Jelek és rendszerek 2. (VIHVAB01)

2. HÁZI FELADAT:
Diszkrét idejű hálózatok vizsgálata idő- és frekvenciatartományban

2021 ősz

Zier Blanka Alexandra

Megjegyzések: *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* ***és a feladatlapot is be kell adni****. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* ***nem elegendő a végeredményeket közölni!*** *A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* ***a megoldás elvi lépéseit*** *ekkor is* ***részletesen*** *ismertetni kell.*

	1. alpont	2. alpont	3. alpont	4. alpont	5. alpont	6. alpont	$\sum$	Javító
1. feladat	/ 0,5	/ 0,4	/ 0,4	/ 0,2	–	–	/ 1,5	
2. feladat	/ 0,8	/ 0,6	/ 0,6	/ 0,4	/ 0,7	/ 0,4	~~/ 3,5~~	
							5 / 5*	

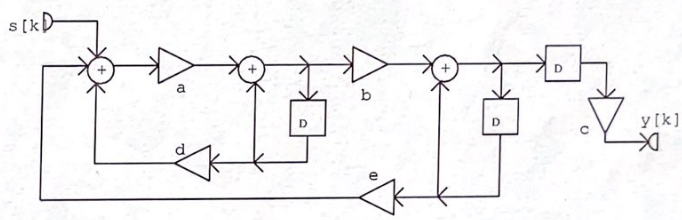
Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye:

MATLAB - és egyéb hasonló programok - nélküli házi feladat megoldás

A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A paraméterek az ábra alatti táblázatokból határozandók meg: a táblázatok **9.** sora vonatkozik erre a házi feladatra.

15.



Erősítések

	a	b	c	d	e
	0,5	0,5	0,7	0,9	0,9
	-0,5	-0,9	-0,5	0,4	0,5
	0,5	0,5	0,4	0,4	-0,5
	-0,5	-0,6	0,6	-0,6	0,9
	0,5	0,9	0,8	0,5	-0,9
	-0,5	0,6	-0,8	-0,7	-1
	0,5	0,4	2	0,4	-1
	-0,5	-0,4	0,9	0,4	0,5
9.	0,5	-0,6	0,5	0,5	0,5
	-0,5	0,6	0,5	0,6	0,9

1.4.

F	G	p
1,5	0,8	8/9
0,5	0,5	-8/9
-1	2	6/11
2,5	2	-6/11
1,2	1,4	7/11
-2,5	2,6	-7/11
3	-2,8	8/11
-3	2,5	-8/11
3	-3	9/11
2	1,4	-9/11

2.2.

	S	ϑ_0	ρ
	2,5	$3\pi/43$	$\pi/3$
	5	$3\pi/44$	$\pi/6$
	7,5	$3\pi/46$	$0{,}1\pi$
	10	$3\pi/47$	$\pi/4$
	12	$3\pi/49$	$\pi/5$
	15	$3\pi/50$	$-\pi/3$
	16	$3\pi/52$	$\pi/6$
	18	$3\pi/53$	$-\pi/4$
9.	20	$3\pi/55$	$0{,}3\pi$
	1,5	$3\pi/56$	$0{,}29\pi$

2.3. s[k] értékei

k	0	1	2	3	4	5	6
		1	-2	4	7	9	9
		-2	-2	1	-1	-1	8
		-2	-2	5	10	0	5
		8	-2	1	-1	2	0
		5	-2	4	-2	4	2
		3	-2	4	1	5	-1
		-3	-2	-4	1	-5	-1
		-1	-2	-2	3	6	-1
		0	-2	0	-5	2	2
		6	-2	-2	3	-6	10

1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normálalakját!

1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst. Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!

1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki (pl. fokozatos behelyettesítéssel) és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ütemre! Ha a megoldáshoz programot készít, annak vázlatát is mellékelje!

1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \ldots, 5$ értékekre!

1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a 1.3 és a 1.4 pontban kapott eredményeit (pl. a Ptolemy II v. ANDI programmal)!

2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdókarakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!

2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?

2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!

2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!

2.5 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét! A rendszeregyenlet megoldásával határozza meg a rendszer impulzusválaszának *formuláját*, és ezt vesse össze az 1.3. pontban kapott numerikus értékekkel!

