyenlő az R ellenállás IR

feszültségével $U - L\dfrac{dI}{dt} = IR$

$$U = IR + L\frac{dI}{dt}.$$

A jobb oldalon szereplő első tag az ohmos ellenálláson levő pillanatnyi feszültség.

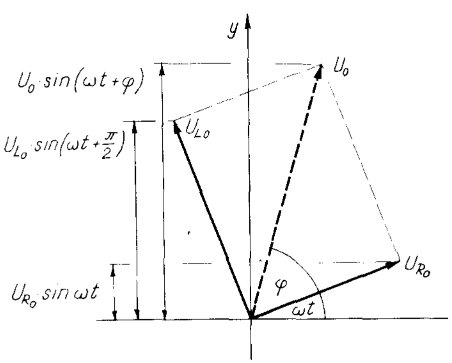
$U_R = IR = I_0R\cdot\sin\omega t = U_{R0}\cdot\sin\omega t$; $(U_{R0} = I_0R)$,
amely az $I = I_0\cdot\sin\omega t$ árammal fázisban van. A második tag a tekercs feszültsége:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_0\cdot\sin\omega t) = L\omega I_0\cdot\cos\omega t;$$

$$U_L = L\omega I_0\cdot sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U_L = U_{L0}\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);\quad \left(U_{L0} = L\omega I_0\right);$$

amely fázisban $\dfrac{\pi}{2}$-vel siet az áramhoz képest. Az áramforrás feszültsége minden pillanatban $U = U_R + U_L$.
Ezt a feszültséget a legegyszerűbben az U_{R0} és U_{L0} forgóvektorokat ábrázoló rajzról olvashatjuk le. U ugyanis nem más, mint U_{R0} és R_{L0} vektorok y tengelyre eső vetületeinek algebrai összege,



ez pedig egyenlő az U_{R0} és U_{L0} vektorok vektori eredőjének U_0-nak az y tengelyre eső vetületével.

$U = U_0\cdot\sin(\omega t + \varphi)$.

Az áramforrás feszültsége tehát fázisban φ-vel siet az áramhoz képest, vagy úgy is mondhatjuk, hogy az áram φ-vel késik az áramforrás feszültségéhez képest. Az U_0 csúcsértéket és a φ fázisállandót az ábráról leolvasva kapjuk:

$U_0 = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{L0}^2}$; (és nem $U_{R0} + U_{L0}$!)

$$U_0 = \sqrt{I_0^2R^2 + I_0^2L^2\omega^2} = I_0\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{L0}}{U_{R0}} = \frac{I_0L\omega}{I_0R} = \frac{L\omega}{R};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

a) Az L, R tag együttes impedanciája:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}{\frac{I_0}{\sqrt{2}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_0\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{I_0} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2};$$

$Z = \sqrt{50^2 + 0{,}5^2\cdot(2\pi\cdot 50)^2} = 164{,}8$ ohm;

$\underline{Z = 165 \text{ ohm.}}$

b) $I_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{Z} = \dfrac{220\text{ V}}{164{,}8\text{ ohm}} = 1{,}33$ A;

$\underline{I_{\text{eff}} = 1{,}33 \text{ A.}}$

c) $U_{R\,\text{eff}} = RI_{\text{eff}} = 50$ ohm $\cdot$ 1,33 A = 66,5 V;

$\underline{U_{R\,\text{eff}} = 66{,}5 \text{ V.}}$

$U_{L\,\text{eff}} = X_L\cdot I_{\text{eff}} = L\omega I_{\text{eff}} = 0{,}5\text{ H}\cdot 314\text{ s}^{-1}\cdot 1{,}33\text{ A} = 209$ V;

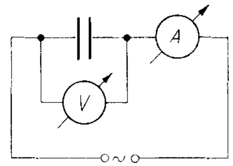
$\underline{U_{L\,\text{eff}} = 209 \text{ V.}}$

d) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\cdot\omega}{R} = \dfrac{0{,}5\cdot 314}{50} = 3{,}14$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 3{,}14$;

$\underline{\varphi = 72{,}3°.}$

1.15. Az ismeretlen kapacitású kondenzátort váltakozó feszültségre kapcsoljuk. Műszereinkkel megmérjük a kondenzátor áramának és feszültségének effektív értékét. Ezekből kiszámítjuk a kondenzátor váltakozó áramú ellenállását:

$$X_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$



$U = U_0 \cdot \sin \omega t$

Ugyanakkor ismert, hogy:

$$X_C = \frac{1}{\omega C};$$

ahol ω a váltakozó feszültség körfrekvenciája. Egyenlőségeink egybevetéséből:

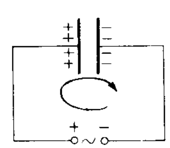
$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}};$$

$$C = \frac{I_{eff}}{\omega U_{eff}}.$$

Megjegyzés

Viszonylag egyszerűen meghatározhatjuk a kondenzátor feszültségének és áramának fázisviszonyait. Kapcsoljunk a kondenzátorra $U = U_0 \cdot \sin \omega t$ váltakozó feszültséget. Abban a pillanatban, amikor a kondenzátoron Q töltés van, a fegyverzetek közötti feszültség $U_C = \dfrac{Q}{C}$. Kirchhoff második törvénye szerint a körben a feszültségek összege nulla, tehát:

$$U_0 \cdot \sin \omega t - \frac{Q\,(t)}{C} = 0.$$



Az előjelek érthetők lesznek, ha az ábrára pillantunk, ahol feltüntettük a polaritásokat, akkor, amikor a bal oldali kapocs pozitív. A feszültségeket összegezve, a berajzolt körüljárás szerint a kapocsfeszültség pozitív, a fegyverzetek közötti feszültség negatív.

Egyenletünk átírható a:

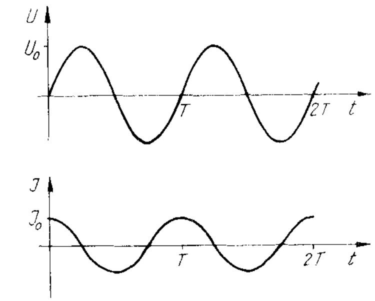
$$Q\,(t) = CU_0 \cdot \sin \omega t$$

alakra. Differenciáljuk az idő szerint mindkét oldalt:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = CU_0\,\omega \cdot \cos \omega t = C\omega U_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

A $\dfrac{dQ(t)}{dt}$ a kondenzátor töltésének időegységre jutó változása egyenlő az áram pillanatnyi értékével: $I(t)$-vel, így:

$$I(t) = \omega CU_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \quad (I_0 = \omega CU_0).$$



Az áram a feszültséghez hasonlóan sinusosan változik, de fázisban $\dfrac{\pi}{2}$ -vel siet a feszültséghez képest, amint ez az ábrán is látszik, az áram csúcsértékeit egy negyed periódussal hamarabb éri el, mint a feszültség a saját maximumait. (Figyelembe véve, hogy az $U(t)$ és $I(t)$ függvények periodikusak, azt is mondhatnánk, hogy az áram fázisban $3 \cdot \dfrac{\pi}{2}$ -vel késik a feszültséghez képest.)

A kondenzátor impedanciája a definíció szerint:

$$X_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}};$$

de $U_{eff} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$; és $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$; tehát:

$$X_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{\omega CU_0} = \frac{1}{\omega C}.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

16. A kapcsokon levő váltakozó feszültség hatására váltakozó áram folyik a körben, melyet írjunk le az $I = I_0 \cdot \sin \omega t$ függvénnyel.

Az R ohmos ellenállás sarkain a feszültség:

$U_R = IR;$

$U_R = RI_0 \sin \omega t = U_{R0} \sin \omega t$

az árammal fázisban van.

Az előző feladatban megállapítottuk, hogy a kondenzátoron átfolyó áram fázisa $\frac{\pi}{2}$-vel nagyobb a kondenzátor sarkain levő feszültség fázisánál, vagy fordítva, a feszültség fázisa $\frac{\pi}{2}$-vel kisebb az áram fázisánál. Ezért ha ωt az áram fázisa, a feszültségé $\omega t - \frac{\pi}{2}$.

A feszültség az áram csúcsértékei közötti kapcsolatra szintén az előző feladatban azt találtuk, hogy $U_{Co} = \frac{1}{\omega C} I_0$.

Ezek szerint feladatunkban a kondenzátor sarkain levő feszültség:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Co} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Az U_R és U_C váltakozó feszültségeket az ábrán látható U_{Ro} és U_{Co} ω szögsebességgel forgó vektorok ábrázolják abban az értelemben hogy az y tengelyre eső vetületeik megegyeznek U_R és U_C pillanatnyi értékeivel.

Kirchhoff második törvénye szerint:

$$U - U_C = U_R;$$

$$U = U_R + U_C = U_{Ro} \cdot \sin \omega t + U_{Co} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

A vektorábráról látható, hogy ez éppen az U_{Ro} és U_{Co} forgó vektorok eredőjének, a forgó U_0 vektornak a vetülete, tehát:

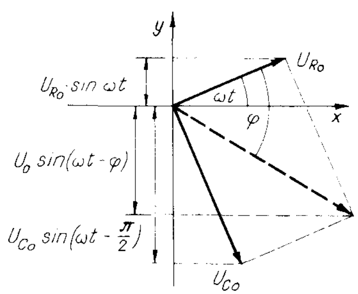
$$U = U_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

Az áramforrás feszültsége φ-vel késik fázisban az áramhoz képest. Az U_0 csúcsérték és a φ fázisállandó az ábráról láthatóan

$$U_0 = \sqrt{U_{Ro}^2 + U_{Co}^2};$$

$$U_0 = \sqrt{(I_0 R)^2 + \left(I_0 \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{Co}}{U_{Ro}} = \frac{I_0 \frac{1}{\omega C}}{I_0 R} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_C}{R}; \text{ vagy:}$$

$$\cos \varphi = \frac{U_{Ro}}{U_0} = \frac{I_0 R}{I_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

Az eredő impedancia:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}{\frac{I_0}{\sqrt{2}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}{I_0};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

Összefoglalva, ha az áramkörben R ohmikus ellenállás és C kapacitású kondenzátor van, akkor a kapcsokon levő váltakozó feszültség hatására folyó áram fázisban siet a feszültséghez képest, és az eredő váltakozó áramú ellenállás

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Válaszoljunk most már a feladatban feltett kérdésekre

a) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \frac{1}{(314 \cdot 10^{-4})^2}}$ ohm;

$\underline{Z = 59{,}3 \text{ ohm.}}$

b) $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{220 \text{ V}}{59{,}3 \text{ ohm}}$;

$\underline{I_{\text{eff}} = 3{,}7 \text{ A.}}$

c) $U_{R\text{eff}} = \frac{U_{Ro}}{\sqrt{2}} = \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}} \cdot R = 3{,}7 \text{ A} \cdot 50 \text{ ohm}$;

$\underline{U_{R\text{eff}} = 185 \text{ V.}}$

$$U_{C\,\mathrm{eff}} = \frac{U_{Co}}{\sqrt{2}} = \frac{I_0 X_C}{\sqrt{2}} = I_{\mathrm{eff}} X_C = 3{,}7\ \mathrm{A}\cdot\frac{1}{314\cdot 10^{-4}}\ \mathrm{ohm};$$

$$\underline{U_{C\,\mathrm{eff}} = 117{,}7\ \mathrm{V}.}$$

d) $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{50}{59{,}3} = 0{,}84;$

$$\underline{\varphi \approx 32°.}$$

21.17. *a)* A feszültséget, illetve az áramerősséget leíró függvények:

$U = U_0\cdot\sin\omega t;\quad (U_0 = 60\ \mathrm{V};\quad \omega = \frac{2\pi}{T};\quad T = 0{,}001\ \mathrm{s});$

$I = I_0\cdot\sin(\omega t + \varphi);\qquad (I_0 = 1{,}5\ \mathrm{A})$

$I = I_0\cdot\sin\omega\,(t + \frac{\varphi}{\omega}).$

Az ábráról leolvasható, hogy $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{T}{8}$;

tehát az áram és feszültség fázisának különbsége:

$$\varphi = \omega\frac{T}{8} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8} = \frac{\pi}{4};$$

$$\underline{\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°.}$$

b) Az eredő impedancia:

$$Z = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{60\ \mathrm{V}}{1{,}5\ \mathrm{A}} = 40\ \mathrm{ohm}.$$

Az ohmos ellenállás:

$$R = Z\cdot\cos\varphi = 40\ \mathrm{ohm}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\underline{R = 28{,}3\ \mathrm{ohm}.}$$

c) Az előző feladatban láttuk, hogy $\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_C}{R}$.

Most $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; tehát $X_L = R$

vagyis:

$$\frac{1}{\omega C} = R;$$

$$C = \frac{1}{R\omega} = \frac{1}{28{,}3\cdot\frac{2\pi}{0{,}001}}\ \mathrm{F} = 5{,}6\cdot 10^{-6}\ \mathrm{F};$$

$$\underline{C = 5{,}6\ \mu\mathrm{F}.}$$

21.18. A váltakozó feszültség hatására váltakozó áram folyik a körben. Ezt az áramot írjuk le az $I = I_0\cdot\sin\omega t$ függvénnyel.

Az R ellenállás végein az árammal fázisban levő feszültség

$U_R = IR = RI_0\cdot\sin\omega t = U_{R0}\cdot\sin\omega t.$

Az L induktivitású tekercs sarkain a feszültség fázisa $\frac{\pi}{2}$-vel nagyobb, mint az áram fázisa, tehát:

$$U_L = X_L I = L\omega I_0\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{L0}\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(Lásd a *21.13.* feladat megoldását!)

A kondenzátor sarkain a feszültség fázisa viszont $\frac{\pi}{2}$-vel kisebb az áraménál, vagyis $U_C = X_C I = \frac{1}{\omega C}I_0\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$

$$U_C = U_{C0}\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

(Lásd *21.15.* feladat megoldását!)

Ezen részfeszültségek és az U kapocsfeszültség között Kirchhoff második törvénye alapján fennáll az:

$U = U_R + U_L + U_C;$

$$U = U_{R0}\cdot\sin\omega t + U_{L0}\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_{C0}\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

összefüggés.

A részfeszültségek a túloldali ábrán látható U_{R0}; U_{L0} és U_{C0} szögsebességgel forgó vektorok vetületei az y tengelyen. Az U_{R0}; U_{L0}; U_{C0} vektorok U_0 eredőjének vetülete pedig az egyes vektorok vetületének algebrai összege, tehát U_0 vektor a kapocsfeszültséget ábrázolja, vagyis:

$U = U_0\cdot\sin(\omega t + \varphi).$

A fázisállandó pozitív;

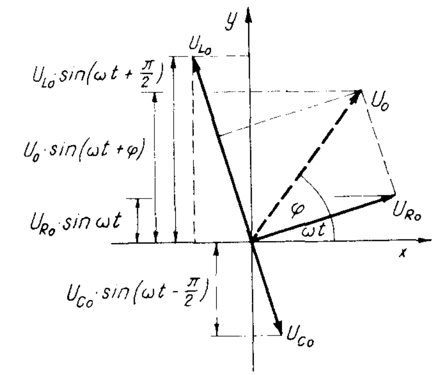
$\varphi > 0$; ha $U_{L0} > U_{C0}$; $L\omega I_0 > \frac{1}{\omega C}I_0$; $L\omega > \frac{1}{\omega C}$;

vagyis ha $X_L > X_C$ a feszültség fázisa nagyobb, mint az áram fázisa. Más szavakkal az áram fázisban késik a feszültséghez képest.

A φ fázisállandó nulla; ($\varphi = 0$), ha

$$U_{L0} = U_{C0}; \quad L\omega = \frac{1}{\omega C};$$

$$X_L = X_C.$$



A feszültség és az áram fázisban van, ha a kondenzátor és a tekercs impedanciája megegyezik.
A fázisállandó negatív, vagyis az áram fázisban siet a feszültséghez képest, ha

$$U_{L0} < U_{C0}; \quad L\omega < \frac{1}{\omega C}; \quad X_L < X_C;$$

vagyis ha a tekercs impedanciája kisebb a kondenzátorénál.
A vektorábráról a kapocsfeszültség U_0 csúcsértéke és fázisállandója leolvasható:

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2};$$

$$U_0 = \sqrt{(I_0R)^2 + \left(L\omega I_0 - \frac{1}{C\omega} I_0\right)^2};$$

$$U_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I_0L\omega - I_0\frac{1}{\omega C}}{I_0 R} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}; \text{ vagy:}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Az eredő impedancia:

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}{\frac{I_0}{\sqrt{2}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_0\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{I_0};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Ha $L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0$; $Z = R$. Adott R esetén ekkor az impedancia minimális; az effektív áramerősség:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{U_{eff}}{R} \text{ maximális.}$$

A kondenzátoron és az induktív tagon a feszültségek egyenlők, de ellentétesek. A kondenzátoron, illetve az induktív elemen a feszültség ebben az esetben s o k k a l nagyobb lehet, mint a kapocsfeszültség, ezért ekkor f e s z ü l t s é g i r e z o n a n c i á r ó l beszélünk.

Feladatunkban $U_0 = 110\cdot\sqrt{2}$ V ≈ 155 V; $\omega = 314$ s^{-1}; $R = 50$ ohm; $L = 0{,}5$ H; $C = 10^{-4}$ F.

a) $Z = \sqrt{R^2 + \left(L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \left(0{,}5\cdot 314 - \frac{1}{314\cdot 10^{-4}}\right)^2}$ ohm;

$Z = 134{,}7$ ohm.

b) $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{110 \text{ V}}{134{,}7 \text{ ohm}}$;

$I_{eff} = 0{,}82$ A.

c) $U_{R\,eff} = I_{eff}\;R = 0{,}82$ A$\cdot 50$ ohm;

$U_{R\,eff} = 41$ V.

$U_{L\,eff} = I_{eff}\cdot X_L = 0{,}82$ A$\cdot(0{,}5\cdot 314)$ ohm;

$U_{L\,eff} = 128{,}7$ V.

$U_{C\,eff} = I_{eff}\cdot X_C = 0{,}82\text{ A}\cdot\frac{1}{314\cdot 10^{-4}}$ ohm;

$U_{C\,\mathrm{eff}} = 26{,}1$ V.

d) $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{50}{134{,}7} = 0{,}37$;

$\varphi \approx 68{,}3°$.

21.19. Ha a fogyasztónak csak ohmos ellenállása van, az ohmikus előtét – ellenállásra jutó feszültség:

$U'_{\mathrm{eff}} = U_{\mathrm{eff}} - U_{R\,\mathrm{eff}} = 220$ V $- 70$ V $= 150$ V. Az áram munkája az előtéten, mivel az áram és feszültség fázisban van:

$W = U_{\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \cdot t = 150$ V $\cdot 0{,}1$ A $\cdot 4$ h $= 60$ Wh.

Ha előtétként kondenzátort használunk, az áram fázisa $\dfrac{\pi}{2}$ -vel nagyobb, mint a kondenzátor sarkaira jutó feszültség fázisa. A kondenzátor feszültségének és áramának fáziskülönbsége

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. A kondenzátoron végzett munka:

$W = U_{C\,\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \cdot t \cdot \cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

A kapacitív előtét nem fogyaszt munkát. Vagyis a teljes munka éppen annyival kevesebb, mint az ohmos előtét-ellenálláson végzett munka volt. Így a megtakarított energia egyenlő az ohmikus előtét-ellenállás által elhasznált energiával, 60 Wh-val.

Mekkora legyen az előtét kapacitása? A kondenzátorra jutó feszültség most:

$U_{C\,\mathrm{eff}} = \sqrt{U^2_{\mathrm{eff}} - U^2_{R\,\mathrm{eff}}} = \sqrt{220^2 - 70^2} = 208$ V.

(Tessék a forgó vektorok ábrájára gondolni!)

Ezt felhasználva:

$X_C = \dfrac{U_{C\,\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}}$;

$\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{U_{C\,\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}}$;

$C = \dfrac{I_{\mathrm{eff}}}{U_{C\,\mathrm{eff}} \cdot \omega} = \dfrac{0{,}1\ \mathrm{A}}{208\ \mathrm{V} \cdot 314\ \mathrm{s^{-1}}} = 1{,}53 \cdot 10^{-6}$ F;

$C = 1{,}53\ \mu$F.

20. Az elnevezés a bekötéstől függ. Azt a tekercset, amelyre a transzformálandó feszültséget kapcsoljuk primer tekercsnek nevezzük. A másik, amelyen a transzformált feszültség mérhető, a szekunder tekercs. A szekunder tekercs meneteinek száma nagyobb, ha feltranszformálásról van szó. Letranszformálás esetén a primer tekercs a nagyobb menetszámú (pl. a csengőreduktor ilyen transzformátor).

21. A primer tekercs áramának fázisállandója a nyitott szekunder tekercs esetében kicsit kisebb $\dfrac{\pi}{2}$ -nél, terhelt szekunder tekercs esetében ennél a terheléstől függően jóval kisebb.

A primer tekercs ohmos ellenállása kicsi az induktív ellenálláshoz képest, vagyis $R \ll L\omega$; tehát impedanciája:

$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \approx L\omega.$

A primer tekercs majdnem úgy viselkedik, mint egy tiszta induktív ellenállás. Ez azt jelenti, hogy az áram majdnem $\dfrac{\pi}{2}$ -vel késik fázisban a feszültséghez képest, a $\cos\varphi \approx 0$; a primer kör fogyasztása zérus.

Ha a szekunder kört R ellenállású fogyasztóval terheljük, a szekunder tekercsben is folyik áram, a fogyasztó teljesítményt vesz fel. Honnan? A primer tekercsből. És a primer tekercs? Az áramforrásból. Terhelésekor a primer kör is fogyaszt, tehát $\cos\varphi > 0$; vagyis $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$. A primer áram és feszültség fáziskülönbségének csökkenését a szekunder körben folyó áramnak a primer körre való visszahatásaként értelmezhetjük.

22. Az ideális transzformátorban a primer és szekunder oldali teljesítmények egyenlők $P_p = P_{sz}$.

Feltételezve, hogy a feszültség és az áram fázisának különbsége a két oldalon egyenlő, egyenletünket:

$U_p \cdot I_p = U_{sz} \cdot I_{sz}$

alakban is írhatjuk.

A valóságban a teljesítmények egyenlősége nem áll fenn, mert a tekercsek ohmikus ellenállása következtében veszteség lép fel, és a vasmagban indukált örvényáramok munkája is veszteség.

