1. Zárthelyi

A2 2011 tavasz

1. Legyen L tetszőleges véges dimenziós lineáris tér és $L_1 \subseteq L$ altere L-nek. Mutassa meg, hogy ha $\dim L_1 = \dim L$, akkor $L_1 = L$.

2. Adjon meg egy olyan $\mathbf{R}^4$-beli vektort, ha van ilyen, mely nincs benne egyetlen olyan altérben sem, melyet az alábbi vektorok közül három feszít ki!

$$v_1 = (1,0,1,0),\ v_2 = (0,1,0,1),\ v_3 = (-1,0,0,1),\ v_4 = (0,-1,1,1)$$

3. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mind $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, mind $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ esetén határozza meg az összes olyan 2×2-es $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ mátrixot, amellyel jobbról szorozva
(a) nullmátrixot
(b) egységmátrixot
kapunk!

4. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ olyan $n \times n$-es mátrix, melynek minden elemére fennáll, hogy $a_{ij} = \min(i, j)$. Mutassa meg, hogy $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 1$.

5. Határozza meg $\mathbf{R}^3$–on a z tengely körüli $+15°$–os forgatás szokásos bázisbeli mátrixának 90-edik hatványát!

6.
(a) Melyik igaz, melyik nem?
  (1) Lineárisan független vektorrendszer minden része is lineárisan független.
  (2) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a tér minden eleme előáll ezen vektorrendszer elemeinek
    lineáris kombinációjaként.
  (3) Véges dimenziós lineáris térnek véges sok bázisa van.
  (4) Minden L lineáris tér esetén van olyan n pozitív egész, hogy az L dimenziója n.

(b) Melyik igaz az összes n ismeretlenes m darab egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre?
  (1) Pontosan akkor létezik egyetlen megoldás, ha $m = n$.
  (2) Nem létezik megoldás, ha $n < m$.
  (3) Amennyiben egyáltalán létezik, nem egyértelmű a megoldás, ha $n > m$.
  (4) Mindig végtelen sok megoldás van, ha $n > m$.

1. Zárthelyi megoldásokkal

A2 2011 tavasz

1. Legyen L tetszőleges véges dimenziós lineáris tér és $L_1 \subseteq L$ altere L-nek. Mutassa meg, hogy ha $\dim L_1 = \dim L$, akkor $L_1 = L$.

MO. Jelöljük tetszőleges $X \subseteq L$ esetén $\mathcal{L}(X)$-el az X által generált alteret.

Legyen e bázisa L_1-nek, ekkor e n elemű lineárisan független vektorrendszer és $\mathcal{L}(e) = L_1$. **4p**

$L_1 \subseteq L$, tehát e n elemű lineárisan független vektorrendszere L-nek is, így bázisa is annak, hisz $\dim L = n$. Ezért $\mathcal{L}(e) = L$, tehát $L_1 = \mathcal{L}(e) = L$. **6p**

10p

2. Adjon meg egy olyan $\mathbf{R}^4$-beli vektort, ha van ilyen, mely nincs benne egyetlen olyan altérben sem, melyet az alábbi vektorok közül három feszít ki!

$$v_1 = (1,0,1,0),\ v_2 = (0,1,0,1),\ v_3 = (-1,0,0,1),\ v_4 = (0,-1,1,1)$$

MO. Legyen az ismeretlen vektor $v = (a,b,c,d)$. Gauss-elimináció után a vektorrendszer mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2c-d-a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d-c+a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2c-2a-d+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d-c+a-b \end{array}\right), \qquad \mathbf{7p}$$

Következésképp, (v_1, v_2, v_3, v_4) $\mathbf{R}^4$ egy bázisa, azaz elemei lineárisan függetlenek és ha pl. $a = b = c = 0$ és $d = 1$, akkor a $v = -v_1 + v_2 - v_3 + v_4$ a feltételeknek megfelelő, hisz minden báziselem irányában (azaz a többi háromtól lineárisan független irányban) van nem nulla komponense. (Valóban, ha pl. $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ volna, akkor $-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 = v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alapján $v_4 \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ volna.) **3p**

10p

3. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mind $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, mind $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ esetén határozza meg az összes olyan 2×2-es $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ mátrixot, amellyel jobbról szorozva

(a) nullmátrixot

(b) egységmátrixot

kapunk!