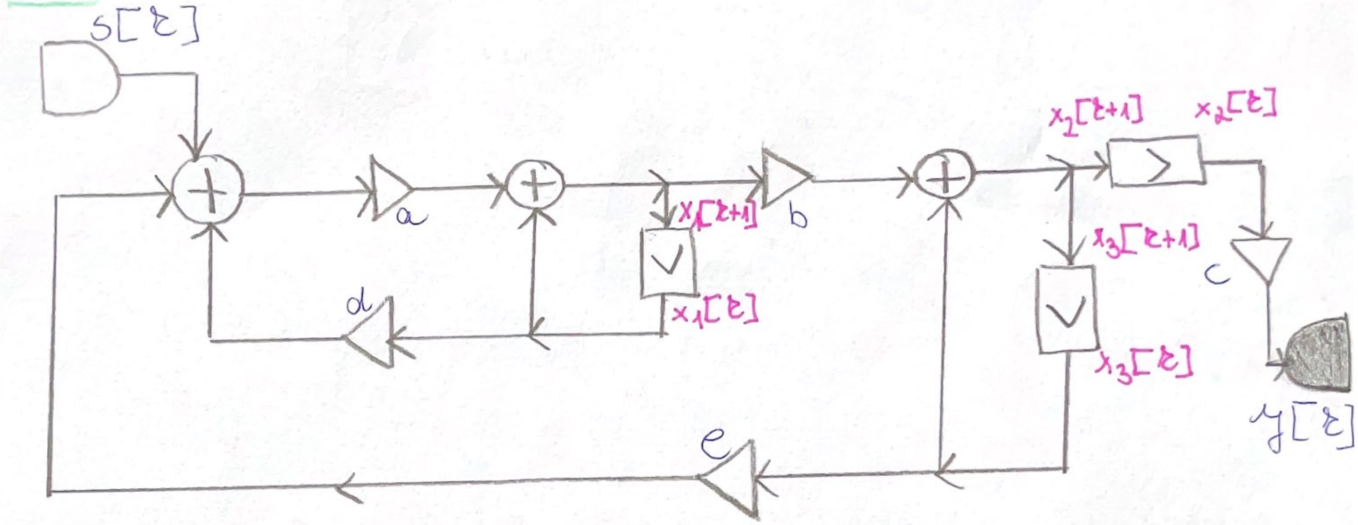
2.6 A 2.5-ben kiszámított impulzusválasz Fourier-transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt *normálalakra*! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!

2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.2 és a 2.4 pont eredményeit (pl. a Ptolemy II v. ANDI programmal)!

ZIER BLANKA ALEXANDRA

1. Vizsgálat az időtartományban

1.1.



$$x_1[k+1] = (1+ad)\,x_1[k] + ae\,x_3[k] + a\,s[k]$$

$$x_2[k+1] = \left[(1+ad)\,x_1[k] + ae\,x_3[k] + a\cdot s[k]\right]\cdot b + x_3[k]$$

$$x_3[k+1] = x_2[k+1]$$

$$y[k] = c\cdot x_2[k]$$

Értékek a 9. sorból:

a	b	c	d	e
0,5	-0,6	0,5	0,5	0,5

Az állapotváltozós leírás:

$$x_1[k+1] = 1{,}25\,x_1[k] + 0{,}25\,x_3[k] + 0{,}5\,s[k]$$

$$x_2[k+1] = -0{,}75\,x_1[k] + 0{,}85\,x_3[k] - 0{,}3\,s[k]$$

$$x_3[k+1] = -0{,}75\,x_1[k] + 0{,}85\,x_3[k] - 0{,}3\,s[k]$$

$$y[k] = 0{,}5\cdot x_2[k]$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1+ad & 0 & ae \\ b(1+ad) & 0 & 1+bae \\ b(1+ad) & 0 & 1+bae \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+ad & 0 & ae \\ b+bad & 0 & 1+bae \\ b+bad & 0 & 1+bae \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ -0{,}75 & 0 & 0{,}85 \\ -0{,}75 & 0 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} a \\ ba \\ ba \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,3 \\ -0,3 \end{bmatrix} \qquad \underline{C}^T = [0 \quad c \quad 0] = [0 \quad 0,5 \quad 0]$$

$$D = 0$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1+ad-\lambda & 0 & ae \\ b+bad & -\lambda & 1+bae \\ b+bad & 0 & 1+bae-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1,25-\lambda & 0 & 0,25 \\ -0,75 & -\lambda & 0,85 \\ -0,75 & 0 & 0,85-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(1,25-\lambda)[(-\lambda)(0,85-\lambda)] - 0 + 0,25(0-(-\lambda)(-0,75)) = 0$$

$$1,25\lambda^2 - \lambda^3 - \frac{17}{16}\lambda + 0,85\lambda^2 - \frac{3}{16}\lambda = 0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2 + 2,1\lambda - \frac{5}{4}\right) = 0 \qquad \boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{-2,1 \pm \sqrt{2,1^2 - 5}}{-2} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{1}{20} \cdot (21 + \sqrt{59}\, j) \\ \lambda_3 = \frac{1}{20}(21 - \sqrt{59}\, j) \end{cases}$$

$|\lambda_2| = \frac{5}{4} = 1,25$; $|1,25| > 1 \Rightarrow$ nem stabil a hálózat

1.2.