Egyenletünkből a szekunder kör árama:

$$I_{sz} = \frac{U_p}{U_{sz}} I_p .$$

A menetszámok aránya viszont megegyezik a feszültségek arányával, tehát:

$$\frac{U_p}{U_{sz}} = \frac{N_p}{N_{sz}} .$$

Így a szekunder áram:

$$I_{sz} = \frac{N_p}{N_{sz}} I_p = \frac{600}{1000} 0{,}025 \text{ A} = 0{,}015 \text{ A}.$$

A szekunder oldal ellenállása Ohm törvénye alapján:

$$R_{sz} = \frac{U_{sz}}{I_{sz}} = \frac{U_p \frac{N_{sz}}{N_p}}{I_{sz}} = \frac{U_p \cdot N_{sz}}{I_{sz} \cdot N_p} = \frac{110 \cdot 1000}{0{,}015 \cdot 600} \text{ ohm};$$

$\underline{R_{sz} \approx 12\,200 \text{ ohm}}$.

21.23.

a) $\underline{f = 50 \text{ s}^{-1}}$.

b) $\underline{\omega = 314 \text{ s}^{-1}}$.

c) $\underline{U = 154{,}5 \text{ V}}$.

d) $\underline{U = 475{,}5 \text{ V}}$.

21.24. $\frac{1}{2}$ részben.

21.25. $U_{eff} = \frac{-U_0}{\sqrt{2}}$.

21.26. $\underline{t = 20 \text{ h}}$.

21.27. *a)* fázisban $\frac{\pi}{2}$; időben $\frac{T}{4}$ a késés.

b) fázisban $-\frac{\pi}{2}$; időben $-\frac{T}{4}$ a késés.

21.28.

a) $\underline{U_{eff} = 70{,}7 \text{ V}}$; $\underline{I_{eff} = 0{,}35 \text{ A}}$.

b) $\underline{f = 16{,}67 \text{ s}^{-1}}$; $\underline{\omega = 106{,}7 \text{ s}^{-1}}$.

c) Fáziskülönbség $= \frac{\pi}{3} = 60°$.

d) $\underline{Z = 200 \text{ ohm}}$.

21.29.

$\underline{L = 0{,}33 \text{ H}}$.

21.30.

a) $\underline{U_{L\,eff} = 160{,}9 \text{ V}}$.

b) $\underline{R = 30 \text{ ohm}}$; $\underline{L = 0{,}1 \text{ H}}$.

21.31.

$\underline{L = 0{,}036 \text{ H}}$.

21.32.

a) $\underline{R = 44 \text{ ohm}}$;

b) $\underline{L = 0{,}14 \text{ H}}$.

21.33. $\underline{R = 20 \text{ ohm}}$; $\underline{C = 81\ \mu\text{F}}$.

21.34. $\underline{f = 22{,}5 \text{ s}^{-1}}$.

21.35. $\underline{R = 104 \text{ ohm}}$.

21.36.

a) $\underline{C = 32\ \mu\text{F}}$.

b) $\underline{U_R = 98{,}5 \text{ V}}$; $\underline{U_C = 197 \text{ V}}$.

c) $\underline{\varphi \approx 63°}$.

21.37. $\underline{N_1 = 200}$.

21.38. Legyen $U = \frac{U_0}{2}$ a t_1 időpontban és növekvő, illetve $U = \frac{U}{2}$

a t_2 időpillanatban és csökkenő. A feladat szerint:

$t_2 - t_1 = 0{,}0033$ s.

Az

$$\frac{U_o}{2} = U_o \cdot \sin \omega t;$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2}$$

egyenlet gyökei:

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad \omega t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\ k\pi \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{6} + 2\ k\pi\right); \quad t_2 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{5\pi}{6} + 2\ k\pi\right).$$

k azonos értékeihez tartozó t_1; t_2 időpontok feltételeiknek eleget tesznek, tehát:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega}\ \frac{4\pi}{6};$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{2\pi f}\ \frac{4\pi}{6};$$

$$f = \frac{1}{3 \cdot (t_2 - t_1)} = \frac{1}{3 \cdot 0{,}0033\ \mathrm{s}};$$

$$\underline{f = 100\ \mathrm{s}^{-1}.}$$

21.39. Annak az egyenáramnak az erősségét keressük, amely T idő alatt egy R ellenálláson ugyanannyi munkát végez, mint a diagrammal adott váltakozó áram.

Számoljuk ki először a váltakozó áram munkáját. Ha az áramerősség változik, akkor a munkáját mint a változó erő munkáját (lásd I. kötet 4.11.), rövid időtartamok alatt végzett munkák összegeként nyerhetjük:

$$W \approx \sum_i I_i^2 R \cdot \Delta t_i.$$

A munka pontos értékét ezen összeg határértéke adja:

$$W = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i I_i^2 \cdot R \cdot \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} I^2\ R\ dt.$$

Ahhoz, hogy az integrált kiszámíthassuk, fel kell írnunk az $I(t)$ függvényt. A $0 < t < \frac{T}{4}$ intervallumban az $I(t)$ függvény képe az origón áthaladó egyenes, melynek meredeksége $I_o : \frac{T}{4} =$ $= \frac{4I_o}{T}$; vagyis az $I(t)$ függvény $I = \frac{4I_o}{T}\ t.$

Áramunk munkája az első negyedperiódusban:

$$W_1 = \int_0^{T/4} \left(\frac{4\ I_o}{T}\ t\right)^2 R dt = \frac{4^2 I_o^2}{T^2}\ R \int_0^{T/4} t^2 dt = \frac{4^2 I_o^2}{T^2} R \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4};$$

$$W_1 = \frac{4^2 I_o^2}{T^2}\ R \frac{1}{3}\left(\frac{T}{4}\right)^3 = \frac{I_o^2}{4 \cdot 3} RT.$$

A teljes periódus alatt végzett munka ennek a négyszerese:

$$W = 4W_1 = \frac{I_o^2}{3} RT.$$

A keresett egyenáram munkája T idő alatt

$$W = I_{\mathrm{eff}}^2 \cdot RT.$$

A munkák egyenlőségének feltételéből:

$$I_{\mathrm{eff}}^2 \cdot RT = \frac{I_o^2}{3} RT;$$

$$\underline{I_{\mathrm{eff}} = \frac{I_o}{\sqrt{3}}.}$$

21.40. A váltakozó áram R ellenálláson végzett munkája egy periódus alatt:

$$W = \int_0^T I^2 R\ dt; \quad \text{(Lásd } \mathit{21.39.} \text{ feladat megoldását!)}$$

$$W = \int_0^T R\ I_o^2 \cdot \sin^2 (\omega\ t)\ dt = I_o^2\ R \int_0^T \sin^2 (\omega\ t)\ dt;$$

A trigonometriából ismert:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

azonosság felhasználásával:

$$W = I_0^2 R \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right) dt;$$

$$W = I_0^2 R \left\{\int_0^T \frac{1}{2}\, dt - \int_0^T \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\, dt\right\}.$$

$$W = I_0^2 R \left\{\frac{1}{2}\Big[t\Big]_0^T - 0\right\} = I_0^2 R \frac{1}{2} T.$$

A keresett I_{eff} egyenáram munkája T idő alatt ugyanazon az ellenálláson:

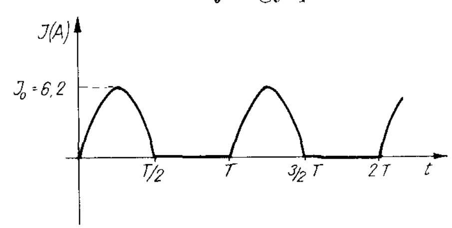
$$W = I_{eff}^2 R T.$$

A két munka egyenlő:

$$I_{eff}^2 R \cdot T = I_0^2 R \frac{1}{2} T; \longrightarrow \text{vagyis:}$$

$$\underline{I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.}$$

21.41. Az ellenálláson átfolyó áramot mint az idő függvényét az ábrán láthatjuk. Ezen áram munkája egy periódus alatt fele annak az

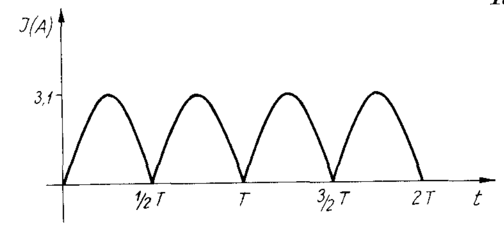


áramnak, amely egyenirányító nélkül folyna az ellenálláson, tehát az átlagos teljesítmény is fele az $I_0 \cdot \sin \omega t$ áram átlagos teljesítményének. ($I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{310\text{ V}}{50\text{ ohm}} = 6{,}2$ A.)

$$P_{átl} = \frac{\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R}{2} = \frac{I_0^2 R}{4} = \frac{6{,}2^2 \cdot 50}{4}\text{ W};$$

$$\underline{P_{átl} = 480{,}5\text{ W}.}$$

21.42. A kétoldalas egyenirányítás után létrejövő lüktető egyenáram alakja az ábrán látható. Az áram csúcsértéke $I_0 = \frac{U_0}{R}$.



Az ellenálláson fél periódus alatt:

$$Q_1 = \int_0^{T/2} I\, dt = \int_0^{T/2} I_0 \cdot \sin(\omega t)\, dt = I_0\left[-\frac{1}{\omega}\cos \omega t\right]_0^{T/2};$$

$$Q_1 = I_0\left[-\frac{1}{\omega}\cos\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} - \left(-\frac{1}{\omega}\cos 0\right)\right];$$

$$Q_1 = I_0\left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right] = \frac{2 I_0}{\omega}$$

töltés folyik át. $t = 1$ óra alatt $\frac{t}{T/2}$-ször több:

$$Q = \frac{2 I_0}{\omega} \cdot \frac{t}{\frac{T}{2}} = \frac{2\frac{U_0}{R}}{\frac{2\pi}{T}} \cdot \frac{t}{\frac{T}{2}} = \frac{2 U_0}{R\pi} t.$$

A keresett $U_{\text{átl}}$ egyenfeszültség árama által szállított töltés t idő alatt:

$$Q = \frac{U_{\text{átl}}}{R}t.$$

$$\frac{U_{\text{átl}}}{R}t = \frac{2\,U_0}{R\pi}t;$$

$$U_{\text{átl}} = \frac{2\,U_0}{\pi} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\,U_{\text{eff}}}{\pi} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot 220}{\pi}\ \text{V};$$

$$\underline{U_{\text{átl}} = 198\ \text{V}.}$$

21.43. Ha egy tekercs ohmos ellenállása R és induktivitása L; akkor az egyenárammal szembeni ellenállása R; míg váltakozó árammal szemben $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ ellenállást jelent. Ha R kicsi, és L nagy, a tekercs ellenállása váltakozó árammal szemben sokkal nagyobb, mint egyenárammal szemben.

21.44. A kondenzátor és az ohmos ellenállás együttes impedanciája:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \left[\frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 50\cdot 10^{-6}}\right]^2}\ \text{ohm} = 81\ \text{ohm}.$$

A körben

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{220\ \text{V}}{81\ \text{ohm}} = 2{,}7\ \text{A}$$

erősségű áram folyik, amelynek csúcsértéke:

$$I_0 = \sqrt{2}\cdot I_{\text{eff}} = 3{,}8\ \text{A}.$$

A *26.16.* feladat megoldásában láttuk, hogy a sorbakapcsolt ohmos ellenállás és kondenzátorból álló kapcsolási elem sarkain levő feszültséghez képest az áram fázisban siet, vagyis ha a feszültséget az

$$U = U_0\cdot\sin\omega t$$

függvény írja le, akkor az áramot az:

$$I = I_0\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$

alakban adhatjuk meg. Eszerint a feszültség a $t = 0 + k\dfrac{T}{2}$ pillanatokban nulla.

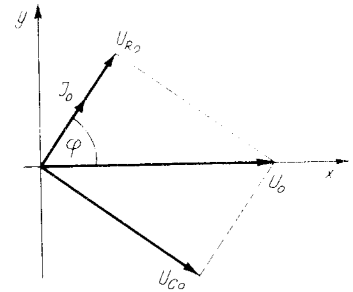
Az áram pillanatnyi értéke ekkor:

$$I\left(t = 0 + k\frac{T}{2}\right) = \pm I_0\cdot\sin\varphi.$$

$I > 0$, ha $k = 2n =$ páros;

$I < 0$, ha $k = 2n + 1 =$ páratlan.

A $\sin\varphi$ értékének meghatározása végett rajzoljuk fel az U_R; U_C; U; I sinusosan változó mennyiségeket ábrázoló forgóvektorokat a $t = 0$ pillanatban. (U_R és I fázisban vannak, U_C $\dfrac{\pi}{2}$-vel késik I-hez viszonyítva.)



Az ábráról leolvasható, hogy:

$$\sin\varphi = \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{I_0 X_C}{I_0 Z} = \frac{1}{\omega C Z};$$

tehát az áramerősség abszolút értéke azokban a pillanatokban, amikor $U = 0$:

$$I\,(t = 0) = I_0\cdot\sin\varphi = I_0\frac{1}{\omega C Z} = 3{,}8\frac{1}{314\cdot 50\cdot 10^{-6}\cdot 81};$$

$$\underline{I\,(t = 0) = 3\ \text{A}.}$$

45. Az egyes tekercsek impedanciái:

$$Z_1 = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}} = \frac{110\ \text{V}}{1{,}08\ \text{A}} = 101{,}85\ \text{ohm};$$

$$Z_2 = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{2\,\text{eff}}} = \frac{110\ \text{V}}{0{,}86\ \text{A}} = 127{,}9\ \text{ohm}.$$

Másrészt:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2}; \qquad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_L^2}.$$

Ha a vastagabb huzal esetén a tekercs ohmikus ellenállása $R_1 = R$, a vékony huzalnál $R_2 = 4R$, mert a huzal keresztmetszetének területe negyede a vastagabbénak. Ezt figyelembe véve az impedanciák négyzetei:

$$Z_1^2 = R^2 + X_L^2 \quad Z_2^2 = (4R)^2 + X_L^2.$$

Ebből:

$$R = \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{15}} = 20 \text{ ohm}.$$

A keresett fáziskülönbségek:

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{Z_1}; \qquad \cos\varphi_2 = \frac{4R}{Z_2};$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{20}{101{,}85}; \qquad \cos\varphi_2 = \frac{80}{127{,}9};$$

$$\underline{\varphi_1 = 79°}; \qquad \underline{\varphi_2 = 51°.}$$

21.46. Az eredő impedancia:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Az $U_{\text{eff}} = 220$ V hatására folyó áram:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z};$$

amely maximális, ha a kondenzátor kapacitásának változtatása miatt változó Z a legkisebb lesz, vagyis az $L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0$ esetben. Ekkor:

$Z = R$; tehát:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R};$$

és ebből a tekercs ellenállása:

$$R = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{220 \text{ V}}{0{,}15 \text{ A}};$$

$$\underline{R = 1467 \text{ ohm.}}$$

A tekercs ohmos és induktív ellenállásának eredője:

$$Z_L = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2};$$

vagy a tekercsre jutó feszültség és áramerősség ismeretében:

$$Z_L = \frac{U_{L\,\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}.$$

Z_L két kifejezését egybevetve:

$$\frac{U_{L\,\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2};$$

amelyből:

$$L = \frac{\sqrt{\frac{U_{L\,\text{eff}}^2}{I_{\text{eff}}^2} - R^2}}{\omega};$$

$$\underline{L = 7{,}3 \text{ H.}}$$

21.47. Ha a váltakozó áram munkája T periódusidő alatt W, akkor az átlagos teljesítmény:

$$P_{\text{átl}} = \frac{W}{T}.$$

Az átlagos teljesítmény meghatározásához először ki kell számítani T idő alatt végzett munkát. Ha a feszültséget és az áramerősséget az:

$$U = U_0 \cdot \sin\omega t = \sqrt{2}\, U_{\text{eff}} \cdot \sin\omega t;$$

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\, I_{\text{eff}} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

függvények írják le, Δt idő alatt végzett munka:

$$U(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot 2 \cdot \sin\omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \Delta t.$$

A T idő alatt végzett munka az egymást követő Δt_i időtartamok alatt végzett munkák összegének határértéke, miközben minden $\Delta t \to 0$, tehát:

$$W = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Sigma\, U(t_i) \cdot I(t_i) \cdot \Delta t_i = \int_0^T U(t) \cdot I(t) dt;$$

$$W = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \int_0^T 2 \sin\omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)\, dt.$$

Figyelembe véve az ismert

$2 \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

trigonometrikus azonosságot:

$$W = U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\int_0^T [\cos(-\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)]\,dt;$$

$$W = U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\left[\int_0^T \cos\varphi\,dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\,dt\right];$$

$$W = U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\left[(\cos\varphi)\,T - 0\right] = T U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\cdot\cos\varphi.$$

A második integrálról könnyen láthatjuk, hogy nulla.

$$\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\,dt = \left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + \varphi)\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{2\omega}(\sin\varphi - \sin\varphi) = 0.$$

Az átlagos teljesítmény eredményünk szerint:

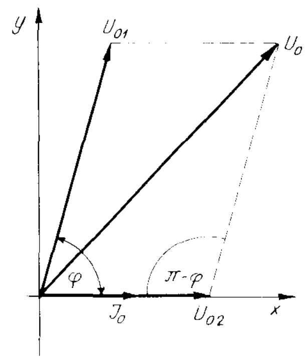
$$P_{\text{átl}} = \frac{T\,U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\cdot\cos\varphi}{T} = U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\cdot\cos\varphi.$$

21.48. Az áram teljesítménye a tekercsen:

$$P = U_{1\,\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\cdot\cos\varphi;$$

$$P = U_{1\,\text{eff}}\,\frac{U_{R\,\text{eff}}}{R}\,\cos\varphi;$$

ha φ az áram és a tekercs sarkain levő feszültség fázisának különbsége.



Az ábrán az egyes elemek sarkain levő feszültségek és áram pillanatnyi értékét ábrázoló I_0; U_{20}; U_0; U_{10} forgóvektorokat látjuk abban a pillanatban, amikor $I = 0$. A forgóvektorok hosszai között a koszinusztétel alapján fennáll az:

$$U_0^2 = U_{01}^2 + U_{02}^2 - 2\,U_{01}\,U_{02}\cdot\cos\varphi$$

összefüggés, melyet 2-vel végigosztva kapjuk:

$$U_{\text{eff}}^2 = U_{1\,\text{eff}}^2 + U_{2\,\text{eff}}^2 - 2\,U_{1\,\text{eff}}\cdot U_{2\,\text{eff}}\cdot\cos\varphi.$$

Ebből:

$$U_{1\,\text{eff}}\cdot U_{2\,\text{eff}}\cdot\cos\varphi = \frac{U_{\text{eff}}^2 - U_{1\,\text{eff}}^2 - U_{2\,\text{eff}}^2}{2}.$$

Ezt beírva a teljesítmény kifejezésébe:

$$\underline{P = \frac{U_{\text{eff}}^2 - U_{1\,\text{eff}}^2 - U_{2\,\text{eff}}^2}{2\,R}.}$$

21.49. A teljes körben leadott átlagos teljesítmény, ha φ az áram és a feszültség fázisának különbsége:

$$P_{\text{átl}} = U_{\text{eff}}\cdot I_{\text{eff}}\cdot\cos\varphi.$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z};\qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z};\quad \text{tehát:}$$

$$P_{\text{átl}} = U_{\text{eff}}^2\,\frac{R}{Z^2} = \frac{U_0^2}{2}\,\frac{R}{Z^2};$$

$$P_{\text{átl}} = \frac{U_0^2}{2}\,\frac{R}{\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}.$$

Ez akkor maximális, ha a nevező minimális, tehát $L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0$ esetben. Ebből a keresett kapacitás értéke:

$$\underline{C = \left[\frac{1}{\omega^2 L}\right];}$$

és a maximális teljesítmény:

$$\underline{P_{\text{átl, max}} = \frac{U_0^2}{2R}.}$$

21.50. A generátor feszültségét azért transzformálják fel, mert így csökkenthető a távvezeték ohmos ellenállása miatt fellépő energiaveszteség.

Legyen P a generátor által időegységenként „termelt" energia, vagyis a generátor teljesítménye. Ennek az energiának egy része a távvezetéket melegíti, másik része a fogyasztó berendezéseit működteti: motorokat forgat, melegít, fényt áraszt stb.

Ha a távvezetéknek az erőműnél levő két vége között U_{eff} a feszültség, akkor a távvezetékben folyó áramerősség

$$I_{eff} = \frac{P}{U_{eff}} \qquad \text{A } P \text{ teljesítmény } I_{eff}^2 R_v = \frac{P^2}{U_{eff}^2} R_v$$

része a távvezetéket melegíti, ha R_v a távvezeték ellenállása. A fogyasztóhoz kevesebb energia jut, mint amennyit a generátor termel. A veszteség csökkentése két módon lehetséges.

1. Csökkentjük a távvezeték ellenállását R_v-t. Ennek határt szab az a tény, hogy az ellenállás csökkentése a vezeték vastagságának növelésével lehetséges, ami jelentősen növelné a felhasznált réz, illetve alumínium mennyiségét. Ugyanakkor a vezeték súlya is növekedne, amely erősebb, tehát drágább tartóoszlopok építését tenné szükségessé. Így R_v csökkentése bizonyos határon túl nem gazdaságos.

2. Növeljük az U feszültséget. Ha például U-t kétszeresére növeljük a veszteség negyedére csökken a generátor változatlan P teljesítménye mellett. A generátor teljesítményének változatlanságára vonatkozó feltétel nagyon fontos. Ha erre nem figyelünk, könnyen téves következtetésre jutunk.