MO. (a) Két homogén egyenletrendszer:

(1) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1 = c\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{\mathbf{x}}_2 = d\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ -c & -d \end{pmatrix}$ **3p**

(2) $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ oszlopai lineárisan függetlenek, csak triviális megoldás van: $\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2p**

(b) Inverz mátrix keresés:

(1) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ oszlopai lineárisan összefüggnek $\rightsquigarrow$ nincs inverz. **2p**

(2) $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ inverzéhez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{3p}$$

10p

Folytatás a következő oldalon.

4. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ olyan $n \times n$-es mátrix, melynek minden elemére fennáll hogy $a_{ij} = \min(i,j)$.
Mutassa meg, hogy $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 1$.

MO. A definícióból $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$, **2p**

így minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén az első sor k-szorosát kivonva a k. sorból, azt kapjuk, hogy

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(n-2) & -(n-3) & -(n-4) & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -(n-1) & -(n-2) & -(n-3) & \dots & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$ **4p**

(Ez például $n = 5$-re $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.)

Mivel itt az utolsó oszlop egyetlen nem nulla eleméhez tartozó aldetermináns értéke $(-1)^{n-1}$, **3p**
hisz ez egy $n-1$-ed rendű háromszögdetermináns, melynek főátlójában csupa -1 áll, az egész determinánst az utolsó oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} = 1$. **1p**

10p

5. Határozza meg $\mathbf{R}^3$–on a z tengely körüli $+15°$–os forgatás szokásos bázisbeli mátrixának 90-edik hatványát!

MO. Legyen a $+15°$–os forgatás operátora F, és az identitás I. Mivel $4 \cdot 360 = 96 \cdot 15 \rightsquigarrow$
$F^{96} = I \rightsquigarrow F^{90} = F^{-6}$, ami a $-6 \cdot 15° = -90°$-os forgatás operátora, **5p**

tehát $\underline{\underline{F}}_s{}^{90} = \underline{\underline{F^{90}}}_s = \underline{\underline{F^{-6}}}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hiszen $F^{-6}i = -j$, $F^{-6}j = i$, $F^{-6}k = k$

(ahol $s = (i,j,k)$ a szokásos bázis). **5p**

10p

6.

(a) Melyik igaz, melyik nem?

(1) Lineárisan független vektorrendszer minden része is lineárisan független.
(2) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a tér minden eleme előáll ezen vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként.
(3) Véges dimenziós lineáris térnek véges sok bázisa van.
(4) Minden L lineáris tér esetén van olyan n pozitív egész, hogy az L dimenziója n.

(b) Melyik igaz az összes n ismeretlenes m darab egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre?

(1) Pontosan akkor létezik egyetlen megoldás ha $m = n$.
(2) Nem létezik megoldás, ha $n < m$.
(3) Amennyiben egyáltalán létezik, nem egyértelmű a megoldás, ha $n > m$.
(4) Mindig végtelen sok megoldás van, ha $n > m$.

MO.

(a)

(1) Igen **1p**
(2) Nem: pl. $\mathbb{R}^3$-on $((1,0,0),(0,1,0))$ lin független, de $(0,0,1)$ nem áll elő ezek lineáris kombinációjaként **1p**
(3) Nem: pl. $\mathbb{R}$-nek minden $x \neq 0$ bázisa. **1p**
(4) Nem: pl. a végtelen valós elemű sorozatok terében minden n-hez van $n+1$ elemű lineárisan független rendszer: $\{(0,0,\dots,0,\overset{i}{\smile}{1},0,\dots) : i = 1,2,\dots n, n+1\}$ **2p**

(b)

(1) Nem: pl. $x+y=2, x-y=0, 2x+y=3$ – nek egyetlen megoldása az $x=y=1$ **1p**
(2) Nem: lásd **(1)** **1p**
(3) Igen: ha $\underline{\underline{A}}$ az együttható mátrix, akkor nyilván mindig $r(\underline{\underline{A}}) \leq \min\{n,m\}$ és egyértelmű a megoldás iff $r(\underline{\underline{A}}) = n$. Viszont $m < n \rightsquigarrow r(\underline{\underline{A}}) \leq \min\{n,m\} = m < n$. **2p**
(4) Nem: pl. $x+y+z=0, x+y+z=1$ – nek nincs megoldása. **1p**

10p