Más értékek választása:

a	b	c	d	e
0,2	-0,1	0,5	-0,9	0,05

ÁVLNA:

$$x_1[k+1] = 0,82\, x_1[k] + 0,01\, x_3[k] + 0,2 s[k]$$

$$x_2[k+1] = -0,082\, x_1[k] + 0,999\, x_3[k] - 0,02 s[k]$$

$$x_3[k+1] = -0,082\, x_1[k] + 0,999\, x_3[k] - 0,02 s[k]$$

$$y[k] = 0,5\, x_2[k]$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0,82 & 0 & 0,01 \\ -0,082 & 0 & 0,999 \\ -0,082 & 0 & 0,999 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,02 \\ -0,02 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = [0 \quad 0,5 \quad 0] \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0,82-\lambda & 0 & 0,01 \\ -0,082 & -\lambda & 0,999 \\ -0,082 & 0 & 0,999-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(0,82-\lambda)[\lambda^2-0,999\lambda) + 0,01(-0,082\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 0,999\lambda^2 + 0,82\lambda^2 - 0,81918\lambda - \frac{41}{50000}\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{1819}{1000}\lambda^2 - \frac{41}{50}\lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 1,819\lambda - 0,82) = 0 \qquad \boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{-1,819 \pm \sqrt{0,02876}}{-2} \quad \begin{matrix} \lambda_2 = 0,8247 \quad \boxed{\lambda_2 = 0,82} \\ \lambda_3 = 0,9942 \quad \boxed{\lambda_3 = 0,99} \end{matrix}$$

Minden $|\lambda| < 1$, így hálózatunk már stabil (GV + AS)

$\boxed{1.3.}$ Lépésről lépésre módszerrel:

Impulzusválaszt akkor kapunk, ha $s[k] = \delta[k]$

A rendszer kauzális, azaz $x_1[k] = x_2[k] = x_3[k] = 0$, ha $k \le 0$

$\underline{x}[0] = \underline{0}$

- $k = 0$

$x_1[1] = 0,82\, x_1[0] + 0,01\, x_3[0] + 0,2 \cdot s[0]$

$x_1[1] = 0,2$

$x_2[1] = x_3[1] = -0,082 \cdot x_1[0] + 0,999\, x_3[0] - 0,02 \cdot s[0]$
$= -0,02$