Sokszor hallani a következő érvelést. A távvezeték feszültségének növelése nem csökkenti, hanem inkább növeli a veszteséget. Ugyanis, ha az R ellenállású fogyasztót R_v ellenállású távvezetékkel U feszültségre kötjük, akkor a vezetékre jutó feszültség:

$$U_v = \frac{U}{R_v + R} R_v ;$$

és így a távvezetékben fellépő veszteség:

$$\frac{U_v^2}{R_v} = \frac{U^2}{(R_v + R)^2} R_v ;$$

tehát a veszteség arányos a feszültség négyzetével. Ha például a feszültséget megkétszerezzük, a veszteség megnégyszereződik. Hol a hiba? Ezt felderítendő számítsuk ki a generátor teljesítményét. U feszültség esetén:

$$P = \frac{U^2}{R_v + R} .$$

Ha csak a feszültséget változtatnánk, ez is megváltozna. Kétszeres feszültség esetén megnégyszereződne. Igen, de feltételünk szerint a generátor teljesítménye állandó. Ez csak úgy lehet, ha a feszültség növelése mellett R növelésével az $R + R_v$ összellen-

állást is növeljük. Számpéldánknál maradva, a teljesítmény nem változik a feszültség kétszeresre növelésekor, ha az $R + R_v$ összellenállást megnégyszerezzük. ($R_v \ll R$ miatt R-et növeljük kb. négyszeresére.) Emiatt a veszteség tizenhatodára csökken. A veszteség a feszültség növelése miatt négyszereződik, az összellenállás növelése miatt tizenhatszor kisebb lesz, végeredményben negyedére csökken.

1.51. A távvezetékben folyó áram erőssége, ha az erőműnél levő két vége között $U_1 = 220$ V; illetve $U_2 = 10^4$ V a feszültség:

$$I_1 = \frac{P}{U_1}; \qquad I_2 = \frac{P}{U_2} .$$

A teljesítményveszteség az $R = 10$ ohm ellenállású vezetéken

$$P_1 = I_1^2 R = \frac{P^2}{U_1^2} R \qquad P_2 = I_2^2 R = \frac{P^2}{U_2^2} R$$

A fogyasztóra marad:

$$P - P_1; \qquad P - P_2;$$

amelynek viszonya az összes teljesítményhez:

$$\eta_1 = \frac{P - P_1}{P} = 1 - \frac{P_1}{P} = 1 - \frac{P}{U_1^2} R;$$

$$\eta_2 = \frac{P - P_2}{P} = 1 - \frac{P_2}{P} = 1 - \frac{P}{U_2^2} R;$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{10^3}{220^2} 10 = 0{,}7934;$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{10^3}{(10^4)^2} 10 = 0{,}9999;$$

$$\underline{\eta_1 = 79{,}34\%}; \qquad \underline{\eta_2 = 99{,}99\%}.$$

A számítás is azt mutatja, hogy magasfeszültségű távvezeték alkalmazása nagyon gazdaságos.

1.52. A szekunder, illetve primer tekercsek sarkain levő feszültségek aránya egyenlő a megfelelő menetszámok arányával

$$\frac{N_{sz}}{N_p} = \frac{3300 \text{V}}{100 \text{ V}} = 33.$$

A feszültségmérőhöz csatlakozó huzal, amely a vasmagot egyszer körülveszi, tulajdonképpen egy 1 menetű szekunder tekercs, vagy is:

$$\frac{N_p}{1} = \frac{100\ \text{V}}{0{,}5\ \text{V}};$$

$$N_p = 200.$$

$$N_{sz} = N_p \cdot 33;$$

$$\underline{N_{sz} = 6600.}$$

21.53. *a)* A tekercs végein $U = U_o \cdot \sin\omega t$ a pillanatnyi feszültség. Ennek hatására a tekercsben folyó áram fázisa $\pi/2$-vel kisebb és csúcsértéke $I_{Lo} = U_o\ X_L$.
(Lásd a *21.13.* feladatot!)

$$I_L(t) = I_{Lo} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$I_L(t) = \frac{U_o}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$X_L = L\,\omega = 0{,}1 \cdot 3140\ \text{ohm} = 314\ \text{ohm};$$

$$I_{Lo} = \frac{U_o}{X_L} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220\ \text{V}}{314\ \text{ohm}} = 0{,}99\ \text{A};$$

$$\underline{I_L(t) = 0{,}99 \cdot \sin\left(3140\,t - \frac{\pi}{2}\right)\ [\text{A}].}$$

b) A kondenzátor sarkain ugyancsak $U = U_o \cdot \sin\omega t$ a pillanatnyi feszültség. A kondenzátor árama ehhez képest $\frac{\pi}{2}$-vel siet, fázisban és csúcsértéke $I_{Co} = \frac{U_o}{X_C}$; tehát:

$$I_C(t) = I_{Co} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_o}{X_C} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{3140 \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-6}}\ \text{ohm} = 250\ \text{ohm};$$

$$I_{Co} = \frac{U_o}{X_C} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220\ \text{V}}{250\ \text{ohm}} = 1{,}24\ \text{A};$$

$$I_C(t) = 1{,}24 \cdot \sin\left(3140\,t + \frac{\pi}{2}\right)\ [\text{A}];$$

c) A főágban folyó áram az egyes ágak áramának összege: Vigyázat, ez a pillanatértékekre igaz!

$$I(t) = I_L(t) + I_C(t);$$

$$I(t) = \frac{U_o}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U_o}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Felhasználva, hogy:

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$I(t) = U_o \cdot \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);\ \text{vagy:}$$

$$I(t) = U_o \left|\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right| \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = I_o \cdot \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right);$$

melyben a fázisállandó:

$$+\frac{\pi}{2};\quad \text{ha}\ \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} > 0.$$

$$-\frac{\pi}{2};\quad \text{ha}\ \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} < 0.$$

Feladatunkban:

$$\underline{I(t) = 0{,}25 \cdot \sin\left(3140\,t + \frac{\pi}{2}\right)\ [\text{A}].}$$

d) a párhuzamos L, C kör impedanciája:

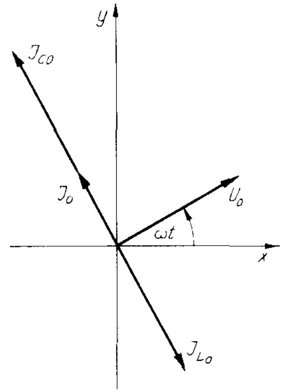
$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_o}{I_o} = \frac{U_o}{U_o\left|\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right|};$$

$$Z = \frac{1}{\left|\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right|}$$

Adatainkkal:

$$\underline{Z = 1240\ \text{ohm}.}$$

Az ábrán az $I_C(t)$; $I_L(t)$; $I(t)$; $U(t)$ sinusosan változó mennyiségeket ábrázoló forgóvektorok láthatók a $0<t<T/4$ pillanatban. Az ábráról jól látható, hogy a paralel L; C kör hatására a főágban az áram fázisban siet vagy késik $\pi/2$-vel a feszültséghez képest attól függően, hogy



$I_{C0} > I_{L0}$; $\left(\frac{1}{X_C} > \frac{1}{X_L}\right)$;

illetve:

$I_{C0} < I_{L0}$; $\left(\frac{1}{X_C} < \frac{1}{X_L}\right)$.

21.54. A *21.53.* feladatban láttuk, hogy a főágban folyó áramerősség:

$$I = U_0\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

A kapcsolásban jelzett műszer ezen áram effektív értékét méri. Ez akkor nulla, ha az áram csúcsértéke nulla, vagyis ha:

$$U_0\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = 0;$$

$$X_C = X_L; \quad \frac{1}{\omega C} = L\omega; \quad C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L};$$

$\underline{C = 0{,}125\ \mu F.}$

Az $I = 0$ esetben áramrezonanciáról beszélünk. Ekkor a kör impedanciája $X_C = X_L$ miatt $Z = \infty$, és a tekercsen, illetve a kondenzátoron átmenő áramok nullától különböznek. Az ohmos ellenállást számolásainknál zérusnak vettük. Ez pontosan nem valósítható meg, így az itt leírt áramrezonancia-jelenség is a valóságban kicsit más.

21.55. Az R ellenállás és a tekercs sarkain ugyanaz az $U = U_0 \cdot \sin \omega t$ váltakozó feszültség van.
Ennek hatására az R ellenálláson a feszültséggel fázisban levő áram folyik.

$$I_R(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \sin \omega t; \quad \left(\frac{U_0}{R} = I_{R0}\right).$$

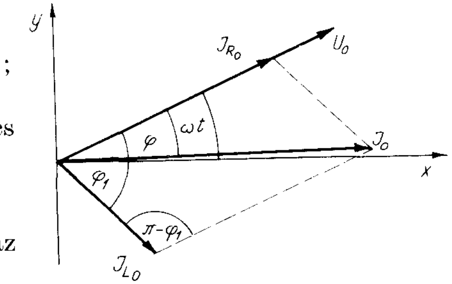
A tekercsen átfolyó áram fázisban késik a sarkain levő feszültséghez képest. (Lásd *21.14.* feladatot!)

$$I_L(t) = \frac{U_0}{Z_1}\sin(\omega t - \varphi_1);$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{r}{Z_1}; \quad \left(\frac{U_0}{Z_1} = I_{L0}\right);$$

ahol Z_1 a veszteséges tekercs impedanciája:

$Z_1 = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$.



A főágban folyó áram az előbbiek összege:

$I(t) = I_R(t) + I_L(t)$.

Az áramokat és a kapocsfeszültséget ábrázoló forgóvektorokat feltüntető ábráról:

$I = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$; $(\varphi \neq \varphi_1)$,

$I_0^2 = I_{R0}^2 + I_{L0}^2 - 2I_{R0} \cdot I_{L0} \cdot \cos(\pi - \varphi_1)$; (koszinusztétel.)

$I_0^2 = I_{R0}^2 + I_{L0}^2 + 2I_{R0} \cdot I_{L0} \cdot \cos\varphi_1$.

Ezt az egyenlőséget $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$-vel osztva:

$I_{eff}^2 = I_{R\,eff}^2 + I_{L\,eff}^2 + 2I_{R\,eff} \cdot I_{L\,eff} \cdot \cos\varphi_1$.

A teljesítmény a tekercsen:

$P = U_{eff} \cdot I_{L\,eff} \cdot \cos\varphi_1$;

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{I_{R0} \cdot R}{\sqrt{2}} = I_{R\,eff} \cdot R;$$

$P = R \cdot I_{R\,eff} \cdot I_{L\,eff} \cdot \cos\varphi_1$.

Felhasználva az áramok effektív értékeire kapott összefüggést:

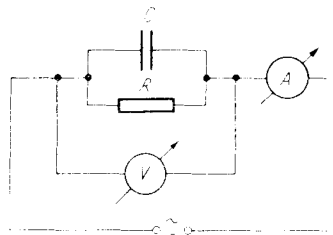
$$I_{R\,eff} \cdot I_{L\,eff} \cdot \cos\varphi_1 = \frac{I_{eff}^2 - I_{R\,eff}^2 - I_{L\,eff}^2}{2}; \quad \text{tehát:}$$

$$P = \frac{R(I_{eff}^2 - I_{R\,eff}^2 - I_{L\,eff}^2)}{2}.$$

Adatainkkal: $\underline{P = 500\ W.}$

21.56. Veszteséges kondenzátoron keresztül egyen- és váltakozó áram egyaránt folyhat. A kétféle árammal szemben tanúsított ellenállása különböző. Ezért az ilyen kondenzátort úgy kell kezelni, mint egy R ellenállású ohmikus ellenállást, amellyel párhuzamosan van kötve egy C kapacitású ideális kondenzátor.

Az ábra szerinti kapcsolásban műszereinkről leolvasott értékből kiszámíthatjuk a veszteséges kondenzátor ellenállását. Egyenáram esetén:



$$R = \frac{U}{I};$$

váltakozó áram esetén:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}.$$

Ezen adatokból a kapacitást meghatározhatjuk, ha ismerjük, hogyan függ Z R-től és C-től. Ezt megismerendő gondoljuk meg a következőket.

Váltakozó áram esetén mind az ideális kondenzátor, mind az R ohmos ellenállás sarkain ugyanaz az $U = U_0 \cdot \sin \omega t$ váltakozó feszültség van, melynek hatására az R ágban a feszültséggel megegyező fázisú I_R, a C ágban a feszültség fázisánál $\frac{\pi}{2}$-vel nagyobb fázisú I_C áram folyik.

$$I_R = I_{R0} \cdot \sin \omega t; \qquad I_{R0} = \frac{U_0}{R};$$

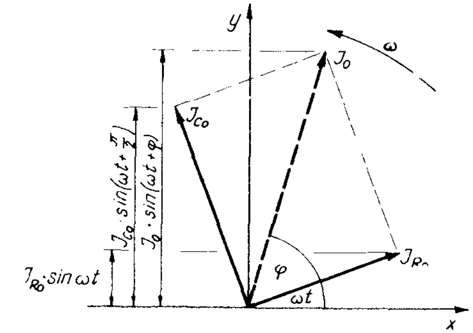
$$I_C = I_{C0} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \qquad \left(I_{C0} = \frac{U_0}{X_C} = \frac{U_0}{\frac{1}{C\omega}}\right)$$

Az árammérőn keresztül ezen két áram összege folyik:

$$I = I_{R0} \cdot \sin\omega t + I_{C0} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

A sinusosan változó áramokat ábrázoló forgóvektorokat tünteti fel az ábra, amelyről leolvasható, hogy:

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi); \qquad I_0 = \sqrt{I_{R0}^2 + I_{C0}^2} \text{ és } \operatorname{tg}\varphi = \frac{I_{C0}}{I_{R0}}.$$



A veszteséges kondenzátor váltakozó áramú ellenállása:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{\sqrt{I_{R0}^2 + I_{C0}^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{U_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_0}{X_C}\right)^2}};$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}}.$$

Ebből:

$$\frac{1}{X_C^2} = \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R^2};$$

$$C^2\omega^2 = \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R^2};$$

$$C = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R^2}}.$$

Mérési adatainkkal:

$$\underline{C = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}}\right)^2 - \left(\frac{I}{U}\right)^2}.}$$

22. Molekuláris fizika

22.1. Természetesen lehet. (A gáz halmazállapotú higanyt leginkább „higanygőz"-nek hívják.) Minden meghatározott kémiai összetételű anyagnak lehetséges gáz halmazállapota. Atmoszferikus nyomáson például a higany 357 °C (= 630 K) hőmérsékleten „forr". Pontosabban: a higany telített gőzének nyomása ezen a hőmérsékleten $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Ugyanakkor a szobahőmérsékletű higanygőz nyomása 0,13 Pa. Ilyen nyomású higanygőz helyezkedik el a higanyszint felett a Torricelli-féle kísérletben vagy a szobahőmérsékletet mérő hőmérőben. Érdemes azt is megemlíteni, hogy −40 °C-nál alacsonyabb hőmérsékleten a higany már csak szilárd és gáz halmazállapotban fordulhat elő.

22.2. A normál állapotú ($p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, $T = 273$ K) ideális gáz 22,4 liternyi térfogatának anyagmennyisége 1 mol, annyi gramm, amennyi az illető gáz molekulasúlya (oxigén: 32 gramm, hidrogén: 2 gramm, hélium: 4 gramm, vízgőz: 18 gramm stb.). Avogadro törvénye szerint bármely kémiailag tiszta anyag 1 molnyi mennyisége $6 \cdot 10^{23}$ molekulából áll.

Ezt a számot nevezik Avogadro-számnak is, meg Loschmidt-számnak is.

22.3. Mivel az oxigénatom tömegszáma (atomsúlya) 16, és egy oxigénmolekula két oxigénatomból áll, ezért 32 gramm oxigénben van $6 \cdot 10^{23}$ molekula. Egyetlen molekula tömege tehát:

$$m^* = \frac{32 \text{ gramm}}{6 \cdot 10^{23}} = 5{,}3 \cdot 10^{-23} \text{ gramm.}$$

22.4. Az ideális gáz esetében elhanyagoljuk
a) a molekulák saját térfogatát az edény térfogatához képest;
b) a molekulák kölcsönhatási potenciális energiáját a kinetikus energiájukhoz képest.

Ezek az elhanyagolások a valódi gázokra is tág határokon belül érvényesek, de egyetlen valódi gázra sem érvényesek minden határon túl.

22.5. Vigyázat, beugratós kérdés! A szilárd anyagok kristályrácsában két atom egymástól való távolsága több, mint 10^{-10} méter. Ha az alumínium kristályrácsába egy ilyen élhosszú kockát képzelünk bele, még az is lehet, hogy ez teljesen üres lesz! A helyes válasz tehát az, hogy ilyen élhosszúságú alumínium kocka már nincs, értelmetlen dolog beszélni róla.

22.6. $6 \cdot 10^{23}$ molekula van 1 mol vízben, vagyis (H_2O): $1 + 1 + 16 = 18$ gramm vízben.

Ennek térfogata 18 cm³, mivel a víz sűrűsége $1 \frac{g}{cm^3}$. Ez kb. egy evőkanálnyi mennyiség.

22.7. A hőmozgás a molekulák rendezetlen mozgása. Gáz, cseppfolyós és szilárd halmazállapotban egyaránt megvan. Csakhogy amíg a gáz molekulái az edény teljes térfogatát bejárhatják rendezetlen mozgásuk közben, addig a szilárd anyagok kristályrácsát alkotó molekulák, atomok vagy ionok főleg saját, un. egyensúlyi helyzetük környezetében végezhetnek rendezetlen rezgőmozgást. A rendezetlen mozgáshoz tartozó energia átlagos értéke elsősorban attól függ, mennyi az anyag hőmérséklete. Ezért nevezik a rendezetlen mozgást hőmozgásnak.

22.8. A mechanika törvényei a mechanikai módszerekkel megfigyelhető, makroszkopikus folyamatokra vonatkoznak. Ez azt jelenti, hogy a mikroszkopikus méretű testekre, amelyek mozgását makroszkopikusan nem tudjuk követni, legfeljebb feltételezhetjük, hogy igazak a mechanika törvényei. A feltételezés helyességét a belőle levonható következtetések helyességének vizsgálatával dönthetjük el.
Tapasztalat szerint azokban a folyamatokban, ahol a molekula belső tulajdonságainak változását nem kell feltételeznünk (kémiai reakciók, ionizáció, gerjesztés nem történnek), ott a mechanika törvényeinek érvényességét az egyes molekulákra is joggal tételezhetjük fel.

22.9. A belső energia a molekulák rendezetlen mozgásából (és helyzetéből) származó energiák összege. (Mivel a rendezetlen mozgást hőmozgásnak is nevezik, ezért a belső energiát félreérthető szóhasználattal „hőenergiának" is mondták régen.)
A felmelegedett nyugvó labdának nagyobb a belső energiája, mint a hideg, sebesen mozgó labdának. A m o z g ó labda molekuláinak energiája két részből tehető össze:
a) a rendezetlen energia (belső energia),
b) a rendezett energia (a labda makroszkopikus mozgásából adódó energia). Ez utóbbi azért „rendezett", mert a labda valamennyi molekulája azonos irányban mozdul el akkor, amikor az egész labda elmozdul. A n y u g v ó labda molekuláinak csak rendezetlen energiájuk van. Ez a rendezetlen vagy belső energia pedig a melegebb labda esetén nagyobb.
Fontos megjegyezni, hogy egyetlen különálló molekula esetén nem beszélhetünk rendezett vagy rendezetlen energiáról. Ez a fogalom csak nagyszámú molekulából álló rendszerre értelmezhető.

22.10. Ha egyetlen molekulát tekintünk, akkor c s a k munkavégzésről beszélhetünk. A munkatétel értelmében a molekula mozgási energiáját a rajta végzett (pozitív vagy negatív) munka változtatja meg.
Ha azonban nagyszámú molekulából álló rendszer kollektív viselkedését vizsgáljuk, akkor az egyes molekulákon végzett munkák együttesét már több csoportba oszthatjuk:
a) Azok a munkák, amelyeket a rendszerhez tartozó molekulák e g y m á s o n végeznek;
b) azok a munkák, amelyeket a rendszerhez nem tartozó molekulák vagy külső erőterek végeznek valamilyen r e n d e z e t t módon;
c) azok a munkák, amelyeket a rendszerhez nem tartozó molekulák vagy külső erőterek végeznek teljesen r e n d e z e t l e n ü l.
Az *a)* esetben a munkavégzés legtöbbször a molekulák potenciális energiájának megváltozásával helyettesíthető, és az így értelmezett potenciális energia a belső energiának része.
A *b)* esetben beszélünk makroszkopikus munkavégzésről, a *c)* esetben pedig hőközlésről.
A hőközlés tehát csak makroszkopikusan értelmezett fogalom. Egyetlen molekulával nem lehet hőt közölni, csak a molekulák rendszerével!

22.11. Egyetlen különálló molekulának nem beszélhetünk a hőmérsékletéről. Nincs neki. A hőmérséklet olyan tulajdonság, amely csak nagyszámú molekulából álló rendszerre értelmezhető és mérhető. Hasonló tulajdonságok még: nyomás, felületi feszültség, húzófeszültség, nyírófeszültség stb. Nem értelmezhetők egyetlen molekulára a következő fontosabb fogalmak sem: súrlódás, hőközlés, elektromos vezetés. Az az igazság, hogy a makroszkopikus testek tulajdonságai érzékelésünk sokfélesége miatt nagyon szemléletesen és sokoldalúan értelmezhetők. A molekulák azonban mikroszkopikus testek, amelyek r e n d s z e r e adja a makroszkopikus testeket, azok összes tulajdonságával együtt. Nincs mit csodálkozni azon, hogy a rendszer jó néhány tulajdonsága nem érvényes, nem értelmezhető az egyes egyedekre. Inkább azon lehet csodálkozni, milyen sok olyan makroszkopikus tulajdonság van, amely a molekulára is értelmezhető. Ilyenek például: tömeg, energia, helyzet, sebesség, erőhatás, munkavégzés.

22.12. Szintén parabolapályán. Csakhogy a pályának nagyon rövid szakaszát tudja megtenni, azonnal ütközik egy másik molekulával. Útja így egy szabálytalan cikcakkos görbe lesz, amely nagyon rövid parabolaívekből tevődik össze. Egy-egy ilyen rövid parabolaív (hossza a normálállapotú levegőben tizedrésze a fény hullámhosszának) bátran egyenes szakasznak tekinthető, mivel a megtételéhez szükséges igen rövid idő alatt a mozgás iránya egy milliomodrésznyit sem változik.

22.13. A Föld makroszkopikusan szilárd (vagy cseppfolyós), sima felszíne szaporán izgő-mozgó molekulák halmaza. A „földre eső" – tehát beléjük ütköző – O_2; N_2 – molekulák átlagosan olyan energiával pattannak vissza róluk, amilyet a felszín hőmérséklete meghatároz. A molekulák ütközése rugalmas, energiájuk nem veszhet el. (Ha egyszerre valamennyi molekula „leesne" a Föld felszínére, akkor ez megsértené az energia megmaradásának törvényét.) Természetesen a levegő sűrűségének a magassággal való csökkenése a molekuláris képpel jól értelmezhető.

22.14. Nem változik meg. A levegő nyomását sűrűsége és hőmérséklete egyértelműen meghatározza. Ha az űrhajóban ugyanannyi marad a levegő sűrűsége (tömege és térfogata változatlan), valamint hőmérséklete is, akkor nincs okunk kételkedni abban, hogy nyomása is változatlan. Világosan kell látni azt, hogy a zárt edényben levő gáz n y o m á s a n e m s ú l y á b ó l s z á r-m a z i k ! A molekulák ugyanúgy ütköznek és együtt „rugdalják" a falat súlytalanság esetén, mint máskor. Ha súlyuk nincs is, tömegük azért van, és sebességük is. A falra ható nyomás szempontjából pedig ez a döntő.

22.15. Zérus. Ha nem ennyi lenne, akkor az egész gáz az eredő mozgásmennyiség irányában (az edénnyel együtt) mozogna.
Hasonló okoskodással beláthatjuk, hogy a s e b e s s é g v e k t o r o k átlaga is zérus. Az átlagsebesség szó tehát sohasem a sebesség v e k t o r o k átlagát jelenti a molekuláris fizikában, hanem leginkább a s e b e s s é g n é g y z e t e k (skaláris, pozitív mennyiségek) á t l a g á n a k n é g y z e t g y ö k é t .

22.16. *a)* $l \approx 10^{-7}$ m; $n \approx 10^9 \frac{1}{\mathrm{s}}$; $v \approx$?

Az egy másodperc alatt átlagosan megtett út:

$$v = l \cdot n \approx 10^{-7}\,\mathrm{m} \cdot 10^9 \frac{1}{\mathrm{s}} = 100 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehát az átlagsebesség $100 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nagyságrendű.

b) Repülőgép.

22.17. Tapasztalat szerint a Brown-mozgás annál élénkebb, minél magasabb az oldat hőmérséklete, és minél kisebb a festékszemcsék tömege. Tessék kipróbálni!

22.18. Egy mikroszkopikus mennyiségnek (kötési energia) a makroszkopikus mennyiségekből (párolgáshő stb.) való kiszámítása mindig izgalmas feladat. Hogyan hozható a kettő kapcsolatba egymással? Azt kell megvizsgálni, hogy az egyetlen molekulára jellemző mennyiség a sok molekulából álló rendszernek milyen tulajdonságává növi ki magát.
Jelen esetben a folyadékmolekula k ö t é s i e n e r g i á j a azt a p o t e n c i á l i s e n e r g i á t jelenti, amellyel az a többi folyadékmolekula erőterében rendelkezik. Másképp fogalmazva: azt a m u n k á t , a m e l y e t b e k e l l f e k t e t n i ahhoz, hogy a folyadék egyik molekuláját a többi molekula erőteréből kiszakítsuk.

Azt kell észrevenni, hogy ha ezt az egyetlen molekulára eső energiaértéket megszorozzuk a folyadékmolekulák számával, akkor megkapjuk azt az energiát, ami az egész folyadéknak különálló molekulákra való széthasogatásához – vagyis az e l p á r o l o g t a t á s h o z – szükséges. Most már csak egy kis finomításra van szükség: az állandó nyomáson való párolgás közben a gőz munkát is végez, így a párolgáshő nemcsak arra fordítódik hogy a a folyadékból kitépje a molekulákat, hanem arra is, hogy betuszkolja őket a gőz többi molekulája közé. Hőt, munkát, energiát azonos egységekben (pl. J-ban) mérve, mondhatjuk:
P á r o l g á s h ő = m o l e k u l á k s z á m a · k ö t é s i e n e r g i a + t é r f o g a t i m u n k a . A térfogati munka állandó nyomáson:

$$p \cdot \Delta V = p(V_{\text{gőz}} - V_{\text{folyadék}}) \approx p \cdot V_{\text{gőz}} = p \cdot \frac{m}{\varrho_{\text{gőz}}}$$

$$\text{Térfogati munka} = p \frac{N \cdot m^*}{\varrho_{\text{gőz}}},$$ ahol p az állandó gőznyomás,

$\varrho_{\text{gőz}}$ a megfelelő gőzsűrűség, N a molekulák száma, m^* egy molekula tömege. Minthogy

$$m^* = \frac{M}{6 \cdot 10^{23}} \quad (M = \text{a molekulasúly}),$$

ezért a térfogati munka $= p \frac{N}{6 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{M}{\varrho_{\text{gőz}}} = p \cdot n \frac{M}{\varrho_{\text{gőz}}}$.

Itt $n = \frac{N}{6 \cdot 10^{23}}$ a molszámot jelenti.

A legegyszerűbb tehát, ha 1 molnyi (molekulasúlynyi) anyagot veszünk. Erre:

$$M \cdot L_{\text{párolgási}} = 6 \cdot 10^{23} \cdot E_{\text{kötési}} + p \cdot \frac{M}{\varrho_{\text{gőz}}}.$$

Innen egyetlen molekula kötési energiája:

$$E_{\text{kötési}} = \frac{M}{6 \cdot 10^{23}} \left(L_{\text{párolgási}} - \frac{p}{\varrho_{\text{gőz}}} \right).$$

Természetesen ugyanazt az eredményt kapjuk akkor is, ha tetszőleges tömegű anyagra végezzük el a számítást.

19. A kérdés két részre bontható.
1. *Miért párolog a levegővel szabadon érintkező folyadék?*

Erre a kérdésre könnyű válaszolni. Minden hőmérsékleten, ahol folyadék csak létezhet, és olyan körülmények között, ahol kialakulhat a folyadék szabad felszíne is, e felszín fölötti térben meghatározott nyomású gőznek kell lennie.
A folyadék párolog, a gőz lecsapódik, de ez a két ellentétes folyamat csak akkor egyenlő sebességű, ha a folyadék gőzének már kialakult a szükséges nyomása. Például a 20 °C-os víz felett $2{,}33 \cdot 10^3$ Pa nyomású vízgőz van egyensúlyi állapotban. (A „légnyomást" ekkor a levegő és a vízgőz együtt hozza létre, és azt mondjuk, hogy a levegő páratartalma 100%). Amennyiben a levegő páratartalma 100%-nál kisebb, mindig erősebb lesz a párolgás, mint a lecsapódás, s lassanként a nyitott edényben levő víz teljesen vízgőzzé alakul. (Így szárad meg a levegőn a vizes ruha.) Zárt edényben kialakul a 100%-os páratartalom, s a dinamikus egyensúly beáll.
Fontos megjegyezni, hogy a telítési nyomás értéke jelentősen függ a hőmérséklettől; a víz esetén például 0 °C-on 613 Pa, 20 °C-on 2330 Pa, 40 °C-on 7330 Pa, 60 °C-on $2 \cdot 10^4$ Pa, 80 °C-on $4{,}73 \cdot 10^4$ Pa, és 100 °C-on éppen $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Ez utóbbi adat azt jelenti, hogy ha nyitott edényben melegítünk vizet, akkor – elérve a 100 °C hőmérsékletet – csak úgy alakulhat ki az egyensúlyi vízgőznyomás a víz felszíne felett, ha onnan teljesen e l t ű n i k a levegő, s a „légnyomást" itt teljes egészében a vízgőz biztosítja. Minthogy a légköri nyomás adott értékű, ezért ennél nagyobb nyomású vízgőz nem alakulhat ki, s így a nyitott edényben melegített víz hőmérséklete sem emelkedhet 100 °C fölé stabilis egyensúly esetén.

2. *Miért csak 100 °C-on forr $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomású levegőn a víz?*

Tapasztalat szerint a forrás létrejöttének két feltétele van:

a) *Legyenek a folyadékban gáz halmazállapotú buborékok (már a forrást megelőzően is!).*

b) *A buborékokban uralkodó nyomás lépje túl a folyadékban uralkodó nyomás értékét* (ami körülbelül egyenlő a folyadékra ható külső légnyomással).

Látható, hogy az utóbbi feltétel $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomás esetén 100 °C-on teljesül.
Mindaddig, amíg a víz hőmérséklete nem éri el a 100 °C értéket, a folyadékból és a buborékokból álló rendszer mechanikai egyensúlyi állapotban van. A forrás abból áll, hogy ez a mechanikai egyensúlyi állapot felborul. A halmazállapot-változás forrás közben is párolgás útján történik, amit bonyolult mechanikai jelenségek kísérnek.

Ha nincsenek a vízben légbuborékok, a víz nem forr 100 °C-on sem, hanem ugyanúgy párolog, mint máskor.

22.20. A csepp kialakulása a felületi feszültség következménye. Folyadéknak van felületi feszültsége, a gáznak „felülete" sincs.

22.21. $N = 3{,}74 \cdot 10^{22}$.

22.22. $\varrho = 0{,}9 \dfrac{\text{g}}{\text{liter}}$.

22.23. $N = 10^{23}$.

22.24. Legalább egy milliárd. (10^9)

22.25. $E_{\text{kötési}} = 0{,}425$ eV.

22.26. A víz felületi feszültsége.

22.27. Lehet.

1. E l é g v é k o n y r é t e g b e n minden fém átlátszó. Példa erre az izzólámpák, elektroncsövek belső felületén kialakuló vékony fémréteg, amely az izzószál párolgásából keletkezik. Bizonyos ablaküvegek színezésére, félig áteresztővé, félig tükrözővé tételére szándékosan is párologtatnak az üvegre fémet. Ezzel a módszerrel készítenek napvédő üvegeket (napszemüvegeket) és úgynevezett *T* bevonatokat optikai lencsékre. Az a lényeg, hogy a réteg vastagsága legfeljebb néhányszor tíz vagy száz molekulányi legyen.
2. E l é g r ö v i d h u l l á m h o s s z ú e l e k t r o m á g n e s e s s u g á r z á s e s e t é n minden fém átlátszó. A γ-sugarak már minden fémen áthatolnak, s ha az emberi szemben a γ-sugarak látási ingerületet keltenének, akkor át tudnánk látni a fémeken is. Igaz, ez inkább zavarna, mint segítene. Egész környezetünket üvegesen áttetszőnek és homályosnak látnánk. S hogy egyáltalán lássuk, olyan anyagú szemlencsére volna szükségünk, amely a ráeső γ-sugarakat megtöri, összegyűjteni képes. Ilyen anyagot pedig eddig – nem ismerünk.
Az 1. és a 2. eset között az átmenet folytonos, tehát az átlátszóság minden esetben függ a vastagságtól is. Ha nem így lenne, nem tudnánk védekezni a γ-sugarak ellen.

22.28. A látható fény hullámhossza néhány ezer angström. A rácsállandó a kristályokban néhány angström. Egyetlen atom sugara sem lehet nagyobb, mint két atom távolsága a kristályban. A kérdezett távolságok tehát a feladatban már nagyság szerinti sorrendben követik egymást.

($a > b > c$.)

22.29. Nincs.

Éppen, hogy a mozgás a természetes állapot! Már a mechanikát megalapozó Newton-törvények is erre a felfogásra épülnek. Egyensúlyi állapotban a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Esetleg állhat is.

A termodinamikai egyensúlyi állapotban az anyag mozgása annyira rendezetlen, hogy nem vezet az anyag nagy térfogatainak mint egésznek az elmozdulására. Ezért nem mutatható ki a szokásos durva megfigyelési módszerekkel.

Meg kell figyelnünk az anyag igen kis térfogatait. Ha a folyadékba Brown-részecskéket (virágpor, festékszemek) viszünk be, ez lehetővé válik.

22.30. A láng egyfajta gáz.

Ha bármilyen gázt elég magas hőmérsékletre hevítünk, előbb-utóbb világítani fog. Éppen úgy, mint a szilárd vagy cseppfolyós halmazállapotú anyagok.

A fénykibocsátás atomi folyamat: ha a molekulák elég nagy sebességgel ütköznek egymáshoz, akkor az ütközés rugalmatlan is lehet. Az eltűnt kinetikus energia az atom „belső" energiájává alakul: valahogy megváltozik kissé az atom belső szerkezete. Ebből a megváltozott állapotból bizonyos (igen rövid) idő után az atom spontán visszaalakul eredeti állapotába, s a fölösleges energiával kisugároz magából egy fotont. Ezt – ha szerencsénk van – látjuk is.

A lángot azért látjuk lobogni, mert az égés közben bonyolult mechanikai jelenségek (turbulencia) befolyásolják a tér különböző helyein a gázok hőmérsékletét. Rövid pillanatokra más-más helyen éri el a gáz azt a hőmérsékletet, amely esetén világítani fog. Ezt úgy érzékeljük, hogy „csapkodnak a lángnyelvek". Hogy a turbulenciának milyen nagy szerepe van, azt az is mutatja, hogy ha a lángot színpadon akarják utánozni, akkor könnyű, piros selymet fúvatnak levegővel, s ennek a lobogását világítják meg vörös fényszóróval.

22.31. Egy példa a lehetséges jó válaszra:

A fényforrás halmazállapota	A fényforrás molekuláinak (atomjainak, ionjainak) mozgása	
	Rendezetlen	Részben rendezett
Szilárd	izzószál	mozgó jármű lámpájának izzószála
Folyadék	olvadó vas	kiömlő olvadt vas
Gáz	láng	higanygőz a fénycsőben

22.32. A normálállapotú gázban $6 \cdot 10^{23}$ számú molekula térfogata 22,41 liter. Tízmillió, vagyis 10^7 számú molekula annyiszor kevesebb térfogatot tölt be, ahányszor a 10^7 kevesebb, mint a $6 \cdot 10^{23}$

$$V = 22{,}41 \cdot \frac{10^7}{6 \cdot 10^{23}} \text{ liter} = 3{,}74 \cdot 10^{-16} \text{ liter};$$

$$V = a^3 = 0{,}374 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3;$$

$$a = 0{,}72 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

Összehasonlításul érdemes megjegyezni, hogy kb. ennyi a vörös fény hullámhossza.

22.33. Csak nagyságrendi becslésre van szükség. 10^5 Pa nagyságrendű (normálállapotú) gáz 1 cm³-ében levő molekulák száma $\frac{6 \cdot 10^{23}}{22\,400}$; tehát 10^{19} nagyságrendű szám. Minthogy a molekulák száma a nyomással egyenesen arányos, ezért 10^{-13} Pa nagyságrendű nyomás esetén 10^{18}-szor kevesebb, vagyis 10 nagyságrendű a molekulák száma. Azt kaptuk tehát, hogy a ma előállítható legnagyobb vákuumban is cm³-enként legalább tíz molekula van!

22.34. *a)* Ez éppen egy mol hidrogén, tehát benne $6 \cdot 10^{23}$ H_2-molekula van.

b) Ez fél mol hélium, tehát benne $3 \cdot 10^{23}$ He-molekula van.

c) 3 cm³ jég = 3·0,9 gramm jég. Egy mól jég tömege 18 gramm, tehát 3 cm³ jégben $\frac{3\cdot 0{,}9}{18}\cdot 6\cdot 10^{23} = \underline{0{,}9\cdot 10^{23}\ H_2O\text{-molekula}}$ van.

Minthogy azonban a jég már kristályos szerkezetű, szilárd anyag, helyesebb azt mondani, hogy $1{,}8\cdot 10^{23}$ számú H-atom és $0{,}9\cdot 10^{23}$ számú 0-atom van 3 cm³ jégben. (Röntgendiffrakciós mérések szerint a jégkristályban két szomszédos oxigénatom közötti távolság $2{,}76\cdot 10^{-10}$ m, míg az oxigénatomhoz tartozó két hidrogénatom tőle kb. 10^{-10} m távolságban van.)

d) Ha a vízgőz ideális gáznak tekinthető, akkor

$T_1 = 273$ K; $p_1 = 1{,}01\cdot 10^5$ Pa; $V_1 = 22\,410$ cm³ esetén $N_1 = 6\cdot 10^{23}$.

Most $T_2 = 400$ K; $p_2 = 8{,}14\cdot 10^1$ Pa; $V_2 = 3$ cm³; $N_2 = ?$

$$\frac{p_1V_1}{N_1T_1} = \frac{p_2V_2}{N_2T_2}$$ innen N_2 kiszámítható.

$\underline{N_2 = 4{,}5\cdot 10^{19}.}$

Ez kb. kétezerszer kevesebb, mint amennyi a jég esetén volt!

22.35. *a)* Mivel az edényben normálállapotú gáz van, ezért ahányszorosa (vagy ahányad része) az edény térfogata a 22,41 liternek, annyiszorosa (vagy annyiad része) lesz az edényben levő molekulák száma a $6\cdot 10^{23}$-nak. Az egy molekulára jutó térfogat:

$$V^* = \frac{22\,410\ \text{cm}^3}{6\cdot 10^{23}} = 3{,}74\cdot 10^{-20}\ \text{cm}^3.$$

Amennyiben ez egy kocka térfogata, akkora kocka élhosszúsága:

$\underline{a = 3{,}35\cdot 10^{-7}\ \text{cm} = 33{,}5\cdot 10^{-10}\ \text{m}.}$

b) A legtöbb atom átmérője 10^{-10} m és $3\cdot 10^{-10}$ m közötti érték, tehát az előbbi kocka élhosszúsága egy atom átmérőjének legalább tízszerese.

22.36. *a)* Az egy molekulára jutó térfogat:

$$V^* = a^3 = \frac{18\ \text{cm}^3}{6\cdot 10^{23}} = 3\cdot 10^{-23}\ \text{cm}^3.$$

Az elképzelt kis kocka élhosszúsága:

$\underline{a = 3{,}11\cdot 10^{-8}\ \text{cm} = 3{,}11\cdot 10^{-10}\ \text{m}.}$

b) A *22.35.* feladatban kapott eredménnyel összehasonlítva, azt látjuk, hogy a folyadékban egymáshoz sokkal közelebb helyezkednek el a molekulák, mint a gázban. A víz még külön is érdekes, hiszen tudjuk, hogy a vízben közelebb vannak egymáshoz H_2O molekulák, mint a jégben. Ezért úszik és nem süllyed el a jég a vízen. Más anyagoknál a szilárd halmazállapot egyben sűrűbb is. A H_2O kivétel.

22.37. Ennél a feladatnál nem is a megoldás módszere, hanem az adatok a fontosak:

$A = 10^{-10}$ m (= 1 angstrom); $f = 10^{13}$ Hz $= 10^{13}\ \text{s}^{-1}$.

$v_{max} = ?$ $a_{max} = ?$

a) $\underline{v_{max} = A\cdot\omega = A\cdot 2\pi f = 6280\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$

b) $\underline{a_{max} = A\cdot\omega^2 = A\cdot 4\pi^2 f^2 = 4\cdot 10^{17}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.}$

Megjegyzés

A szilárd testet alkotó atomok nemcsak ilyen nagy frekvenciájú „optikai" rezgéseket végezhetnek, hanem lassúbbakat, „akusztikai" rezgéseket is. A szilárd testben az atomok „hőmozgása" rengeteg különböző frekvenciájú rezgés eredője.

22.38. A molekulanyaláb olyan gáz, amelyben a molekulák (vagy atomok) bizonyos irányú rendezett sebességgel is rendelkeznek, térbeli eloszlásuk pedig inhomogén. Ha egy vákuumra leszivattyúzott edény csapját megnyitjuk, akkor a szobában teljesen rendezetlenül bolyongó oxigén- és nitrogénmolekulák közül azok, amelyek a lyuk irányában mozogtak, bejutnak az edénybe. Így az edénybe jutó molekulák keskeny molekulanyalábot alkotnak a csapon való áthaladás közben, s valamivel utána is. Később a sokszori ütközés után ebben az edényben is ugyanolyan rendezetlen lesz a mozgás, mint a szobában. Ekkor már nem beszélhetünk molekulanyalábról.

A molekulanyaláb mindig csak vákuumban állítható elő. Kell hozzá egy molekulaforrás (ez lehet például párolgó folyadék, izzószál stb.) és két-három diafragma, amelyet egymás után helyezve, az utolsó diafragma által meghatározott szélességű nyaláb keletkezik.

Megjegyzés

A molekulanyalábban a molekulák mozgása nagymértékben rendezett, ezért a rendszer nincs termikus egyensúlyban. Ez az oka annak, hogy nem beszélhetünk a molekulanyaláb hőmérsékletéről.

22.39. A nyalábban mozgó részecskék ütköznek a gázmolekulákkal, és egész egyszerűen „kiszóródnak" a nyalábból.

22.40. A hidrogénmolekula tömege:

$$m^* = \frac{2\ \text{gramm}}{6\cdot 10^{23}} = 0{,}33\cdot 10^{-23}\ \text{gramm} = 0{,}33\cdot 10^{-26}\ \text{kg}.$$

Sebessége $2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$; tehát mozgásmennyisége:

$$m^*v = 0{,}33\cdot 10^{-26}\ \text{kg}\cdot 2000\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}66\cdot 10^{-23}\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Amikor beleütközik a falba, s arról visszapattan, ugyanekkora (de ellenkező irányú) sebességgel, megváltozik a mozgásmennyisége is.
Mennyivel? Annak kétszeresével, amennyi volt. (Egy hasonló példa: ha a hőmérséklet +3 °C-ról −3 °C-ra változik, akkor 2·3 °C-ot változott, mert 2·3 = 6 °C-kal lett hidegebb.) Egyetlen ütközés után tehát a hidrogénmolekula mozgásmennyisége $2\cdot 0{,}66\cdot 10^{-23}\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ értékkel változik.