$y[0] = 0,5 \cdot x_2[0] = 0 \qquad y[1] = 0,5 \cdot x_2[1] = -0,01$

- $k = 1$

$x_1[2] = 0{,}82 \cdot x_1[1] + 0{,}01 \cdot x_3[1] + 0{,}2 \cdot s[1]$

$x_1[2] = 0{,}1638$

$x_2[2] = x_3[2] = -0{,}03638$ $\quad y[2] = -0{,}01819$

- $k = 2$

$x_1[3] = 0{,}1339522$

$x_2[3] = x_3[3] = -0{,}04977522$

$y[3] = -0{,}02488761$

- $k = 3$

$x_1[4] = 0{,}109343$

$x_2[4] = x_3[4] = -0{,}060709$

$y[4] = -0{,}03035476$

- $k = 4$

$x_1[5] = 0{,}089054$

$x_{2/3}[5] = -0{,}0696149$

$y[5] = -0{,}034807$

- $k = 5$

$x_1[6] = 0{,}072328$

$x_{2/3}[6] = -0{,}0768477$

$y[6] = -0{,}03842388$

- $k = 6$

$x_1[7] = 0{,}058540728$

$x_{2/3}[7] = -0{,}0827018445$

$y[7] = -0{,}041350922$

- $k = 7$

$x_1[8] = 0{,}047176379$

$x_{2/3}[8] = -0{,}08741948$

$y[8] = -0{,}04370974\mathrm{l}$

- $k = 8$

$x_1[9] = 0{,}037810436$

$x_{2/3}[9] = -0{,}0912000526$

$y[9] = -0{,}04560026$

- $k = 9$

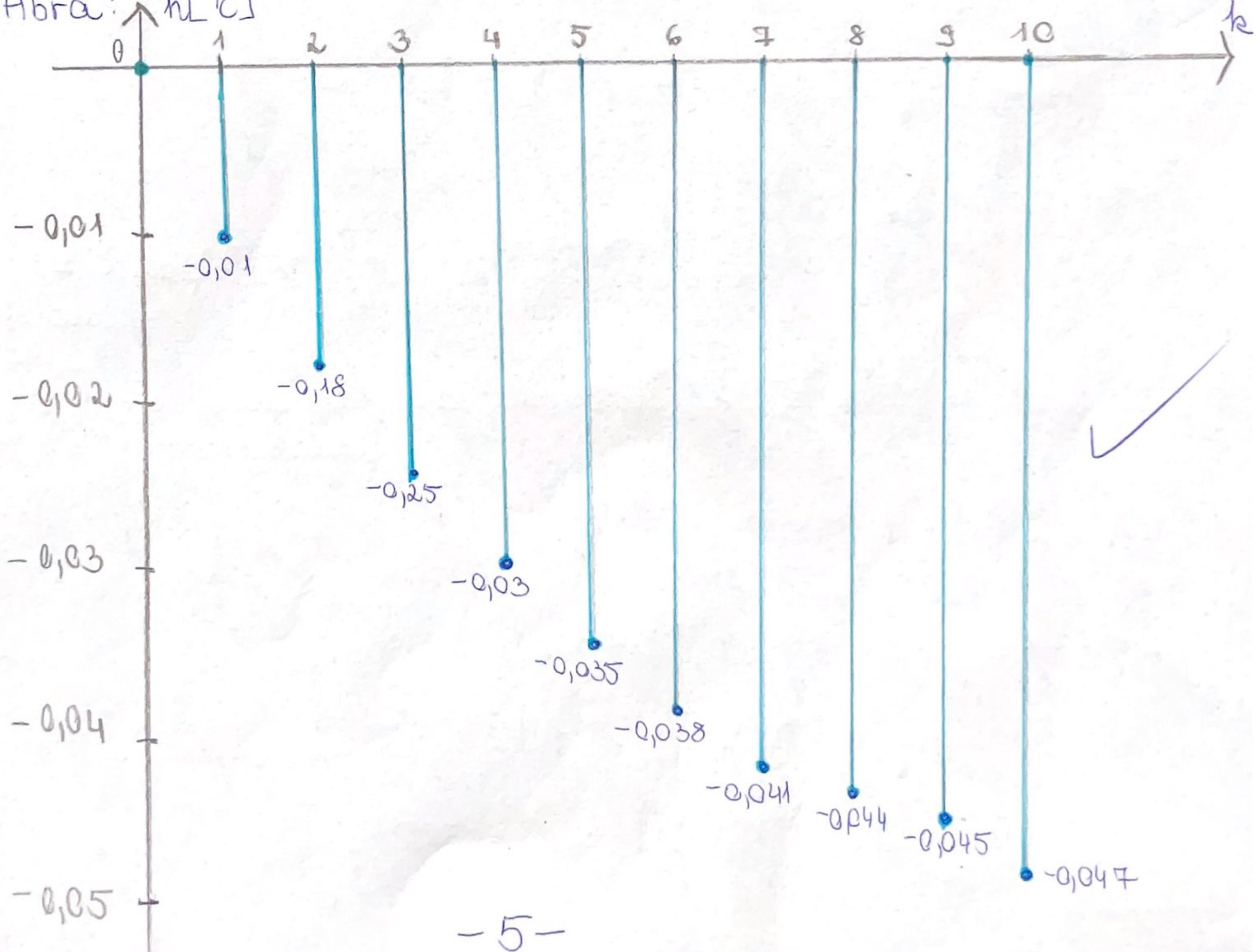
$x_1[10] = 0{,}030092 55$

$x_{2/3}[10] = -0{,}0942097$

$y[10] = -0{,}047104891$

k	δ[k]	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	h[k]
0	1	0	0	0	0
1	0	0,2	−0,02	−0,02	−0,01
2	0	0,1638	−0,03638	−0,03638	−0,01819
3.	0	0,1339	−0,04977	−0,04977	−0,02488
4	0	0,1093	−0,0607	−0,0607	−0,03035
5	0	0,08905	−0,06961	−0,06961	−0,0348
6	0	0,0723	−0,07684	−0,07684	−0,0384
7	0	0,0585	−0,0827	−0,0827	−0,04135
8	0	0,0472	−0,0874	−0,0874	−0,0437
9	0	0,0378	−0,0912	−0,0912	−0,0456
10	0	0,03009	−0,0942	−0,0942	−0,047104

Ábra:



Analitikus alak:

$$h[k] = \sum_{i=1}^{3} c_i \, r_i^k \quad , \text{ha } k \geq 2$$

$r_1 = 0$
$r_2 = 0,99$
$r_3 = 0,82$

$$h[k] = 0 \cdot \delta[k] - 0,01 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left(c_2 \cdot r_2^{k-2} + c_3 \cdot r_3^{k-2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 2 \rightarrow h[2] = c_2 + c_3 = -0,01819 \\ k = 3 \rightarrow h[3] = c_2 \cdot 0,99 + c_3 \cdot 0,82 \end{array}\right\} \quad c_2 = -0,01819 - c_3$$

$$= -0,0248$$

$$-0,99 c_3 + 0,82 c_3 = -0,0248 + 0,0180081$$

$$-0,17 c_3 = -6,87 \cdot 10^{-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_3 = 0,04 \\ c_2 = -0,058 \end{array}\right\}$$

$$h[k] = -0,01\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left(-0,058 \cdot 0,99^{k-2} + 0,04 \cdot 0,82^{k-2}\right)$$

1.4. $s[k] = \varepsilon[k]\left(F + G \cdot p^k\right)$

F	G	p
3	-3	$\frac{9}{11}$

$$s[k] = \varepsilon[k]\left[3 - 3 \cdot \left(\frac{9}{11}\right)^k\right]$$

$$y[k] = s[k] \cdot h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\, h[k-n]$$