Hányszor ütközik neki az egyik falnak 1 másodperc alatt? Két ugyanolyan ütközés között 10 + 10 = 20 cm utat tesz meg. Másodpercenként viszont megtesz:
2 km = 2000 m = 200 000 cm utat, vagyis 10 000-szer 20 cm-t. Ezek szerint 10 000-szer ütközik az egyik falnak 1 s alatt.
Tehát az összes mozgásmennyiség változása 1 másodperc alatt:

$$10\,000\cdot 2\cdot 0{,}66\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

Az 1 másodperc alatti mozgásmennyiség-változás az impulzustétel alapján (L. I. kötet *3.10.* és *3.16.* feladat) egyenlő az átlagosan ráható erővel:

$$F_{\text{átl}} = \frac{\Delta I}{\Delta t};\ \text{tehát:}$$

$$F_{\text{átl}} = 10\,000\cdot 2\cdot 0{,}66\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{\text{s}} = 1{,}33\cdot 10^{-19}\ \text{N}.$$

$$\underline{F_{\text{átl}} = 1{,}33\cdot 10^{-19}\ \text{N}.}$$

22.41. A megoldásban a *22.40.* feladatnál látott módszert követjük.
Az ütközés során egyetlen molekula mozgásmennyiségének megváltozása:

$$\Delta I^* = 2\,m^*v = 2\cdot 5{,}4\cdot 10^{-26}\ \text{kg}\cdot 460\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5\cdot 10^{-23}\frac{\text{kg m}}{\text{s}}.$$

Hány molekula ütközik a falnak 1 mp alatt? Annyi, ahány eléri 1 mp alatt a falat. Ezek a molekulák a faltól legfeljebb 460 m távol lehetnek. A fal egységnyi területét annyi ütés éri 1 mp alatt, ahány molekula az 1 cm² alapterületű és 460 m magasságú hasábban van. Ezek száma:

$$1{,}5\cdot 10^{14}\ \frac{1}{\text{cm}^3}\cdot 1\ \text{cm}^2\cdot 46\,000\ \text{cm} = 6{,}9\cdot 10^{18}.$$

Mennyi az 1 cm² átmérőjű molekulanyaláb mozgásmennyiségének megváltozása 1 mp alatt? $\Delta I = 6{,}9\cdot 10^{18}\cdot 5\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}.$

Az időegységre (1 mp-re) jutó mozgásmennyiség-változás az impulzustétel értelmében egyenlő a ráható erő átlagával, vagyis

$$F_{\text{átl}} = \frac{\Delta I}{\Delta t};\ \text{ahonnan:}$$

$$F_{\text{átl}} = 6{,}9\cdot 10^{18}\cdot 5\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{\text{s}} = 3{,}5\cdot 10^{-4}\ \text{N}.$$

Minthogy az 1 cm² keresztmetszetű nyalábra ható erőt számítottuk ki, egyben megkaptuk a fal 1 cm²-es felületére ható erőt is. Newton harmadik törvénye szerint ugyanis a kettő azonos nagyságú és ellenkező irányú.
Ezek szerint a falra ható nyomás:

$$\underline{p = 3{,}5\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 3{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.}$$

22.42. Jelöljük az edény térfogatát V-vel, a molekulák számát N-el. Legyen a kiszemelt fal területe A; egy-egy molekula tömege m^*; sebessége v.
Egyetlen molekula ütközésekor bekövetkező mozgásmennyiség-változás: $2m^*v$. (Lásd *22.40.* feladat!)
Az a távolság, amelynél közelebbi molekulák Δt idő alatt elérhetik a kiszemelt falat: $v\cdot\Delta t$.

Annak a hasábnak a térfogata, amelyben ezek a molekulák is vannak: $A \cdot v\Delta t$.

A hasábban levő összes molekulák száma:

$$\frac{N}{V} \cdot A \cdot v\Delta t.$$

Közülük e kiszemelt fal irányában mozog:

$$\frac{1}{6}\frac{N}{V} A v\Delta t.$$

Ennyi tehát Δt idő alatt az A felületű lapba ütköző molekulák száma. Ezen molekulák mozgásmennyiségeinek összes változása:

$$\Delta I = \frac{1}{6}\frac{N}{V} A v \Delta t \cdot 2\, m^* v.$$

Az impulzustétel szerint $F_{\text{átl}} \cdot \Delta t = \Delta I$, tehát a fal által a gázra kifejtett erő átlaga:

$$F_{\text{átl}} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{6}\frac{N}{V} A v \Delta t \cdot 2\, m^* v}{\Delta t} = \frac{1}{3}\frac{N}{V} A m^* v^2.$$

Newton III. törvénye szerint ugyanekkora (ellenkező irányú) erőt fejt ki a gáz a falra, vagyis:

$|F_{\text{fal} \to \text{gáz}}| = |F_{\text{gáz} \to \text{fal}}|$, tehát a gáz nyomása:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{3}\frac{N}{V} m^* v^2.$$

22.43. Ideális gázban a molekuláknak csak m o z g á s i energiájuk van. A számítás egyszerűsítéséért – feltételezve, hogy mindegyik molekulának azonos a tömege (m^*) és a sebessége (v) – a molekulák összes mozgási energiája:

$$E = N \cdot \frac{1}{2} m^* v^2.$$

Az energia most kapott kifejezését a 22.42. feladatban a nyomásra nyert formulával összehasonlítva kapjuk:

$$E = \frac{3}{2} pV.$$

Megjegyzés

Azt, hogy molekulák egyatomosak, ott használtuk ki, hogy az ö s s z e s mozgási energia kifejezésében *nem vettük figyelembe* a f o r g á s i mozgási energiát.

22.44. Használjuk fel a *22.43.* feladat adta összefüggést!

$$E = \frac{3}{2} pV.$$

Behelyettesítve: $p = 2 \cdot 10^5$ Pa és $V = 10$ liter értékeket:

$$E = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3 = 3000\ \text{J}.$$

$$E = 3000\ \text{J}.$$

22.45. Az egyesített gáztörvény szerint (*15.14.*):

$pV = nRT$; ahol:

$n = \frac{m}{M}$ a molok számát jelenti. Behelyettesítve ezt a *22.43.* feladatban nyert energiakifejezésbe:

$$E = \frac{3}{2} nRT.$$

Ha $n = 1$ mol egyatomos molekulájú gáz van az edényben, akkor az összes rendezetlen mozgási energia:

$$E = \frac{3}{2} RT.$$

22.46. A hélium nemesgáz, tehát molekulái e g y a t o m o s a k . Ezért alkalmazhatjuk a *22.45.* feladatban kapott eredményt:

$$E = \frac{3}{2} RT \quad (n = 1\ \text{mol}).$$

R értéke $= 8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$. Behelyettesítve:

a) $E = 3740$ J.

b) $E = 1247$ J.

c) $E = 11\,220$ J.

Megjegyzés
Figyeljünk fel arra, hogy az ideális gáz rendezetlen energiája egyenesen arányos a gáz abszolút hőmérsékletével.

22.47. Kiszámítottuk a *22.45.* feladatban, hogy az egyatomos molekulákból álló ideális gáz 1 moljának a molekulák rendezetlen mozgásából adódó belső energiája a következő formulával adható meg:

$$E = \frac{3}{2}RT.$$

Minthogy számításunkat a gáz molekuláris modelljének felhasználásával végeztük, jogos a kérdés, mennyi ennek az energiának e g y m o l e k u l á r a j u t ó r é s z e. Egy mol anyag $6\cdot10^{23}$ számú molekulából áll, így egyetlen molekula á t l a g o s mozgási energiája:

$$E^* = \frac{\frac{3}{2}RT}{6\cdot10^{23}}.$$

Ez a formula így is írható:

$$E^* = \frac{3}{2}\frac{R}{6\cdot10^{23}}T = \frac{3}{2}kT.$$

$$\text{Itt } k = \frac{R}{6\cdot10^{23}} = \frac{8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{fok}}}{6\cdot10^{23}} = 1{,}38\cdot10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{fok}}.$$

Ennek az állandónak a neve Boltzmann-állandó. (Értékét például arról jegyezhetjük meg, hogy „visszafelé olvasva" az R számjegyeiből áll, míg a kitevő a Loschmidt-számból – pozitív előjellel – jól ismert.)
$T = 300$ °K hőmérsékleten például:

$$E^*(300) = \frac{3}{2}k\cdot300 = 6{,}2\cdot10^{-21}\text{ J}.$$

1 eV = $1{,}6\cdot10^{-19}$ J, tehát:
$E^*(300) = 0{,}04$ eV.

22.48. *a)* A neon nemesgáz, molekulái egyatomosak, tehát felhasználhatjuk a *22.47.* feladatban kapott kifejezést:

$$E^* = \frac{3}{2}kT. \qquad \left(k = 1{,}38\cdot10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{fok}}\right).$$

Most $T = 273$ °K, tehát egy molekula átlagos mozgási energiája (csak T-től függ!):

$$E^* = \frac{3}{2}1{,}38\cdot10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot273\text{ °K} = 5{,}65\cdot10^{-21}\text{ J}.$$

b) A sebességnégyzet átlagát az alábbi összefüggésből számíthatjuk ki:

$$E^* = \frac{1}{2}m^*v^2;\quad \text{vagyis: } v^2 = \frac{2E^*}{m^*}.$$

Itt $m^* = \dfrac{M}{6\cdot10^{23}}$ egyetlen molekula átlagos tömege,

E^* pedig egyetlen molekula átlagos mozgási energiája.

Esetünkben $m^* = \dfrac{20{,}2\text{ gramm}}{6\cdot10^{23}} = 3{,}37\cdot10^{-23}$ gramm.

A sebességnégyzet átlaga:

$$v^2 = \frac{2\cdot5{,}65\cdot10^{-21}\text{J}}{3{,}37\cdot10^{-26}\text{ kg}} = 335\,000\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

c) A sebességnégyzet átlagának négyzetgyöke, vagyis a („négyzetes") á t l a g s e b e s s é g :

$$v = \sqrt{335\,000\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 580\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés
A legvalószínűbb sebesség a négyzetes átlagsebességnél kb. 18%-kal kisebb. Jelen esetben kb. 475 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ezért kell pontosan megmondani, hogy mit értünk az átlagsebesség szón!

22.49. Külön egyetlen egy molekula sebességét megmérni lehetetlen. Legjobb esetben is csak egy m o l e k u l a n y a l á b részecskéinek „sebességeloszlását" tudjuk megmérni. Erre viszont már többféle módszer ismeretes. Közülük a legrégebbi (!) 1920-ból. Az egyik legpontosabb módszer azon alapszik, hogy a vízszintes irányban induló molekulanyaláb a nehézségi erőtérben lefelé elhajlik. A vízszintestől való eltérést mérve meghatározható a nyaláb sebességeloszlása. Ez azt jelenti, meg tudjuk mondani, hogy milyen sebességű molekulák átlagosan milyen arányban fordulnak elő a nyalábban. Ebből az átlagsebesség is meghatározható. A molekulanyaláb átlagsebességéből ki lehet számítani abban a gázban az átlagsebességet, amelyből a molekulanyalábot kiválasztottuk. Így bármely gázra kísérletileg is meghatározható a molekulák átlagsebessége. A kapott értékek az elméletileg becsült értékekkel jó egyezést mutatnak.

22.50. Felhasználva a *22.48.* feladat eredményét, írhatjuk:

$$v^2 = \frac{2\,E^*}{m^*} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} kT}{m^*} = \frac{3\,kT}{m^*} = \frac{3\,kT}{\frac{M}{6 \cdot 10^{23}}} = \frac{3\,RT}{M}.$$

Ezek szerint azonos T hőmérsékletek esetén az átlagsebesség négyzete a molekulasúllyal fordítva arányos. Ebből a bizonyítandó állítás már nyilvánvaló.

22.51. A hőtanból tudjuk, hogy ha a gáz térfogata állandó, akkor a közölt hőmennyiség teljes egészében a gáz b e l s ő e n e r g i á j á t növeli:

$Q = \Delta U$.

Ennek figyelembevételével azt mondhatjuk, hogy az állandó térfogat melletti fajhő azzal a b e l s ő e n e r g i a v á l t o z á s s a l egyenlő, ami egységnyi tömegű anyag hőmérsékletének 1 fokkal való növekedésekor izochor folyamat esetén történik:

$\Delta U = c_V m\,\Delta T$.

Az ideális gáz molekuláris modellje szerint az egyatomos gáz „rendezetlen" energiája az abszolút hőmérséklettel egyenesen arányos:

$$E = \frac{3}{2} n\,R\,T = \frac{3}{2}\frac{m}{M} RT.$$

A molekuláris elméletben a rendezetlen energiát feleltetjük meg a gáz makroszkopikus belső energiájának!

$$U \equiv E; \quad \text{tehát } \Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{M} R \cdot \Delta T.$$

Minthogy másrészt:

$\Delta U = c_V\, m \Delta T$; ezért:

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{M}.$$

Hélium esetén M = 4 gramm, tehát:

$$c_V = \frac{3}{2} \cdot \frac{8.31 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}{4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 3.116 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}.$$

A makroszkopikus mérésekből kapható érték:

$3.161 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$. A jó egyezés közvetett bizonyíték a molekuláris elmélet mellett.

22.52. A hőtanból ismert, hogy állandó nyomáson zajló folyamatban a közölt hővel a belső energiát is növeljük, valamint a gáz által végzett munkát is fedezzük:

$Q = \Delta U + p \cdot \Delta V$.

Ha ideális gáz a vizsgált anyag, akkor felhasználhatjuk az ismert állapotegyenletet:

$$pV = \frac{m}{M} RT; \text{ ahonnan } p = \text{állandó esetén:}$$

$$p\,\Delta V = \frac{m}{M} R \cdot \Delta T.$$

Helyettesítsünk be az első főtételbe:

$$Q = \Delta U + \frac{m}{M} R \cdot \Delta T.$$

A *22.51.* feladatban láttuk, hogy:

$$\Delta U = c_V\, m \cdot \Delta T = \frac{3}{2}\frac{m}{M} R \cdot \Delta T.$$

Ezt (a molekuláris elméletből következő) kifejezést is behelyettesítve, kapjuk:

$$Q = \frac{3}{2}\frac{m}{M} R \cdot \Delta T + \frac{m}{M} R \cdot \Delta T.$$

$$Q = m\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{R}{M}\right) \cdot \Delta T.$$

A zárójelbe tett kifejezés értelemszerűen az állandó nyomás melletti fajhő, tehát:

$$c_p = \frac{5}{2}\frac{R}{M}.$$

Hélium esetén $M = 4$ gramm, tehát:

$$c_p = \frac{5}{2}\cdot\frac{8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}{4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 5{,}19\cdot 10^{3}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}.$$

A makroszkopikus mérésekből $5{,}23\cdot 10^{3}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}$ adódik.

22.53. Használjuk fel a *22.51.* és a *22.52.* feladatok eredményeit!

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{M};\ \text{illetve}\ c_p = \frac{5}{2}\frac{R}{M}.$$

A két egyenlet elosztásával a bizonyítandó állítást kapjuk.

22.54. Az izzó fémhuzal felületének molekulái ütköznek a gáz be-becsapódó molekuláival. A visszalökődött gázmolekulák átlagosan sokkal nagyobb mozgási energiával mozognak, mint ütközésük előtt. Az ütközés során a fémhuzal felületének molekulái munkát végeztek a hozzájuk csapódó gázmolekulákon, így nőtt meg azok mozgási energiája. (Munkatétel!) A huzalról elpattanó gázmolekulák más gázmolekulákkal ütközve azokon végeznek munkát, és a sok ütközés során kiegyenlítődik a gázmolekulák átlagos mozgási energiája. Ez az átlagos energia persze több, mint ami volt. A gáz „felmelegedett". Ha közben a fémhuzal nem mozdult el, és nem deformálódott, akkor a fém felületének molekulái által a gázmolekulákon teljesen rendezetlenül végzett munkák összességét joggal nevezhetjük a fém által közölt makroszkopikus hőmennyiségnek.

22.55. Az argon is nemesgáz, molekulája tehát egyatomos, molekulasúlya az atomsúlyával egyezik meg.

$M_{Ar} = 40$ gramm.

Felhasználva a *22.48.* illetve *22.50.* feladatban kapott összefüggéseket:

$$v^2 = \frac{3RT}{M};\ \text{ahonnan:}$$

$$T = \frac{v^2 M}{3R} = \frac{\left(7{,}8\cdot 10^{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot 40\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{3\cdot 8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{K}}} \approx 10^{5}\ ^\circ\mathrm{K};$$

$\underline{T = 100\,000\ ^\circ\mathrm{K}}$.

22.56. A feladat megoldásához egy nagyon fontos — itt nem bizonyítható — tételt fogunk felhasználni. Ez az energia egyenletes eloszlásának tétele, amely szerint a hőmérsékleti egyensúlyban levő gázkeverékben *minden molekula átlagos mozgási energiája egyenlő.* Ha egyatomos molekulájú gázokról van szó, akkor az egyetlen molekulára jutó energiaérték:

$$E^* = \frac{3}{2}kT.$$

$$a)\ E^* = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{^\circ\mathrm{K}}\cdot 273\ ^\circ\mathrm{K} = \underline{5{,}65\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}.$$

b) Ugyanannyi, mint a héliumé.

$$c)\ v_{\mathrm{He}} = \sqrt{\frac{2E^*}{m^*_{\mathrm{He}}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5{,}65\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}{\frac{4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{6\cdot 10^{23}}}} = \underline{1300\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

$$d)\ v_{\mathrm{Ne}} = \sqrt{\frac{2E^*}{m^*_{\mathrm{Ne}}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5{,}65\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}{\frac{20{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{6\cdot 10^{23}}}} = \underline{580\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

A nagyobb tömegű (tehetetlenségű) molekulák tehát lomhábbak, lassabban mozognak, de átlagos energiájuk ugyanannyi. Hogy mennyi, az független a keverék arányától, tömegétől, térfogatától, nyomásától, egyedül a hőmérsékletétől függ.

22.57. *a)* Nem!

Ez a két folyamat egymástól függetlenül megy végbe. A folyadékból másodpercenként kirepülő molekulák száma a folyadék sűrűségével arányos. A gázból a folyadékba csapódó molekulák másodpercenkénti száma a gáz sűrűségével arányos. (Az arányossági tényező különböző a két esetben; így lehet a két folyamat azonos sebességű annak ellenére, hogy a folyadék sűrűsége nagyságrendekkel nagyobb, mint a gázé.)

b) Nem lehet.

Amikor azt tapasztaljuk, hogy „párolog" a folyadék, akkor is mennek molekulák a gázból vissza a folyadékba, csak sokkal kisebb mértékben, mint amennyi kilép a folyadékból a gázba. A megfigyelhető folyamat mindig a kettő eredője. Ugyanez mondható el a gáz (vagy gőz) „lecsapódásakor" is.

22.58. *a)* Időben állandó jelenség.

b) Nem.

c) Nem.

d) Tökéletesen rendezetlen.

e) Igen. A nagyobb tömegű részecskék mozgása lassúbb.

f) Nem.

g) Igen. A hőmérséklet emelkedése közben nő.

h) Igen. A hőmérséklet emelkedése közben nő.

22.59. *a)* Nem!

A vízmolekulák átlagsebessége sokkal nagyobb, mint a hozzájuk képest elefánt nagyságú lomha festékszemcséké.

b) Ez sem! Mivel a valódi mozgás térben történik, a mikroszkóppal pedig ennek a mozgásnak csak vízszintes vetületét tudjuk megfigyelni. (Például amikor a festékszemcse véletlenül függőleges irányban mozdul el, akkor a mikroszkópban nézve állni látszik.)

22.60. *Nincs színe.*

Egyetlen különálló molekulának, atomnak, ionnak n i n c s é r t e l m e a *színéről* beszélni. És ha kémiában esetleg mégis azt hallja valaki, hogy például „a *réz*ionok kékeszöld színűek", akkor ezt értse úgy, hogy 10^{20} darab rézionról van szó egyszerre. (Egyetlen olyan festékszemcsében, amit a Brown-mozgás kimutatására használunk, legalább 10^{10} számú festékmolekula van.)

23. Atomfizika

23.1. A $^{12}C_6$ atomsúlya (helyesebben: tömegszáma) 12, rendszáma 6. Ez azt jelenti, hogy egy szénatom héja 6 elektront, magja 6 protont és 12 − 6 = 6 neutront tartalmaz.

A szilárd anyagok atomsúlynyi mennyiségében (annyi gramm tiszta anyagban, amennyi annak a tömegszáma) kereken $6\cdot10^{23}$ számú atom van.

Tehát 12 gramm szénben van:

a) $6\cdot10^{23}$ atom,

b) $36\cdot10^{23}$ elektron,

c) $36\cdot10^{23}$ proton,

d) $36\cdot10^{23}$ neutron.

23.2. Ha az áram erőssége 8A, akkor a vezető bármely teljes keresztmetszetén 8 *coulomb* töltés halad át másodpercenként. Egyetlen elektron töltése: $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C, tehát a másodpercenként áthaladó elektronok száma:

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{8\ \mathrm{C}}{1{,}6\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}} = 5\cdot10^{19}.$$

$N = 5\cdot10^{19}$.

23.3. A két proton közötti gravitációs vonzóerő nagysága:

$$F_{\text{grav}} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot\frac{1{,}67\cdot10^{-27}\ \mathrm{kg}\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\mathrm{kg}}{r^2};$$

$$F_{\text{grav}} = \frac{5{,}55\cdot10^{-64}}{r^2}\,\mathrm{Nm}^2.$$

A két proton közötti elektrosztatikus taszítóerő nagysága:

$$F_{\text{el.szt.}} = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\mathrm{C}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}}{r^2};$$

$$F_{\text{el.szt.}} = \frac{2{,}3\cdot 10^{-28}}{r^2}\,\mathrm{Nm^2}.$$

A két eredményt összehasonlítva látjuk, hogy bár mindkét erő makroszkopikus mértékkel mérve elképzelhetetlenül kicsi, a gravitációs vonzóerő sokkal kisebb, mint az elektrosztatikus erőhatás. A kettőt elosztva megkapjuk, hogy hányszor kisebb:

$$\frac{F_{\text{el.szt.}}}{F_{\text{grav}}} = 4{,}1\cdot 10^{35}.$$

Érdemes eltűnődni ezen az eredményen.

23.4. Az Einstein-féle tömeg–energia egyenérték egyenlet szerint az m_0 nyugalmi tömegű anyag E_0 nyugalmi energiája:

$E_0 = m_0c^2$;

ahol c a fény v á k u u m b e l i terjedési sebességét jelöli.

Az elektron nyugalmi tömege:

$m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg.

A fény vákuumbeli sebessége:

$$c = 3\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehát az elektron nyugalmi energiája:

$$E_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\left(3\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2.$$

$E_0 = 8{,}2\cdot 10^{-14}$ J.

Ezt az értéket MeV-ben (millió elektronvoltban) kell kifejezni. 1 elektronvolt annyi energia, amennyivel az elektron mozgási energiája nő, ha az elektromos erőtérben 1 V potenciálkülönbségű két hely között gyorsul fel. Ezek szerint

$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 1\,\mathrm{V} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{CV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$

$1\,\mathrm{MeV} = 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1{,}6\cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}.$

Felhasználva ezt E_0 kiszámítására:

$$E_0 = 8{,}2\cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 8{,}2\cdot 10^{-14}\,\frac{\mathrm{MeV}}{1{,}6\cdot 10^{-13}};$$

$E_0 = 0{,}51$ MeV.