$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} s[n]\, h[k-n]$$

$\left.\begin{array}{l} s[k] \\ h[k] \end{array}\right\}$ belépő + rsz. kauzális

$\downarrow$

a konvolúcióban véges számú szorzat lesz

$$s[0] = 3 - 3 \cdot \left(\frac{9}{11}\right)^0 = 0$$

$$s[1] = 3 - \frac{27}{11} = \frac{6}{11} = 0,545454$$

$$s[2] = 3 - \frac{243}{121} = \frac{120}{121} = 0,991735$$

$$s[3] = 3 - \frac{2187}{1331} = \frac{1806}{1331} = 1,35687$$

$$s[4] = 3 - \frac{19683}{14641} = 1,6556$$

$$s[5] = 3 - \frac{177147}{161051} = 1,9$$

$y[0] = s[0] \cdot h[0] = 0$

$y[1] = s[0]h[1] + s[1] \cdot h[0] = 0 + 0 = 0$

$y[2] = \cancel{s[0]h[2]} + s[1]h[1] + \cancel{s[2]h[0]} = -\frac{3}{550}$

$= -5{,}4545 \cdot 10^{-3}$

$y[3] = \cancel{s[0]h[3]} + s[1]h[2] + s[2]h[1] + \cancel{s[3]h[0]}$

$= -0{,}019839$

$y[4] = s[1]h[3] + s[2]h[2] + s[3]h[1] = -0{,}04518$

$y[5] = s[1]h[4] + s[2]h[3] + s[3]h[2] + s[4]h[1] =$

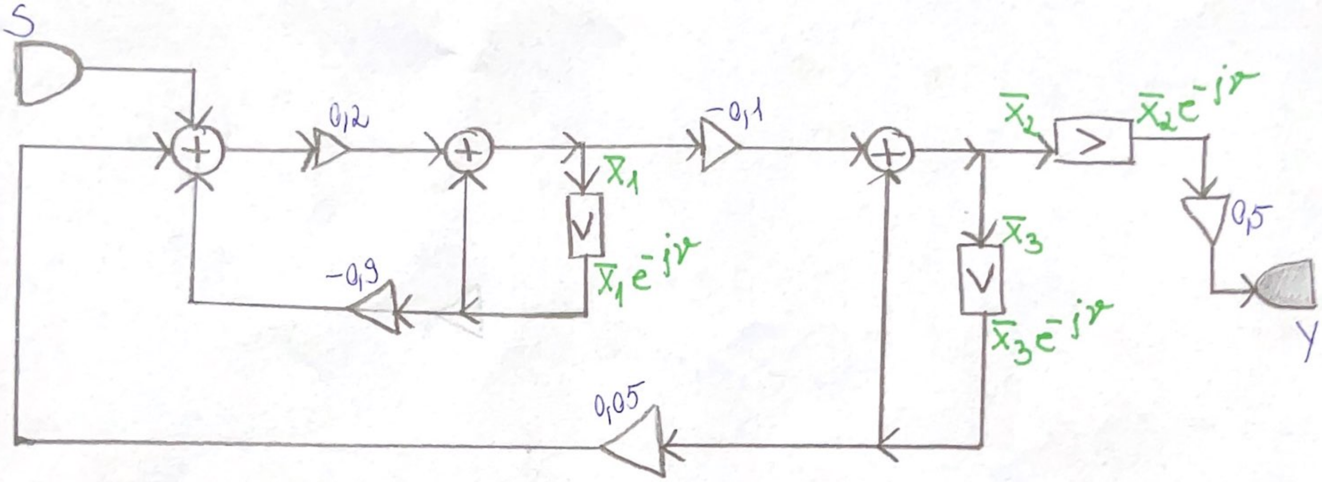
$= -0{,}082477$

k	$s[k]$	$h[k]$	$y[k]$
0	0	0	0
1	0,54545	−0,01	0
2	0,99173	−0,01819	$-\frac{3}{550}$
3	1,35687	−0,02488	−0,0198
4	1,65562	−0,03035	−0,04518
5	1,90005	−0,0348	−0,082477

(Amit ~~s[0]~~, vagy h[0]-lal szoroztunk be, mindig 0 volt)

2. Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1.



3 egyenlet:
(ÁVLNA-ból)

$\overline{X}_2 = \overline{X}_3$

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = 0{,}82\cdot\overline{X}_1 e^{-j\vartheta} + 0{,}01\cdot\overline{X}_2 e^{-j\vartheta} + 0{,}2\overline{S} \\ \overline{X}_2 = -0{,}082\,\overline{X}_1 e^{-j\vartheta} + 0{,}999\overline{X}_2 e^{-j\vartheta} - 0{,}02\overline{S} \\ \overline{Y} = 0{,}5\cdot\overline{X}_2\cdot e^{-j\vartheta} \end{cases}$$

$$\overline{X}_1 - 0{,}82\overline{X}_1 e^{-j\vartheta} = 0{,}01\cdot\overline{X}_2\cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}2\overline{S}$$

$$\overline{X}_1(1 - 0{,}82e^{-j\vartheta}) = 0{,}01\overline{X}_2 e^{-j\vartheta} + 0{,}2\overline{S}$$

$$\overline{X}_1 = \overline{X}_2\cdot\frac{0{,}01e^{-j\vartheta}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}} + \overline{S}\cdot\frac{0{,}2}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}}$$

$$\overline{X}_2 = \frac{-0{,}082e^{-j\vartheta}\cdot(0{,}01e^{-j\vartheta})\overline{X}_2}{1-0{,}82\cdot e^{-j\vartheta}} - \frac{0{,}082e^{-j\vartheta}\cdot0{,}2\overline{S}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}}$$

$$+0{,}999e^{-j\vartheta}\cdot\overline{X}_2 - 0{,}02\overline{S}$$

$$\overline{X}_2 + \frac{8{,}2\cdot10^{-4}\cdot e^{-2j\vartheta}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}}\cdot\overline{X}_2 - 0{,}999e^{-j\vartheta}\overline{X}_2 = \frac{-0{,}0164e^{-j\vartheta}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}}\overline{S}$$