23.5. A fénykvantum energiáját a Planck-féle összefüggés alapján határozhatjuk meg. $E = h\cdot f$, ahol f a fénykvantum frekvenciája, h pedig az ún. Planck-állandó, értéke: $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Js.

Minthogy a feladatban a hullámhossz van megadva ebből kell kiszámítani a frekvenciát:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 6\cdot 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Behelyettesítve:

$E = h\cdot f = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 6\cdot 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1} = 4\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$;

$E = 4\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}5\,\mathrm{eV}.$

23.6. Az elektrolízis kísérleti vizsgálatakor megállapítható – Faraday által felfedezett – törvény közvetlen összefüggésbe hozza egymással a kémiai anyag és az elektromosság alapmennyiségeit, a tömeget illetve a töltést.

Megállapítható, hogy az elektródákon kivált anyag tömege és töltése s z i g o r ú a n a r á n y o s egymással. Ebből viszont logikusan következik, hogy v a g y m i n d k e t t ő k v a n t u m o s, v a g y e g y i k s e m. Nem lehet olyan esetet elképzelni, hogy az elektróda tömege kvantumosan növekszik, töltése pedig folytonosan. Az se képzelhető el, hogy a töltés nő kvantumosan, lépcsőzetesen, s a tömeg folytonosan. (Mindkét esetben fel kellene tételeznünk, hogy nem igaz a Faraday-törvény, m és Q nem arányosak.)

Ettől függetlenül mind a kémiai anyag, mind az elektromosság kvantumos, atomi természetére független kísérleti bizonyítékaink is vannak (Brown-mozgás, illetve Millikan-kísérlet).

23.7. *a)* Gerjesztési energia: az atom két különböző kvantumállapota közötti energiakülönbség.

Mivel az atomot érő külső hatások legtöbbje olyan, hogy e hatásokat a külső elektronhéj felfogja, az atom energiaállapotának megváltozása a külső elektronhéj energiaállapotának megváltozásával értelmezhető. Ha a külső elektronhéj összesen egyetlen egy elektronból áll (hidrogén, alkálifémek), akkor a gerjesztési energia ennek az elektronnak „adódik át" egy atomi folyamat (rugalmatlan ütközés) során.

A gerjesztési energia ez esetben az elektron „potenciális energiáját" növeli. Természetesen egyetlen atomnak is többféle a gerjesztési állapota, s így többféle gerjesztési energiája is lehet. A legkisebb energiájú kvantumállapotot a l a p á l l a p o t n a k nevezik. A gerjesztési állapotok energiáit az alapállapot energiájához viszonyítva, eV egységben szokás megadni. Például a hidrogén első gerjesztési energiája (az alapállapothoz képest) 10,25 eV, a higanyé 4,9 eV. Ez azt jelenti, hogy egy olyan elektron, amely 10,25 eV energiával ütközik az alapállapotban levő hidrogénatomnak, képes azt gerjesztett állapotba hozni, tehát a 10,25 V feszültséggel felgyorsított elektronok gerjeszteni tudják a hidrogénatomokat. A higanyatomok elektronbombázással való gerjesztéséhez 4,9 V gyorsítófeszültség is elegendő. Pongyola – de sajnos elterjedt – megfogalmazással ezt úgy szokták kifejezni, hogy a hidrogén első gerjesztési potenciálja 10,25 V, a higanyé 4,9 V.

b) Ionizációs energia: az atom alapállapota és olyan kvantumállapota közötti energiakülönbség, amikor a leglazábban kötött („legkülső") elektront (elektronokat) már semmi sem köti az atom megmaradó részéhez. A megmaradó részt i o n n a k, az ion képződésének folyamatát i o n i z á c i ó n a k hívják. Ionizációs folyamat során az atom az ionizációs energiánál akármennyivel nagyobb energiát fel tud venni (nemcsak diszkrét értékeket!), mivel a kiszabaduló elektron mozgási energiája tetszőleges értékű lehet. Amíg a gerjesztéshez mindig jól meghatározott diszkrét értékű energiaadag közlésére volt szükség, az ionizációhoz csak egy minimális energiánál nagyobb energia kell. Ez a minimális energia az ionizációs energia, amely persze minden esetben nagyobb, mint bármelyik gerjesztési energia. Hidrogén esetén például az ionizációs energia 13,6 V és valamennyi gerjesztési energiája 10,2 eV és 13,6 eV közötti értékű.

Gerjesztett állapotából az atom spontán visszaalakulhat az alapállapotba, miközben a gerjesztési energiát elektromágneses hullámok formájában kisugározza (diszkrét energiaértékek – diszkrét hullámhossz – vonalas színkép). Az ionizált állapotból az alapállapotba való visszatérés szintén energiafelszabadulással jár. Az ionizációs energia számértékileg azzal a kötési energiával egyezik meg, amellyel mint (negatív) potenciális energiával a legkülső elektron az ion elektromágneses terében rendelkezik. „Ionizációs potenciálon" azt a feszültséget értik, amellyel elektr o n o k a t felgyorsítva azok az illető atomhoz ütközve, azt ionizálni képesek. Mivel elektronokról van szó, ezért ahány eV az a t o m ionizációs energiája, annyi V az ionizációs potenciál.

23.8. *a)* Tömeg, méret. Egy ezreléknél is kevesebb a relatív eltérés az atom és a belőle keletkezett ion tömege között, ezért jó közelítésben egyenlőnek vehetjük a kettő tömegét. Az egymással való ütközések közben az ionok is ugyanolyan geometriai méretűeknek mutatkoznak, mint az atomok. (Még érdekesebb és egyáltalán nem magától értetődő dolog, hogy a különböző atomok is meglepően azonos geometriai méretűek).

b) Töltés. Az atom semleges, az ion pedig pozitív vagy negatív elektromos töltésű. Azt is lehet mondani, hogy az ion: elektromos töltéssel rendelkező atom.

Megjegyzés
Mi a helyzet a mágneses momentummal? – kérdezhetné valaki, aki már hallott, olvasott arról, hogy az atomoknak ilyen tulajdonságuk is van. A mágneses momentum szoros összefüggésben van az atom (vagy az ion) mechanikai mozgásállapotával, pontosabban impulzusnyomatékával, s így atom és atom között is találunk különbséget e tekintetben. Ahogyan két különböző sebességű (impulzusú) atomról még nem mondjuk azt, hogy különböző tulajdonságú, ugyanúgy azonos tulajdonságúnak tarthatunk két olyan atomot, amelynek impulzusmomentuma (és így mágneses momentuma is) különböző. Az impulzus és az impulzusmomentum az atomnak a „többihez képesti" tulajdonsága, amely attól is függ, hogy milyen koordináta-rendszerből írjuk le az atom tulajdonságait. Igaz, relativisztikusan a tömeg is ilyen, de kis sebességeknél ettől eltekinthetünk. Igazából az elektromos töltés az egyetlen olyan e g y s z e r ű tulajdonság, amely független a koordináta-rendszertől.

23.9. Elemek egyenértéksúlya, vagy elektrokémiai egyenértéke az atomsúly (tömegszám) és a vegyérték hányadosa. Így a réz elektrokémiai egyenértéke:

$$\frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ (gramm)}.$$

23.10. Az elektrolízis során bármely elem elektrokémiai egyenértékének kiválásakor kereken 96 500 coulomb töltés is kiválik. Minthogy a kivált anyag tömege és töltése arányos, ezért ha 31,5 gramm rézzel válik ki 96 500 coulomb töltés, akkor 10 gramm rézzel:

$$Q = 96\,500\ \mathrm{C}\ \frac{10\ \mathrm{g}}{31{,}5\ \mathrm{g}} = 30\,600\ \mathrm{C}$$

töltés válik ki. Ha a kiváláshoz szükséges idő két óra, akkor az átlagos áramerősség:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{30\,600\ \text{C}}{2\cdot 3600\ \text{s}} = 4{,}25\ \frac{\text{C}}{\text{s}}.$$

$$\underline{I = 4{,}25\ \text{A}.}$$

23.11. A függőleges tengelyű hengerkondenzátorban vízszintes, sugaras szerkezetű elektrosztatikus erőtér alakul ki. Ebben az erőtérben az elektrolit pozitív ionjai a negatív töltésű henger irányában, a negatív ionok pedig a pozitív töltésű henger irányában indulnak el. Mindkét sebesség vízszintes irányú (persze egymással ellentétes), és mivel a mágneses tér függőleges, ezért mindkét v merőleges B-re. A mágneses térben m o z g ó töltésre ható Lorentz-erő merőleges v-re is és B-re is, tehát vízszintes síkban *a sugárra merőleges irányú* lesz. Az erő iránya a töltés és a sebesség szorzatával arányos, ami azt jelenti, hogy mindkét előjelű töltésre ugyanolyan irányú erő hat. (A negatív töltés ellenkező irányban indult el!) Minthogy a Lorentz-erő az elektrolit pozitív és negatív ionjait ugyanabba az irányba tereli, ezért <u>az egész elektrolit áramlani kezd, körbefolyik, kering a hengerkondenzátorban.</u>

23.12. Alkalmazzuk a munkatételt:
$\Delta E_{\text{kin}} = \Sigma W$. Ki kell számítanunk ΣW-t! Az elektronon a külső erőtér végez munkát. Ennek a munkának a nagysága:
$W = Q\cdot U = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 1\ \text{V} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{J}.$
(Ezt az energiaértéket nevezik 1 eV-nak.)
A proton töltése ugyanannyi, tehát <u>mind a proton, mind az elektron kinetikus energiája 1 eV-tal változik meg</u> 1 V potenciálkülönbség „befutása" esetén.

23.13. Elhanyagolva az elektron kezdeti mozgási energiáját, azt mondhatjuk, hogy az elektron egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgást végez.
Gyorsulása:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4\cdot 10^{-17}\ N}{9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 4{,}40\cdot 10^{13}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

a) Mennyi idő alatt jut az elektron 4 cm messzire?

$$s = \frac{a}{2}t^2; \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}04\ \text{m}}{1{,}40\cdot 10^{13}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

$$\underline{t = 4{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{s}.}$$

b) Mennyi itt a sebessége?

$$v = a\cdot t = 4{,}45\cdot 10^{13}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 4{,}2\cdot 10^{-8}\ \text{s}.$$

$$\underline{v = 1{,}9\cdot 10^{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$$

c) Befolyásolja-e a jelenséget az elektronra ható földi nehézségi erő?
<u>Biztos, hogy nem.</u> A nehézségi erő hatására g-vel gyorsul, tehát kb. $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a függőleges gyorsulás. Ez a $10^{13}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsuláshoz képest biztosan elhanyagolható. A földi nehézségi erőtér hatása mérhetetlenül kicsi.

23.14. *a)* Ha az elektron hosszabb ideig tartózkodik az erőtérben, akkor eltérítése nagyobb lesz. Ezért ha a lemezpárnak az elektronsugár irányában mérhető méretét növeljük, akkor az elektronsugár <u>jobban eltérül.</u> Viszont az elektronsugárra merőleges irányban növelve a lemezek méretét, az eltérítés <u>nem változik.</u>
b) A lemezek távolságát növelve – konstans feszültség esetén – csökken a lemezek közötti elektromos térerősség. Ezzel <u>csökken</u> az eltérítőerő, s így az eltérítés mértéke is.
c) Messzebb levő ernyőn mintegy <u>„felnagyítva" jelenik meg</u> az eltérítés. (Gondoljunk például a nagyképernyős tv-re).
d) Nagyobb feszültség az eltérő lemezpáron: nagyobb térerősség a lemezek között. Ez nagyobb eltérítőerőt, s így <u>nagyobb</u> eltérítést jelent.
e) Nagyobb gyorsítófeszültség: nagyobb sebességgel repül el az elektron a lemezek között. Kisebb ideig tartózkodik ott, tehát rövidebb ideig hat rá az eltérítőerő. Ezért eltérítése <u>kisebb</u> lesz.

23.15. A röntgensugarakra átlátszó anyagok csak átengedik ezeket a sugarakat, de nem törik meg. Ezért <u>nem lehet röntgensugárlen-</u>

esét készíteni. Az orvosi röntgenkészülék ernyőjén az átvilágított test árnyékképe jelenik meg. Mivel a sugárforrás kiterjedt, az árnyék nem éles, hanem elmosódott.

23.16. A foton nem klasszikus mechanikai részecske. Erre mutat már az a klasszikusan érthetetlen és elképesztő tulajdonsága is, hogy a nyugalmi tömege zérus. (Ezt természetesen úgy kell értenünk, hogy n i n c s   n y u g a l m i   á l l a p o t b a n   l e v ő   f o t o n !) A foton mozgási energiája megegyezik teljes energiatartalmával, amelyet így számíthatunk ki:

$E = h \cdot f.$

(h = a Planck-állandó; f = a foton frekvenciája.)
Az Einsteintől származó

$E = mc^2$

kifejezéssel összhangban a fotonhoz:

$$m = \frac{h \cdot f}{c^2}$$

tehetetlen tömeget rendelhetünk, amelynek a fénynyomás létrehozásában van fontos szerepe.

Megjegyzés

A relativitáselmélet szerint egy test tiszta mozgási energiáját megkapjuk, ha teljes energiatartalmából levonjuk a nyugalmi energiát:

$E_{mozg} = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2.$

Felhasználva, hogy:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x; \text{ vagyis } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}; \text{ ha } x \text{ kicsi:}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \text{ Ezzel:}$$

$$E_{mozg} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)c^2 - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2; \text{ ha: } v \ll c.$$

A foton esetén ez a közelítés tehát nem alkalmazható!

23.17. A fényelektromos hatás („fotoeffektus") alapösszefüggése:

$$h \cdot f = W_{kilépési} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Itt h a Planck-állandó; f az elektront kilökő foton frekvenciája; $\frac{1}{2}mv^2$ a kilökött elektron mozgási energiája a fémből való kilépés után; $W_{kilépési}$ annak a helyzeti („kötési") energiának -1-szerese, amellyel az elektron a fém belsejében rendelkezett.
A legkisebb energia, amivel a foton ki tud lökni elektront a fémből:

$h \cdot f_{min} = W_{kilépési}.$

Felhasználva, hogy: $f = \frac{c}{\lambda}$;

$$f_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}}.$$

Behelyettesítve:

$$W_{kilépési} = h \cdot \frac{c}{\lambda_{max}} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\ \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2974 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}}.$$

$W_{kilépési} = 6{,}65 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 4{,}2\ \mathrm{eV}.$

$W_{kilépési} = 4{,}2\ \mathrm{eV}.$

23.18. Mivel az aranyatom sokkal nagyobb tömegű, mint a proton, azért jó közelítésben úgy tárgyalhatjuk a problémát, mintha a proton valamilyen „falba" ütközött volna.
Az ütközés tökéletesen rugalmas, és a proton sebességének csak iránya változik meg. Minthogy a mozgás irányának megváltozása 70°, ezért úgy kell a falat elképzelnünk, mintha a fal síkja 35°-os szöget zárna be az eredeti mozgásiránnyal (55°-os beesési szög).
Bontsuk fel a proton mozgásmennyiségét két összetevőre. Az egyik legyen az elképzelt falra merőleges, a másik párhuzamos. Ez utóbbi komponens az ütközés után ugyanannyi, amennyi előtte volt. Csak a falra merőleges komponenes változik (-1-szeres lesz). Az elképzelt fal (az aranyatom) tehát a fal síkjára merőleges irányú erőt fejt ki a protonra! Newton III. törvénye, az akció – reakció elve szerint a proton ugyanekkora, és ellenkező irányú erőt fejt ki a falra (az aranyatomra) ütközés közben. Az aranyatom kicsiny visszalökődésének iránya tehát az elképzelt falsíkra merőleges lesz, a proton eredeti mozgásirányával 55°-os szögben.

Megjegyzés
A megoldásban az aranyatomot látszólag nyugalomban levőnek képzeltük. Azonban, ha tekintetbe vesszük azt, hogy az aranyatom nincs nyugalomban, akkor is igaz marad a visszalökődés ténye, és a visszalökés az atom sebességét módosítani fogja. Ez a visszalökő hatás független az atom mozgásállapotától.

23.19. Ha egy atommag kötési energiájánál fogva kisebb tömegű, mint bomlástermékeinek bármely lehetséges kombinációja, akkor az energiamegmaradás törvénye miatt az ilyen mag stabil. Ezért van az, hogy bizonyos izotópok stabilak, mások pedig radioaktívak. A hidrogén és a deutérium atommagjai (proton, illetve proton és neutron) stabilak, de a trícium atommagja (egy proton és két neutron) már nem stabil, hanem radioaktív. Tizenkét év felezési idővel bomlik el ^{3}He izotóppá, amelynek a magja két protonból és egy neutronból áll. Bomlás közben elektront és antineutrinót sugároz ki (radioaktív β bomlás).

23.20. T idő után a fele elbomlott, megmaradt tehát $0{,}5\cdot10^6$. Újabb T idő elteltével ennek is elbomlott már a fele, tehát van még $0{,}25\cdot10^6$ radioaktív mag.

23.21. $N = 10^{24}$.

23.22. $m = 1{,}2$ kg.

23.23. $Q = 343$ C; $I = 189$ mA.

23.24. $v > 8{,}4\cdot10^6\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

23.25. *a)* 1 eV.
b) 303 eV.
c) Legalább -3 V.

23.26. *a)* 0,4 mikrosecundum.
b) A kilépési helynél 1,38 centiméterrel magasabban.

23.27. $a_\perp = 3{,}6\cdot10^{16}\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

23.28. *a)* $1{,}39\cdot10^6\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
b) $0{,}98\cdot10^6\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

23.29. *a)* $0{,}98\cdot10^6\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
b) $2{,}3\cdot10^4\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

23.30. Délre mutat.

23.31. *a)* $\lambda = 1{,}25\cdot10^{-12}$ m.
b) Radioaktív γ-sugárzás. (Esetleg kemény röntgensugárzás.)

23.32. Kisebb.

23.33. Az elektronmikroszkópban nem fénysugarakkal (fotonokkal), hanem katódsugarakkal (elektronokkal) kell „átvilágítani" a tárgyat. A leképező eszközöknek – az elektronmikroszkóp lencséinek – tehát nem fotonokat, hanem mozgó elektronokat kell jól szabályozható módon eltéríteniük. Mivel az elektronok töltött részecskék (a fotonok semlegesek), ezért a célnak legjobban az elektromos és mágneses erőterek felelnek meg. A ma használatos elektronmikroszkópoknak mágneses lencséik vannak. Ezek olyan inhomogén mágneses erőterek, amelyek áramátjárta vasmagos tekercsek célszerűen kialakított légréseiben és annak környékén lépnek fel. „Fókusztávolságukat" a tekercsben folyó áram erősségének változtatásával lehet szabályozni.

23.34. A fémben az elektromos áram: a szabad elektronok rendezett mozgása az ionrácsban. A szabad elektronok rendezetlen mozgására „rakódik rá" ez a rendezett mozgás, amely egyenletes sebességű áramlás (egyenáram) vagy rezgőmozgás (váltakozó áram) is lehet.
A fémben áramvezetés közben is „térfogati semlegesség" van, vagyis sehol sem halmozódnak fel fölös elektronok, és sehol sem keletkezik elektronhiány. A feladat feltétele szerint minden rézatom a fémben egy szabad elektronnal rendelkezik. Ez azt jelenti, hogy annyi elektron vesz részt az áram vezetésében, ahány réz-

atom van a vezetőben. Hogy melyik szabad elektron melyik rézatomról vált le, azt nem lehet megmondani, de nem is fontos. (Az áramvezetést most a következő hasonlattal lehet szemléletessé tenni: Azonos számú fiúból és lányból álló osztályban tornaórán a lányok és a fiúk egy-egy kört képeznek. A lányok belső, a fiúk külső kört. A fiúk állnak egy helyben, s a lányok haladnak körbe. A fiúk ekkor a rézionok, s a lányok a szabad elektronok szerepét játsszák, mozgásuk a részecskék rendezett mozgását utánozza a zárt áramkörben.)

A réz atomsúlyának és sűrűségének ismeretében ki tudjuk számítani, hogy mennyi a szabad elektronok koncentrációja a fémben. $A = 64$, tehát 64 gramm rézben van $6\cdot10^{23}$ rézatom, s az előbb mondottak szerint ugyanennyi, tehát szintén $6\cdot10^{23}$ szabad elektron. Egyetlen gramm rézben tehát van:

$$\frac{6\cdot10^{23}}{64} = 0{,}94\cdot10^{23}$$

szabad elektron. Minthogy a réz sűrűsége $\varrho = 8{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; ezért 1 cm³ rézben van:

$$8{,}9\cdot0{,}94\cdot10^{23} = 8{,}35\cdot10^{23}$$

szabad elektron. A további számítások egyszerűbbek lesznek, ha mindjárt az 1 mm³-ben levő szabad elektronok számát határozzuk meg:

$n = 8{,}35\cdot10^{20}/\text{mm}^3$.

A megadott áramsűrűség:

$$j = \frac{I}{A} = \frac{4A}{3\ \text{mm}^2} = 1{,}33\ \frac{A}{\text{mm}^2}.$$

Mivel egyetlen elektron töltése $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, ezért a megadott rézvezeték 1 mm²-nyi keresztmetszetén másodpercenként:

$$N = 1{,}33\ \frac{A}{\text{mm}^2}\cdot\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C}} = 0{,}835\cdot10^{19}/\text{mm}^2\cdot\text{s}$$

számú szabad elektron halad át.

Ezeknek az elektronoknak átlagos rendezett sebességét az $\frac{N}{n}$ hányados definiálja. Esetünkben:

$$\frac{N}{n} = \frac{0{,}835\cdot10^{19}/\text{mm}^2\cdot\text{s}}{8{,}35\cdot10^{20}/\text{mm}^3} = 0{,}01\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

$$\underline{v = 0{,}01\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}.}$$

Megjegyzés

A kapott sebesség csak látszólag kicsi; az elektronok másodpercenként több százezer ion mellett haladnak el ekkor is. Természetesen nem szabad összetéveszteni az elektronok áramlási sebességét az elektromos áram kialakulásának, megindulásának sebességével, amely a huzalon fénysebességgel száguld végig. Az elektronok sebessége úgy hasonlít az áram kialakulásának sebességére, mint a menetoszlop katonáinak sebessége a vezénylő tiszt hangjának sebességére.