$$\frac{-0{,}02(1-0{,}82e^{-j\vartheta})\overline{S}}{1-0{,}82\cdot e^{-j\vartheta}}$$

$$\overline{X}_2\left(1+\frac{8{,}2\cdot10^{-4}e^{-2j\vartheta}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}} - 0{,}999e^{-j\vartheta}\right) = \overline{S}\left(\frac{-0{,}0164e^{-j\vartheta} - 0{,}02 + 0{,}0164e^{-j\vartheta}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}}\right)$$

$$\overline{X}_2\left(\frac{1-0{,}82\,e^{-j\vartheta}+8{,}2\cdot10^{-4}e^{-2j\vartheta}-0{,}999\,e^{-j\vartheta}+0{,}81918\,e^{-2j\vartheta}}{1-0{,}82\,e^{-j\vartheta}}\right)=\overline{S}\left(\frac{-0{,}02}{1-0{,}82\,e^{-j\vartheta}}\right)$$

$$\overline{X}_2=\frac{-0{,}02}{1+0{,}82\,e^{-2j\vartheta}-1{,}819\,e^{-j\vartheta}}\cdot\overline{S}$$

$$\overline{Y}=0{,}5\,e^{-j\vartheta}\,\overline{X}_2=\frac{-0{,}01\,e^{-j\vartheta}}{1-1{,}819\,e^{-j\vartheta}+0{,}82\,e^{-2j\vartheta}}\cdot\overline{S}$$

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{S}}=\frac{-0{,}01\,e^{-j\vartheta}}{1-1{,}819\,e^{-j\vartheta}+0{,}82\,e^{-2j\vartheta}}=H(e^{j\vartheta})$$

$$\left(\begin{array}{l}1\to e^{2j\vartheta}\\ e^{-j\vartheta}\to e^{j\vartheta}\\ e^{-2j\vartheta}\to 1\end{array}\right)$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{-0{,}01\,e^{j\vartheta}}{e^{2j\vartheta}-1{,}819\,e^{j\vartheta}+0{,}82}$$

kicsit más alakban:

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{-0{,}01\cos\vartheta+0{,}01\cdot j\cdot\sin\vartheta}{\cos2\vartheta-j\cdot\sin2\vartheta-1{,}819\cdot\cos\vartheta+1{,}819\cdot j\sin\vartheta+0{,}82}=$$

$$=\frac{(-0{,}01\cos\vartheta)+j\cdot(0{,}01\sin\vartheta)}{\underbrace{(\cos2\vartheta-1{,}819\cos\vartheta+0{,}82)}_{Re}+j\underbrace{(1{,}819\sin\vartheta-\sin2\vartheta)}_{Im}}$$

Amplitudó karakterisztika:

$$K(\vartheta)=|H(e^{j\vartheta})|=\frac{\sqrt{(-0{,}01\cos\vartheta)^2+(0{,}01\sin\vartheta)^2}}{\sqrt{(\cos2\vartheta-1{,}819\cos\vartheta+0{,}82)^2+(1{,}819\sin\vartheta-\sin2\vartheta)^2}}$$

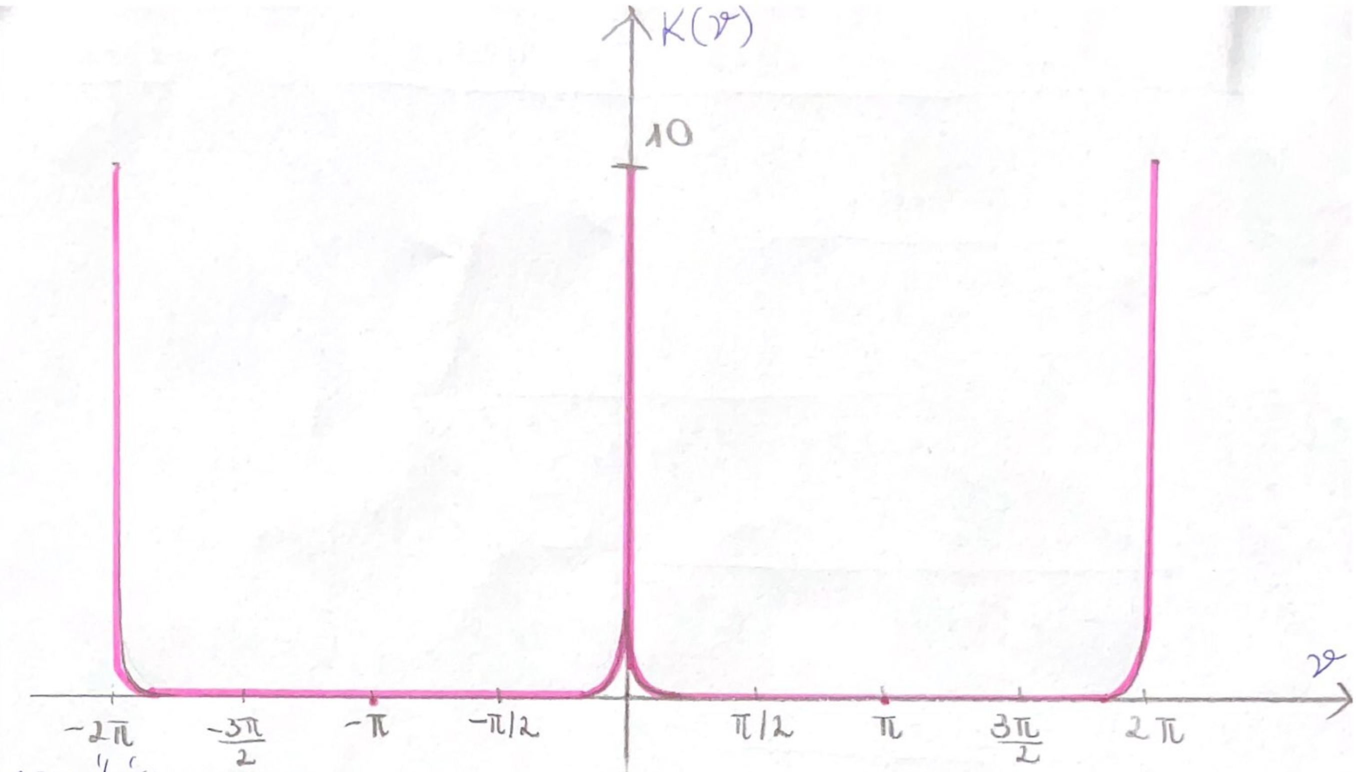
Néhány érték: $K(0)=10$ $\quad K(\pm\pi)=0{,}002748$