23.35. Az alumínium tömegszáma (atomsúlya) 27, vegyértéke a megadott vegyületben 3, így $\frac{27}{3} = 9$ gramm alumínium kiválasztásához kell 96 500 C töltés. A megadott 1 kg = 1000 gramm alumínium kiválasztásához tehát:

$$\frac{1000}{9}\cdot96\,500 = 10{,}7\cdot10^6$$

coulomb töltésre van szükség.

Mivel az elméleti kiválasztási feszültség 2,5 V, ezért az elektrolizáláshoz szükséges energia:

$$10{,}7\cdot10^6\ \text{C}\cdot2{,}5\ \text{V} = 26{,}8\cdot10^6\ \text{J}.$$

Ez azonban a felhasznált energiának csupán 40%-a, vagyis az összesen felhasznált energia:

$$\frac{1}{0{,}4}\cdot26{,}8\cdot10^6\ \text{J} = 67\cdot10^6\ \text{J} = 18{,}6\ \text{kWh}.$$

$$\underline{E = 18{,}6\ \text{kWh}.}$$

Megjegyzés

$1\ \text{kWh} = 10^3\ \text{Wh} = 10^3\cdot3600\ \text{Ws} = 3{,}6\cdot10^6\ \text{J}.$

23.36. Határozzuk meg, hogy hány H_2-molekula van 400 cm³ térfogatú, $1{,}22\cdot10^5$ Pa nyomású és 20 °C hőmérsékletű hidrogéngázban! Tudjuk, hogy 22 410 cm³ (22,41 liter) térfogatú $1{,}01\cdot10^5$ Pa nyomású és 0 °C hőmérsékletű hidrogéngázban van $6\cdot10^{23}$ darab H_2-molekula. Az egyesített gáztörvény molekuláris alakját felhasználva:

$$pV = \frac{m}{M}RT;\quad \text{ahol:}\ \frac{m}{M} = n = \frac{N}{6\cdot10^{23}};\quad \text{tehát:}$$

$$pV = N\frac{R}{6\cdot 10^{23}}T;$$

$$\frac{p_1V_1}{N_1T_1} = \frac{p_2V_2}{N_2T_2};$$

$$N_2 = \frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{T_1}{T_2}\cdot N_1;$$

$$N_2 = \frac{1{,}22\cdot 10^5\ \text{Pa}}{1{,}01\cdot 10^5\ \text{Pa}}\cdot\frac{400\ \text{cm}^3}{22\,410\ \text{cm}^3}\cdot\frac{273\ \text{K}}{293\ \text{K}}\cdot 6\cdot 10^{23};$$

$$N_2 = 0{,}12\cdot 10^{23}.$$

A hidrogéngáz H_2-molekulákból áll, azonban az elektrolízisnél atomos hidrogén keletkezik. A kiváló H-atomok száma így

$$N = 2\cdot 0{,}12\cdot 10^{23} = 0{,}24\cdot 10^{23}.$$

Egyetlen H-atom kiválása egyetlen elemi töltés átvitelével jár együtt, tehát az átvitt összes töltés:

$$Q = Ne = 0{,}24\cdot 10^{23}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C} = 3840\ \text{C}.$$

Ezt a töltésmennyiséget az áramforrás állandó, 40 V feszültségen vitte át. Ezért az áramforrás által végzett munka

$$W = U\cdot Q = 40\ \text{V}\cdot 3840\ \text{C} = 153\,600\ \text{J}.$$

$$\underline{\underline{W = 153\,600\ \text{J}.}}$$

23.37. Milyen erők hatnak az olajcseppre?
1. $G = mg$ nehézségi erő függőlegesen l e f e l é .
2. $F_{fel} = V\gamma_{lev}$ felhajtóerő függőlegesen f e l f e l é .
3. $F = QE$ elektrosztatikus erő függőlegesen f e l f e l é .

(Azért felfelé, mert ha lefelé hatna, akkor az olajcsepp nem lebeghetne egyhelyben.)

(Az olajcsepp lebeg, n e m g y o r s u l , tehát a ráható erők eredője (ΣF) zérus. Így:

$$G = F_{fel} + F.$$

$$mg = V\gamma_{lev} + QE.$$

Használjuk fel, hogy $V = m\varrho$ és $\gamma_{lev} = \varrho_{lev}\cdot g$. Ekkor:

$$mg = \frac{m}{\varrho}\cdot\varrho_{lev}\cdot g + QE.\ \text{Ahonnan:}$$

$$m = \frac{QE}{g\left(1 - \frac{\varrho_{lev}}{\varrho}\right)}.$$

Behelyettesítve az adatokat ($E = \frac{U}{d}$ felhasználásával) kapjuk:

$$\underline{\underline{m = 1{,}96\cdot 10^{-15}\ \text{kg}.}}$$

Megjegyzés

Ha a számításban elhanyagoltuk volna a levegő felhajtóerejét, ez a kapott eredményt kevesebb, mint 1%-kal változtatta volna meg. Egy biztos: aki $g \approx 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ közelítést alkalmaz, annak már felesleges is a felhajtóerőt a számításban figyelembe vennie.

23.38. A mozgó töltött részecskére ható erő mágneses térben m e r ő l e g e s a sebességre! Ezért csak a sebesség irányát tudja megváltoztatni, nagyságát nem.
A munkatétel segítségével is igazolhatjuk a fentieket: mivel az erő merőleges a sebességre, ezért merőleges minden pillanatban az elmozdulásra. Tehát a mágneses tér n e m v é g e z m u n k á t a mozgó töltött részecskén! Ebben az esetben a részecske mozgási energiája változatlan marad, s így a sebesség nagysága sem változhat meg. (Iránya természetesen megváltozhat.)

Megjegyzés

Nagyon felületes szóhasználattal mindezt úgy szokták kifejezni, hogy a mágneses tér „nem tudja gyorsítani" a mozgó töltött részecskéket. Ez persze nem igaz, hiszen a sebesség *irányának* megváltoztatása is gyorsítást jelent, s a mágneses térben ható erő ugyanúgy gyorsít, mint más erők. Nem tudjuk növelni a sebesség nagyságát, abszolút értékét, de arra terelhetjük az elektronsugarat, amerre akarjuk. Ha nem így lenne, egyetlen televíziós készülék, egyetlen elektronmikroszkóp sem működhetne a megszokott módon, s bizony a ciklotronból is hamar kiszaladnának a gyorsítandó részecskék. (A sebesség nagyságát a ciklotronban is elektromos térrel növeljük!)

23.39. A munkatétel relativisztikus általánosítását kell alkalmaznunk, mivel az elektron végsebessége már egyáltalán nem elhanyagolható a fénysebességhez képest. Ezek szerint a végzett munkák összege a test t e l j e s $E = mc^2$,energiájának megváltoztatásával egyenlő. A továbbiakban m-mel jelölve a felgyorsított elektron tömegét és m_0-lal jelölve a nyugalmi (kis sebességhez tartozó) tömeget, írhatjuk:

$W = \Delta E_{\text{teljes}}$;
$Q \cdot U = mc^2 - m_0c^2$; ahol:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ennek alapján a szükséges potenciálkülönbség:

$$U = \frac{m_0 c^2}{Q}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right\}.$$

A megadott adatok behelyettesítésével:
$\underline{U = 340\,000 \text{ V}.}$

Megjegyzés

Ha $v \ll c$; akkor az $mc^2 - m_0c^2$ különbség egyre inkább $\frac{1}{2}mv^2$-tel lesz egyenlő, s így kis sebességek esetére a munkatétel jól ismert alakját kapjuk. (Lásd még a *23.16.* feladat megoldását is!)

23.40. Nézzük meg, hogy állandónak tekintve az elektron tömegét, mekkora végsebesség adódik.

$Q \cdot U = \frac{1}{2}m_0v^2$; ahonnan:

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m_0}} = 3{,}48 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eltekintve attól, hogy a kapott érték az előző feladatból ismert tényleges sebességértéknek csaknem másfélszerese, lényeges elvi hiba történt, mert <u>fizikailag lehetetlen eredmény jött ki.</u> A kapott érték a fény sebességénél 16%-kal nagyobb. <u>Mai ismereteink szerint semmilyen fizikai objektum nem mozoghat vákuumban gyorsabban a fénynél.</u> (Ez az Einstein-féle speciális relativitási elv egyik alaptétele is.)

23.41. Határozzuk meg, hogy a céltárgyba másodpercenként hány részecske csapódik be:
Egyetlen deuteron egy pozitív elemi töltést szállít, tehát
$Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

A másodpercenként összesen szállított töltés:
$NQ = I \cdot t = 300 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot 1 \text{ s} = 3 \cdot 10^{-4}$ C.
Ebből:

$$N = \frac{3 \cdot 10^{-4} \text{ C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1{,}87 \cdot 10^{15}.$$

A céltárgynak másodpercenként átadott energia:
$E = N \cdot 200 \text{ KeV} = 1{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.
$E = 60$ J.
Ha tehát azt akarjuk, hogy a céltárgy ne melegedjék, akkor azt hűteni kell. <u>Másodpercenként 60 J energiát kell elvezetni róla.</u>

23.42. *a)* $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_p = 1836 \cdot 9 \cdot 10^{-31}$ kg;

$r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m; $F_{\text{grav}} = ?$ $\left(\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}\right)$

$$F_{\text{grav}} = \gamma \frac{m_e \cdot m_p}{r^2};$$

$$F_{\text{grav}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1836 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{(0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2};$$

$\underline{F_{\text{grav}} = 3{,}5 \cdot 10^{-47} \text{ N}.}$

b) A szükséges (és elégséges) vonzóerő:

$F = m_e \cdot a = m_e \frac{v^2}{r}$; ahol:

$v = 2{,}2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

$$F = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \frac{\left(2{,}2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ m}};$$

$\underline{F = 8{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ N}.}$

c) A proton és az elektron töltésének nagysága egyenlő: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

$r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m; $F_{\text{el. szt.}} = ?$ $\left(k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\right)$

$$F_{\text{el. szt.}} = k\frac{Q_e Q_p}{r^2} = 9\cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}}{(0{,}53\cdot 10^{-10}\,\text{m})^2};$$

$$\underline{F_{\text{el. szt.}} = 8{,}2\cdot 10^{-8}\,\text{N}.}$$

Tehát a szükséges vonzóerőt az elektrosztatikus kölcsönhatás biztosítja, a gravitációs kölcsönhatást észre se lehet venni.

23.43. Először határozzuk meg a „rugóállandót". (Kissé komikusan hat ez a kifejezés itt, ahol szó se lehet semmilyen rugóról, igaz. Viszont „a harmonikus rezgőmozgás létrejöttének dinamikai feltételében szereplő arányossági tényező" kifejezés elég komplikált. Miről van szó? Arról a bizonyos k-ról, melyik az $F = -k\cdot \Delta x$ összefüggésben szerepel.)

Esetünkben $F = 1{,}1\cdot 10^{-8}$ N, ha $\Delta x = 10^{-11}$ m.

Ezek szerint $k = \dfrac{F}{\Delta x} = 1{,}1\cdot 10^3 \dfrac{\text{N}}{\text{m}}.$

A harmonikus rezgőmozgás frekvenciája:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Behelyettesítve m és k értékeit:

$\underline{f = 1{,}29\cdot 10^{14}\,\text{s}^{-1}}$

Megjegyzés

1. Ehhez a frekvenciához tartozó fény az infravörös tartományba esik.
2. A feladat megoldásához a két proton egyensúlyi helyzetének távolságát nem kellett ismernünk. Ez az adat akkor lenne fontos, ha a rezgés amplitúdóját kellene becsléssel megállapítanunk.

23.44. Egyetlen foton energiája:

$$E = h\cdot f = h\frac{c}{\lambda}.$$

Adatok: $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Js; $c = 3\cdot 10^8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$;

$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ m.

Behelyettesítve:

$E = 3{,}3\cdot 10^{-19}$ J.

A megadott energia: $1{,}7\cdot 10^{-18}$ J.

Ez körülbelül 5 foton energiája.

Tehát ebben az esetben a szembe másodpercenként 5 foton jut. (Vegyük észre, mennyire érzékeny az ember szeme!)

23.45. A foton csak akkor válthat ki elektront a fémből ha $h\cdot f$ energiája nagyobb, mint a kilépési munka. $h\cdot f_{\min} = W_{\text{kilépési}}$;

$$h\cdot\frac{c}{\lambda_{\max}} = W_{\text{kilépési}};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{h\cdot c}{W_{\text{kilépési}}} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,\text{Js}\cdot 3\cdot 10^8\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{W_{\text{kilépési}}};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2\cdot 10^{-25}\,\text{Jm}}{W_{\text{kilépési}}}.$$

Felhasználva, hogy 1 eV $= 1{,}6\cdot 10^{-19}$ J; írhatjuk:

$$\lambda_{\max} = \frac{1{,}25\cdot 10^{-6}\,\text{eVm}}{W_{\text{kilépési}}}.$$

a) Cézium esetén:

$$\lambda_{\max} = \frac{1{,}25\cdot 10^{-6}\,\text{eVm}}{2{,}00\,\text{eV}} = 0{,}625\cdot 10^{-6}\,\text{m} = \underline{6250\,\text{Å}.}$$

Réz esetén:

$$\lambda_{\max} = \frac{1{,}25\cdot 10^{-6}\,\text{eVm}}{4{,}00\,\text{eV}} = 0{,}3125\cdot 10^{-6}\,\text{m} = \underline{3125\,\text{Å}.}$$

Cink esetén:

$$\lambda_{\max} = \frac{1{,}25\cdot 10^{-6}\,\text{eVm}}{3{,}6\,\text{eV}} = 0{,}348\cdot 10^{-6}\,\text{m} = \underline{3480\,\text{Å}.}$$

b) A látható fény hullámhossza 3800 Å és 7600 Å közötti érték, tehát céziumra felléphet, rézre és cinkre azonban nem léphet fel fényelektromos hatás látható fény esetén.

23.46. A röntgenspektrum folytonos részét az anyagban az atomok elektronhéján átjutott s az atommagok terében hirtelen lefékeződő elektronok hozzák létre. Ezt a fajta röntgensugárzást ezért f é k e z é s i s u g á r z á s n a k nevezik. Ennek nagy frekvenciák felé éles határa van: legjobb esetben az elektron teljes $Q\cdot U$ energiája egyetlen foton $hf_{\max}$ energiájává alakul át. $QU = hf_{\max}$; ahonnan:

$$f_{max} = \frac{QU}{h}.$$

Ennek megfelelően a minimális hullámhossz:

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = \frac{ch}{QU}.$$

Jelen esetben $\lambda_{min} = 0{,}2\ \text{Å} = 0{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$; $U = ?$
Az ismert értékeket behelyettesítve:
$\underline{U = 62{,}2\ \text{kV}}$.

23.47. A felvett teljesítmény:
$P_{fel} = U \cdot I = 50\ \text{kV} \cdot 2\ \text{mA} = 500 \cdot 10^3\ \text{V} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 100\ \text{VA}$.
$P_{fel} = 100\ \text{W}$.
A leadott teljesítményt úgy számíthatjuk ki, hogy meghatározzuk egy foton átlagos energiáját, s ezt megszorozzuk az 1 másodperc alatt kibocsátott fotonok számával. Egy foton energiája:

$$E = h \cdot f = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}\ \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-4} \cdot 10^{-6}\ \text{m}};$$

$E = 2 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$.
Tehát a leadott teljesítmény:
$P_{le} = 5 \cdot 10^{13}\ \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$.
$P_{le} = 0{,}1\ \text{W}$.
A röntgencső energetikai hatásfoka:

$$\frac{P_{le}}{P_{fel}} = \frac{0{,}1\ \text{W}}{100\ \text{W}} = \underline{0{,}001}.$$

A felvett energia 99,9%-a az anódot melegíti. (Az anódba becsapódó elektronnyaláb rendezett mozgási energiájának 99,9%-a alakul át az anód kristályrácsát alkotó atomok rendezetlen „hőmozgásának" energiájává.)

23.48. A sugárzás gyengülése az elnyelő lemez vastagságának exponenciális függvénye. $I = I_0\, 2^{-\frac{x}{d}}$ Itt d azt a rétegvastagságot jelenti, amely esetén az intenzitás a felére csökken, I_0 a lemezt elérő sugárzás intenzitása, I a kilépő, gyengített sugárzási intenzitás, x a lemez vastagsága.

a) Alumíniumra:

$$\frac{I}{I_0} = 2^{-\frac{50\ \text{cm}}{1\ \text{cm}}} = \frac{1}{2^{50}} \approx \underline{\frac{1}{10^{15}}}$$

Ólomra:

$$\frac{I}{I_0} = 2^{-\frac{1{,}3\ \text{cm}}{0{,}01\ \text{cm}}} = \frac{1}{2^{130}} \approx \underline{\frac{1}{10^{40}}}$$

Gyakorlatilag mindkét réteg teljesen elnyeli a röntgensugárzást.
b) Alumíniumra:

$$\frac{I}{I_0} = 2^{-\frac{1\ \text{cm}}{50\ \text{cm}}} = 2^{-0{,}02} \approx \underline{98{,}6\%}.$$

Ólomra:

$$\frac{I}{I_0} = 2^{-\frac{0{,}01\ \text{cm}}{1{,}3\ \text{cm}}} = 2^{-\frac{1}{130}} = \underline{99{,}5\%}.$$

Mindkét réteg meglehetősen „átlátszó" a rádium γ sugarai számára.

23.49. Az elbomlatlan atomok száma időben exponenciálisan csökken: $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ Itt T azt az időtartamot jelenti, amelynek elteltével az elbomlatlan atomok száma a felére csökken. Neve: f e l e z é s i i d ő. Rádium esetén $T = 1600$ év. A feladatban keresett mennyiség az elbomlott atomok aránya az eredetihez képest — 1000 év után.

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = ?\quad t = 1000\ \text{év};\quad T = 1600\ \text{év}.$$

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - 2^{-\frac{t}{T}} = 1 - 2^{-\frac{1000}{1600}} = 35{,}15\%.$$

Tehát 1000 év alatt a Ra-atomok 35,15%-a (durván minden harmadik Ra-atom) elbomlik.

23.50. A magreakció:

$$^{238}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{Th} + {}^{4}\alpha.$$

A mozgásmennyiség megmaradásának törvénye szerint:

$$m_{\mathrm{Th}}\, v_{\mathrm{Th}} + m_{\alpha}\, v_{\alpha} = 0;$$

mert az uránmag mozgásmennyisége zérus volt.
A tóriummag visszalökési sebessége tehát:

$$\underline{v_{\mathrm{Th}} = -\,2{,}4 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

A negatív előjel arra utal, hogy a tóriummag sebessége az α = részecske sebességével ellenkező irányú.

Megjegyzés

Magreakciókban az $1/2\, mv^2$ klasszikus mozgási energiák összege nem állandó, nincs k ü l ö n energiamegmaradási törvény, mivel tömeg – energia átalakulások lehetségesek. Jelen esetben a bomlási reakció során mozgási energia „keletkezett", azonban a fény sebességéhez képest olyan kis sebességekkel mozognak a részecskék, hogy a mozgási energia növekedése okozta tömegcsökkenéstől a mozgásmennyiségek összegének megmaradását kifejező fenti egyenletben nyugodtan eltekinthetünk.

23.51. A mozgásmennyiség megmaradásának törvénye szerint a kirepülő γ foton mozgásmennyiségének n a g y s á g a ugyanannyi, mint a nikkelmag visszalökődési mozgásmennyiségének nagysága. Ez utóbbit könnyen kiszámíthatjuk:

$$\Delta I = m_{\mathrm{Ni}}\, v_{\mathrm{Ni}} = 9{,}9 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6{,}5 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$\underline{\Delta I = 6{,}5 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

23.52. *a)* Az α-részecske mozgásmennyiségének változása:

$$\Delta I_{\alpha} = m_{\alpha}\, v_{\alpha} - (-m_{\alpha}\, v_{\alpha}) = 2\, m_{\alpha}\, v_{\alpha}.$$

Az aranyatom magjának is változik a mozgásmennyisége:

$$\Delta I_{\mathrm{Au}} = m_{\mathrm{Au}}\, v_{\mathrm{Au}}.$$

Alkalmazzuk az impulzustételt:

$$\Delta I_{\alpha} + \Delta I_{\mathrm{Au}} = 0;$$

$$2\, m_{\alpha}\, v_{\alpha} + m_{\mathrm{Au}}\, v_{\mathrm{Au}} = 0.$$

Ebből az aranymag visszalökődési sebessége:

$$v_{\mathrm{Au}} = -\,2\, v_{\alpha}\,\frac{m_{\alpha}}{m_{\mathrm{Au}}} = -\,2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\frac{4}{197}.$$

$$\underline{v_{\mathrm{Au}} = -\,6{,}1 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

b) Az aranymag az α részecske beesési síkjába képzelt b e e s é s i m e r ő l e g e s i r á n y á b a n lökődik el. Az aranymag sebessége tehát az α részecske eredeti mozgásirányával 75°-os szöget fog bezárni. Felhasználva az *a)* kérdésre adott válaszban követett gondolatot, a visszalökési sebességre kapjuk:

$$v_{\mathrm{Au}} = -\,2\, v_{\alpha} \cdot \cos 75^{\circ}\,\frac{m_{\alpha}}{m_{\mathrm{Au}}} = -\,2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}2588\,\frac{4}{197}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$\underline{v_{\mathrm{Au}} = 1{,}6 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$

23.53. Tegyük fel, hogy a rádiummag sebessége zérus a bomlás előtt. Ebben az esetben a radonmag és a héliummag ugyanakkora, de ellenkező irányú mozgásmennyiséggel repülnek szét. A mozgási energia kifejezése így is írható:

$$E = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{(m \cdot v)^2}{2m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{(mv)^2}{2}$$

Mivel az mv szorzat mindkét keletkező magra egyenlő nagyságú, ezért mozgási energiáik a t ö m e g e k k e l f o r d í t o t t a r á n y b a n á l l n a k.

$$E_{\mathrm{He}} : E_{\mathrm{Rn}} = 222 : 4.$$

$$E_{\mathrm{He}} = \frac{222}{222 + 4}\,(E_{\mathrm{He}} + E_{\mathrm{Rn}}).$$

$$E_{\mathrm{He}} = \frac{222}{226}\, 4{,}87\ \mathrm{MeV}.$$

$$\underline{E_{\mathrm{He}} = 4{,}78\ \mathrm{MeV}.}$$

Megjegyzések

1. Ha nem tesszük fel, hogy a rádiummag sebessége a bomlás előtt zérus, akkor a kapott eredmény csak a rádiummaggal eredetileg együtt mozgó koordináta-rendszerben igaz. Minthogy

azonban az esetek túlnyomó részében a rádiumtömb atomjai egymáshoz képest rendezetlenül mozognak, ez a hatás kiküszöbölődik.

2. Ha a felszabaduló magenergia jól meghatározott diszkrét érték, akkor az előbbi számítás alapján minden α-részecske teljesen egyforma energiával lép ki. Ez azonban már *nem így lesz*, ha a bomlás során kettőnél több részecske keletkezik! Ha csak három részecske is keletkezik, ugyanakkora felszabaduló összenergia már végtelenül sokféleképpen osztódhat szét a három részecske között. (A mozgásmennyiség megmaradása ugyanis nem korlátozza a lehetséges mozgásirányokat, csupán az adott irányba eső sebességek nagyságának arányát határozza meg.)

3. A bomlásnál keletkező részecskék sebessége a fény sebességénél jóval kisebb, ezért lehetett a számításban *állandó* tömegeket feltételezni.

23.54. A *23.53.* feladat megoldásában közölt meggondolást alkalmazva

a) $E_{\mathrm{He}} : E_{\mathrm{Tl}} = 208 : 4;$

$$E_{\mathrm{Tl}} = E_{\mathrm{He}} \frac{4}{208} = 6{,}2 \text{ MeV} \frac{4}{208};$$

$$\underline{E_{\mathrm{Tl}} = 0{,}12 \text{ MeV}.}$$

b) $E_{\text{össz}} : E_{\mathrm{He}} = (208 + 4) : 208;$

$$E_{\text{össz}} = E_{\mathrm{He}} \frac{212}{208} = 6{,}2 \text{ MeV} \frac{212}{208};$$

$$\underline{E_{\text{össz}} = 6{,}32 \text{ MeV}.}$$

Ellenőrzés:

$$E_{\mathrm{Tl}} + E_{\mathrm{He}} = 0{,}12 \text{ MeV} + 6{,}2 \text{ MeV} = 6{,}32 \text{ MeV} = E_{\text{össz}}.$$

23.55.

a) $$\frac{N}{t} = \frac{100 \text{ kW}}{2 \cdot 10^8 \text{ eV}} = \frac{10^5 \frac{\text{J}}{\text{s}}}{2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3{,}13 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}.$$

Tehát másodpercenként $\underline{3{,}13 \cdot 10^{15}}$ uránmag elbomlik.

b) Igaz, hogy a radioaktív bomlástörvény szerint az elbomlatlan atomok száma időben e x p o n e n c i á l i s a n csökken, azonban 1%-os csökkenés esetén még a bomlási sebességet állandónak tekintve is nagyon jól közelítő eredményt kaphatunk.

1,2 kg urán 1%-a 12 gramm tömegű, 235 gramm uránban van $6 \cdot 10^{23}$ atom, tehát 12 grammban: $\frac{12}{235} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 3{,}07 \cdot 10^{22}$.

Ennyi uránatomnak kell elbomlania. Másodpercenként elbomlik **$3{,}13 \cdot 10^{15}$**.
A szükséges idő tehát:

$$\frac{3{,}07 \cdot 10^{22}}{3{,}13 \cdot 10^{15}} \approx \underline{10^7 \text{ másodperc} \approx 0{,}3 \text{ év}.}$$

23.56. A tömeghiányt határozzuk meg először:
$\Delta m = (1{,}00728 + 1{,}00866) - 2{,}01355 = 0{,}00239.$
Egy atomi tömegegység:
$1 \; ATE = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.
A kisugárzott energia tehát:

$$E = c^2 \cdot \Delta m = \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0{,}00239 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

$E = 3{,}57 \cdot 10^{-13}$ J $= 2{,}23 \cdot 10^6$ eV.
$\underline{E = 2{,}23 \text{ MeV}.}$

23.57. Nem! A szabad neutron elbomlásakor nemcsak elektron és proton keletkezik, hanem egy zérus nyugalmi tömegű és töltésű, feles spinű részecske is, egy antineutrino. A bomlást béta-bomlásnak nevezik, mivel a felszabaduló elektronok sugárzás formájában jelennek meg. A fenti béta-bomlást a következő formában szokás felírni:

$n \longrightarrow p + e^- + \nu.$

A feltett kérdésre azonban nem is csak ezért kell tagadólag válaszolni.
A magreakcióknál ugyanúgy nincs értelme a reakció termékeit a reagensek alkatrészeiként feltételezni vagy keresni, mint a kémiai reakcióknál. (Sav és lúg reakciójából só és víz keletkezik. Azt jelenti ez, hogy a sav vagy a lúg eredetileg sóból és vízből állt? Berilliummag és α-részecske reakciójából neutron és a szén egyik izotópja jön létre! Azt jelenti ez, hogy a berillium atommagjában vagy az α-részecskében szénizotóp volt? Helytelen, lenne mindkét feltételezés.) Egy nem stabil atommag vagy elemi részecske elbomlása a magreakciók egyik fajtája, s a b o m l á s t e r m é k e k a r e a k c i ó s o r á n k é p z ő d n e k. Nem lehettek „benne" abban a formájukban az elbomlott részecskében,

ahogyan utána megjelentek, mert akkor érthetetlen lenne, hogyan tudtak addig ott maradni.
Hogy a neutron nem lehet „összeragadt" proton és elektron, annak szemléletes bizonyítéka maga az a tény is, hogy a neutron tömege kb. 2,5 elektrontömeggel nagyobb a proton tömegénél. Ha viszont a proton és az elektron szoros kötésben alkotná a neutront, akkor egy neutron tömegének kisebbnek kellene lenni, mint egy proton és egy elektron tömegének összege, és semmiképp se lehetne nagyobb annál. Ezenkívül még több alapvető elméleti fizikai tétel megtiltja annak feltételezését, hogy a neutronban proton és elektron van.

Megjegyzés

A *23.53.* feladat megoldásához fűzött 2. megjegyzésben rámutattunk, hogy két részecskére történő bomlás esetén a keletkezett részecskék csak pontosan meghatározott, diszkrét mozgásienergia-értékekkel rendelkezhetnek, míg három részecskére történő bomlás esetén egy-egy részecskének zérus és egy maximális érték közötti akármilyen mozgási energiája lehet. Eleinte úgy gondolták, hogy a béta-bomlásnál a neutronból csak proton és elektron keletkezik. Ezt az elméletet éppen az döntötte meg, hogy a kirepülő elektronok mozgási energiáját mérve, zérus és egy maximális érték között mindenféle energiával rendelkező elektront ki lehetett mutatni. Ez a kísérlet vezetett el az antineutrino létezésének feltételezéséhez, vagy kissé romantikusabban: az antineutrino felfedezéséhez. (E. Fermi, 1930.)

23.58. Fermi ismerte fel először azt is, hogy a viszonylag kis energiájú (néhány eV) úgynevezett „lassú" neutronok sokkal alkalmasabbak a magátalakulások előidézésére, mint a nagy energiájú (MeV) neutronok. Ennek az a szemléletes magyarázata, hogy a lassú neutronok sokkal hosszabb ideig tartózkodnak az atommagok közelében. Több a lehetőség a kölcsönhatásra, mint a mag mellett gyorsan elrepülő, nagy energiájú neutronok esetében.

23.59. *a)* Sok hidrogént tartalmazó közegekben a hidrogénmagokkal való rugalmas ütközések során a protonokkal kb. azonos tömegű neutronok gyorsan lelassulnak. (Ha egy m tömegű test nyugalomban levő m tömegű másik testtel rugalmasan ütközik, akkor az első test megáll.) A neutronok a hidrogénatommagokkal egymás után többször ütközve gyorsan elveszítik mozgási energiájukat.
b) Nem, a neutronok átlagos energiája nem csökkenhet le tetszőleges kis értékre. A lassító közegben a hidrogénmagok rendezetlen hőmozgást végeznek, amelynek átlagos energiája $T = 300$ K körüli hőmérsékleten 0,025 eV körüli érték. Mivel ez a mozgás teljesen rendezetlen, a neutronok a hőmozgás tartományában átlagosan ugyanannyi energiát vesznek vissza a protonoktól, mint amennyit átadnak nekik. A neutronok és a protonok statisztikus, hőmérsékleti egyensúlyba jutnak. Az ilyen neutronokat nevezik „termikus" neutronoknak, és átlagenergiájuk az előbbiek alapján ugyancsak 0,025 eV.

23.60. *a)* elektron;
b) neutron;
c) antineutrino;
d) foton (önmaga).

24. Ismétlő feladatcsoportok I.

A.1. *a)* $\dfrac{F_1}{F_2} = \sqrt{3}.$

b) Az eredő erő átmegy az M ponton, iránya függőleges.

A.2. $t = 48{,}9\ ^\circ\mathrm{C}.$

A.3. *a)* $a = 5{,}1\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *b)* $v = 7{,}2\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$

c) $a = 3{,}4\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$

A.4. *a)* $k_1 = 5{,}55$ cm. *b)* $l = 1{,}95$ cm.

A.5. *a)* $\cos\varphi = 0{,}625$; $\varphi = \pm 51{,}3^\circ$.

b) $z = 1250$ ohm. *c)* $R = 781{,}25$ ohm.

A.6. *a)* $U_{\text{max}} = 25{,}12$ V.

b) $U = 25{,}12 \cdot \sin\,(314 \cdot t)$. A t időt másodpercben mérve, a feszültséget voltokban kapjuk.

c) $U_{\text{eff}} = 17{,}7$ V.

B.1. *a)* $a = \dfrac{5}{6}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$ *b)* $v = 1{,}15\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$

B.2. $I = 32{,}65$ A.

B.3. *a)* $t = 7510$ cm. *b)* $k = 7{,}51$ cm; $K = 1$ cm.

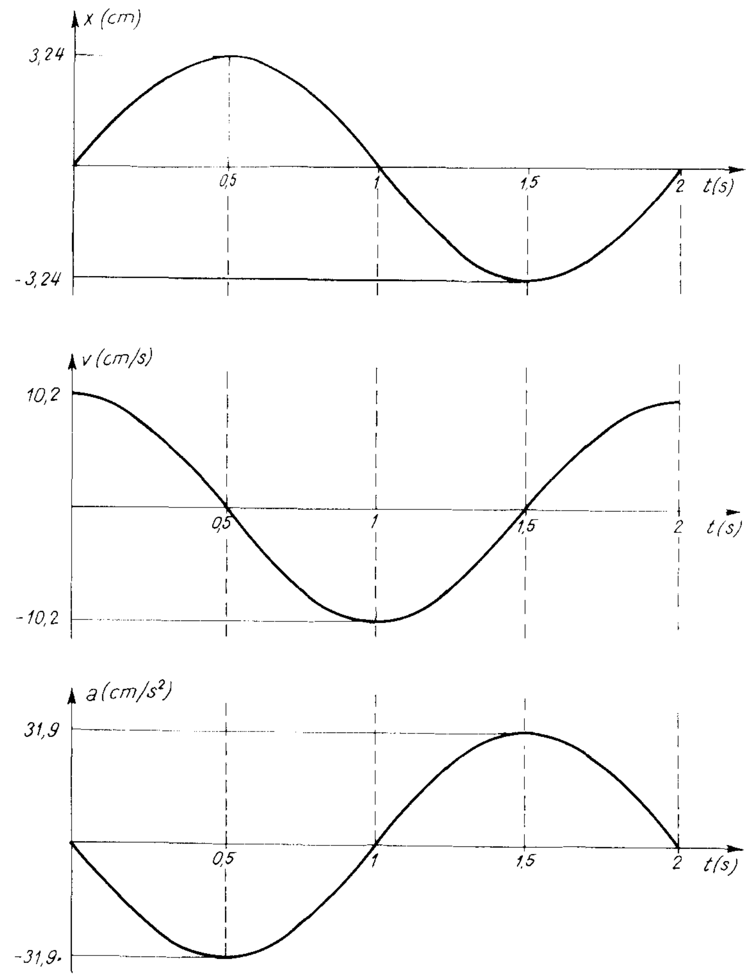
B.4. *a)* $U = 1{,}108$ V. *b)* $Q = 2{,}216 \cdot 10^{-6}$ C.

B.5. *a)* $p = 7{,}39 \cdot 10^{4}$ Pa. *b)* $Q = 3{,}39 \cdot 10^{[illegible]}$ J.

B.6. *a)* $t = \dfrac{T}{4} = 0{,}5$ s.

b) $A = 3{,}24$ cm; $v_{\text{max}} = 10{,}2\ \dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$; $a_{\text{max}} = 31{,}9\ \dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}.$

c)



C.1. *a)* $l = 3{,}1$ m. *b)* $F = 1550$ N.

C.2. $c = 3{,}59 \cdot 10^2 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot {}^\circ\mathrm{C}}$.

C.3. *a)* $F = 960$ N.

b) $W =$ [illegible] Az emelő erő munkája növelte a test helyzeti és mozgási energiáját. A mozgási energia növekedése:

$E_{\mathrm{kin}} = 4000$ J.

A helyzeti energia növekedése:

$E_{\mathrm{pot}} = 20\,000$ J.

C.4. *a)* $f = 0{,}16$ m.

b) $t = 0{,}2$ m.

C.5. *a)* $P = 15\,650$ W.

b) $R = 3{,}1$ ohm.

C.6. $R = 11$ ohm; $L = 35{,}5$ mH; $C = 285$ μF.

D.1. $\varrho = 7{,}49 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

D.2. *a)* $m = 241$ kg. *b)* $E = 3600$ kWh.

D.3. *a)* $k = 30$ cm *b)* $l = 10$ cm.

D.4. *a)* $v = 21{,}2 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *b)* $F = 9370$ N.

D.5. $t = 41{,}37$ °C.

D.6. *a)* $U_1 = 125$ V; $U_2 = 75$ V;

b) $U_1 = 113$ V; $U_2 = 87$ V.

E.1. *a)* $E_{\mathrm{kin}} = 90$ J.

b) $h = 1{,}84$ m.

E.2. *a)* $R = 4$ ohm;

b) $A = 0{,}17$ mm².

E.3. *a)* $m = 6{,}67$ g

b) $t = 310{,}1$ °C.

E.4. $F = 237{,}6$ N.

E.5. $f = \frac{d}{4}$.

E.6. *a)* $L = 0{,}312$ H; $C = 16{,}2$ μF.

b) $P_1 = P_2 = 200$ W.

25. Ismétlő feladatcsoportok II.

F.1. $v = 434\ \frac{m}{s}$.

F.2. *a)* $I = 1{,}2$ A, *b)* $P = 14{,}4$ W.

F.3. 53,3 mm $\leqq t \leqq$ 70 mm.

F.4. *a)* $F = 81$ N; *b)* $F = 106{,}5$ N.

F.5. *a)* $P = 250$ W;
b) $Z = 250$ ohm; $R = 125$ ohm; $L = 0{,}686$ H.

F.6. $p = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa.

G.1. $t = 0{,}81$ s.

G.2. *a)* $I = 0{,}6$ A; *b)* $I = 0{,}6$ A.

G.3. $t_2 - t_1 = 25{,}5$ °C.

G.4. n = 1,54.

G.5. $\varrho = 2{,}5\ \frac{g}{cm^3}$.

G.6. *a)* A kapcsoló 1. állása esetén: $I_{eff} = 0{,}334$ A; $P = 11{,}1$ W.
A kapcsoló 2. állása esetén: $I_{eff} = 0{,}59$ A; $P = 34{,}5$ W.
b) Áram csak a kapcsoló 1. állása esetén folyik, ekkor:
$I = 1{,}1$ A; $P = 121$ W.

H.1. *a)* $R = 806{,}7$ ohm; *b)* $Q = 10{,}30$ C.

H.2. *a)* $P = 425{,}75$ W; *b)* $P = 608{,}21$ W.

H.3. $f = 12$ cm.

H.4. $h_1 = 12$ m; $h_2 = 19{,}2$ m.

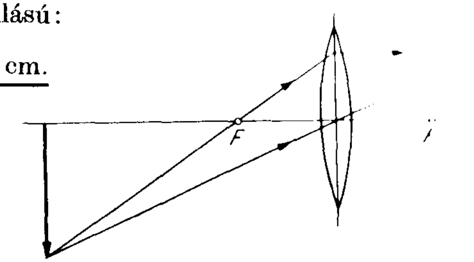
H.5. *a)* 15,46 %. *b)* $8{,}6 \cdot 10^4$ Pa.

H.6. $R = 1000$ ohm; $L = 5$ H.

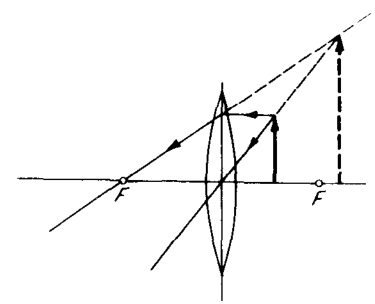
I.1. $F = 345$ N.

I.2. *a)* $P = 252$ W. *b)* $R = 2{,}28$ ohm.

I.3. Ha a kép fordított állású:
$t_1 = 30$ cm; $k_1 = 60$ cm.



Ha a kép egyenes állású:
$t_2 = 10$ cm; $k_2 = 20$ cm.



I.4. *a)* $p = 2{,}2 \cdot 10^6$ Pa. *b)* $m = 1171{,}3$ g.

I.5. $Q_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ C; $Q_2 = 15 \cdot 10^{-5}$ C.

I.6. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha = 54{,}7°$.

J.1. $F = 28{,}9$ N.

J.2. $U = 224$ V.

J.3. $f = 25$ cm.

J.4. *a)* $p = 1{,}68 \cdot 10^5$ Pa. $T = 454$ K.
b) $V = 2{,}94$ liter; $T = 401$ K.

J.5. $U = 0{,}25$ V.

J.6. *a)* $\Delta x = 4$ cm.
b) $A = 3$ cm; $f = 5{,}05 \frac{1}{s}$

26. Ismétlő feladatcsoportok III.

K.1. $F = 62{,}96$ N.

K.2. $m = 2{,}75$ g.

K.3. $m = 0{,}095$ g.

K.4. $r = 20$ cm.

K.5. $Q = 1{,}96 \cdot 10^{-18}$ C.

K.6. A szélső tömegek sebessége:

$$v_1 = 3{,}49 \frac{m}{s}.$$

A felső tömeg végsebessége:

$$v_2 = 4{,}93 \frac{m}{s}.$$

L.1. *a)* $F = 19{,}62$ N.
b) $Q = 3924$ J.

L.2. $t = 12{,}6$ h.

L.3. $h = 1{,}6$ m.

L.4. $m = 140$ g.

L.5. $f = 27{,}5$ Hz.

L.6. $\mu = 0{,}22$.

M.1. $t = 0{,}25$ s; $s = 0{,}919$ m.

M.2. $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{4}.$

M.3. $n = \frac{4}{3}$.

M.4. $\mu = 0{,}433$.

M.5. *a)* $Q = 7{,}91 \cdot 10^{8}$ J.
b) $V_2 = 1{,}07 \cdot 10^4$ m^3.

M.6. *a)* $P = 93{,}1$ W.
b) $R = 181$ ohm.

N.1. $s = 50$ m.

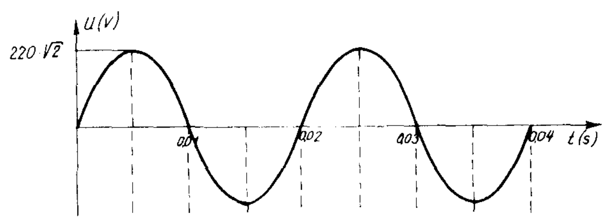
N.2. $l = 48{,}4$ m.

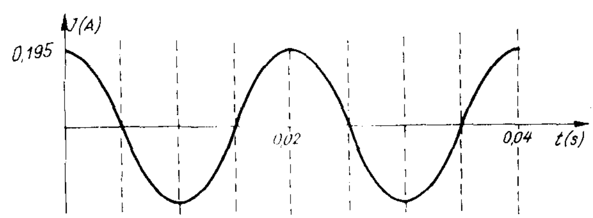
N.3. $d = 113{,}6$ cm.

N.4. $Q = 1263$ J.

N.5. *a)* $P = 0$.
b) $U(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 314\,t$;

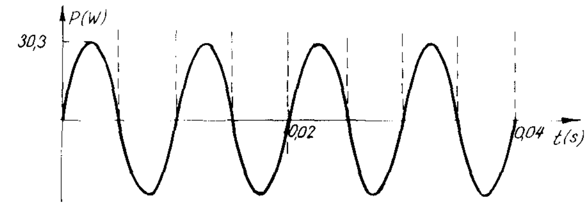
$$I(t) = 0{,}195 \cdot \sin\left(314\,t + \frac{\pi}{2}\right);$$





c) $P(t) = 60{,}6 \cdot \sin(314 \cdot t) \cdot \sin\left(314\,t + \frac{\pi}{2}\right)$;

$P(t) = 30{,}3 \cdot \sin 628\,t$.



N.6. *a)* $s = 8$ cm.
b) $t = 2{,}55$ s.

O.1. *a)* $\varrho = 3{,}57$ kg/dm^3,
b) $\varrho = 0{,}714$ kg/dm^3.

O.2. *a)* $I = 0{,}2$ A;
b) $U = 0{,}08$ V.

O.3. *a)* $k = 4{,}2$ m.
b) A megvilágítás erőssége az eredetinek 0,45 része.

O.4. $c = 153$ m/s iránya a keleti iránnyal $\alpha = 51{,}65°$ szöget zár be délről.

O.5. $\frac{V_1}{V_0} = 1{,}69$.

O.6. *a)* $U = 100 \cdot \sin\left(125\,t + \frac{\pi}{2}\right)$
b) $t = 8{,}37 \cdot 10^{-3}$ s. Ez a periódusidő egyhatod része.

TARTALOM

FELADATOK

MEGOLDÁSOK