$K(\pm2\pi)=10$

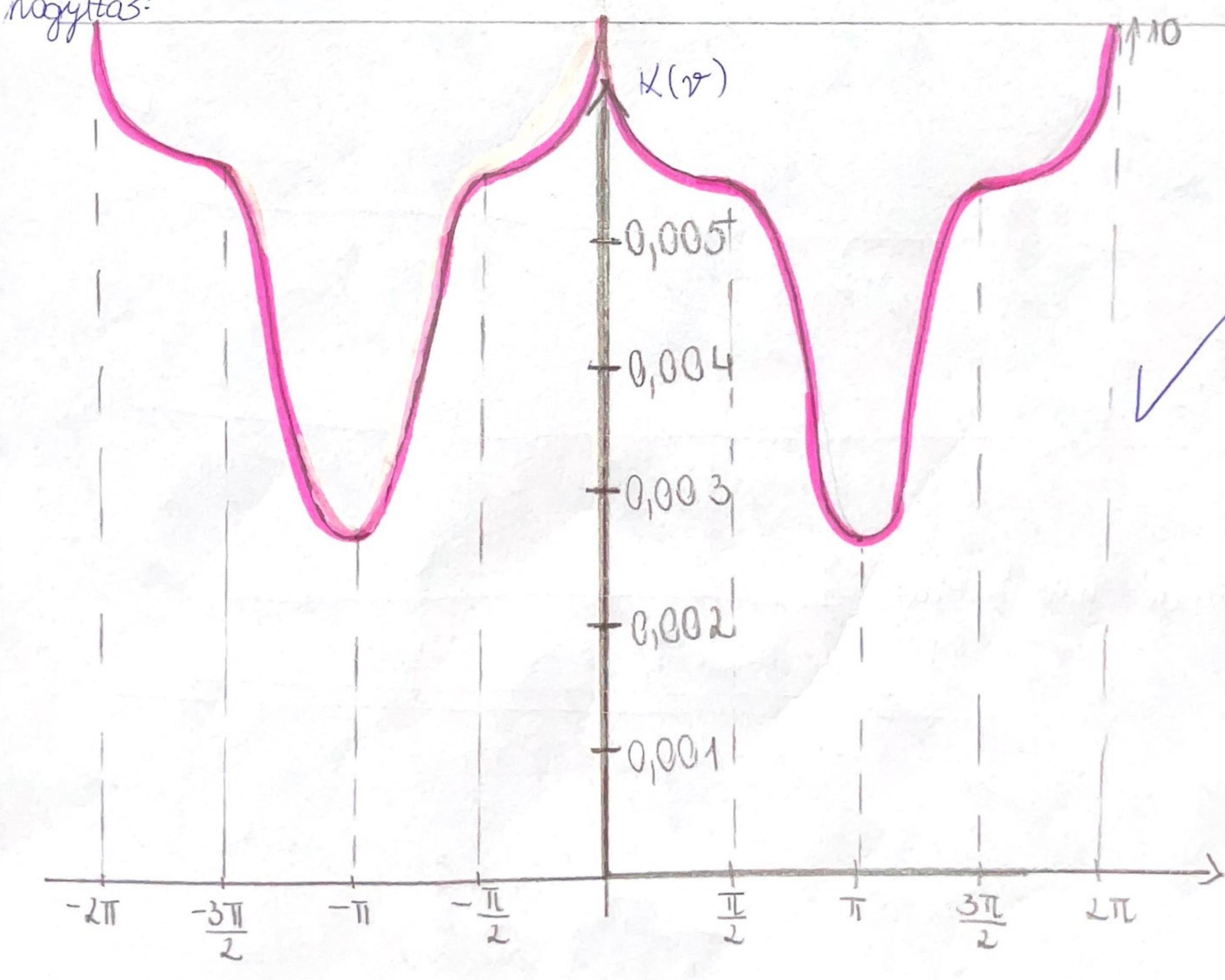
$K(\pm\frac{\pi}{2})=0{,}00547$

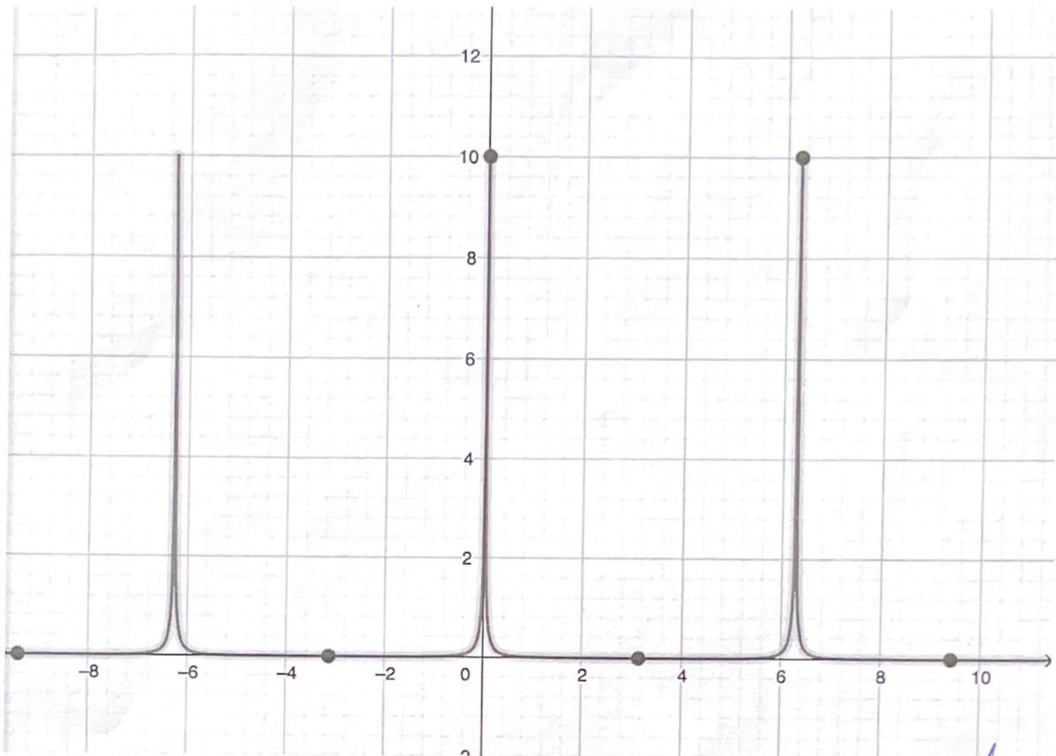
$K(\pm\frac{3\pi}{2})=0{,}00547$

Geogebraba beírva a következő ábrát kaptam az amplitudókarakterisztikára:


K(ϑ)
10
ϑ
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π

nagyítás:


10
K(ϑ)
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π



2

2.2.

Gerjesztés: $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$

S	ϑ_0	ρ
20	$\frac{3\pi}{55}$	$0{,}3\pi$

$s[k] = 20\cos\left(\frac{3\pi}{55} k + 0{,}3\pi\right)$

$\overline{S} = 20 e^{j0{,}3\pi}$ $\qquad \overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{S}$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{-0{,}01 e^{j\vartheta}}{e^{2j\vartheta} - 1{,}819 e^{j\vartheta} + 0{,}82} = \frac{-0{,}01 e^{\frac{3\pi}{55}j}}{e^{\frac{6\pi}{55}j} - 1{,}819 e^{\frac{3\pi}{55}j} + 0{,}82} =$$

$$= \frac{-0{,}01\cos\frac{3\pi}{55} + j\cdot 0{,}01 \sin\frac{3\pi}{55}}{\cos\frac{6\pi}{55} - 1{,}819\cos\frac{3\pi}{55} + 0{,}82 + j\left(1{,}819\cdot\sin\frac{3\pi}{55} - \sin\frac{6\pi}{55}\right)} =$$

$$= \frac{-9{,}8535\cdot 10^{-3} + 1{,}70522\cdot 10^{-3} j}{-0{,}0305142637\,7 - 0{,}0258695 j} \Rightarrow H(e^{j\vartheta_0}) = 0{,}16 - 0{,}19j$$

$$= 0{,}24997 \cdot e^{-j0{,}8745}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 = \frac{3\pi}{55}$$

$y_g[k] = s[k] \cdot H(e^{j\vartheta_0}) = 20 \cdot 0{,}24997 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{55} k + 0{,}3\pi - 0{,}8745666\right)$

$y_g[k] = 4{,}9994 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{55} k - 0{,}0679111\right)$

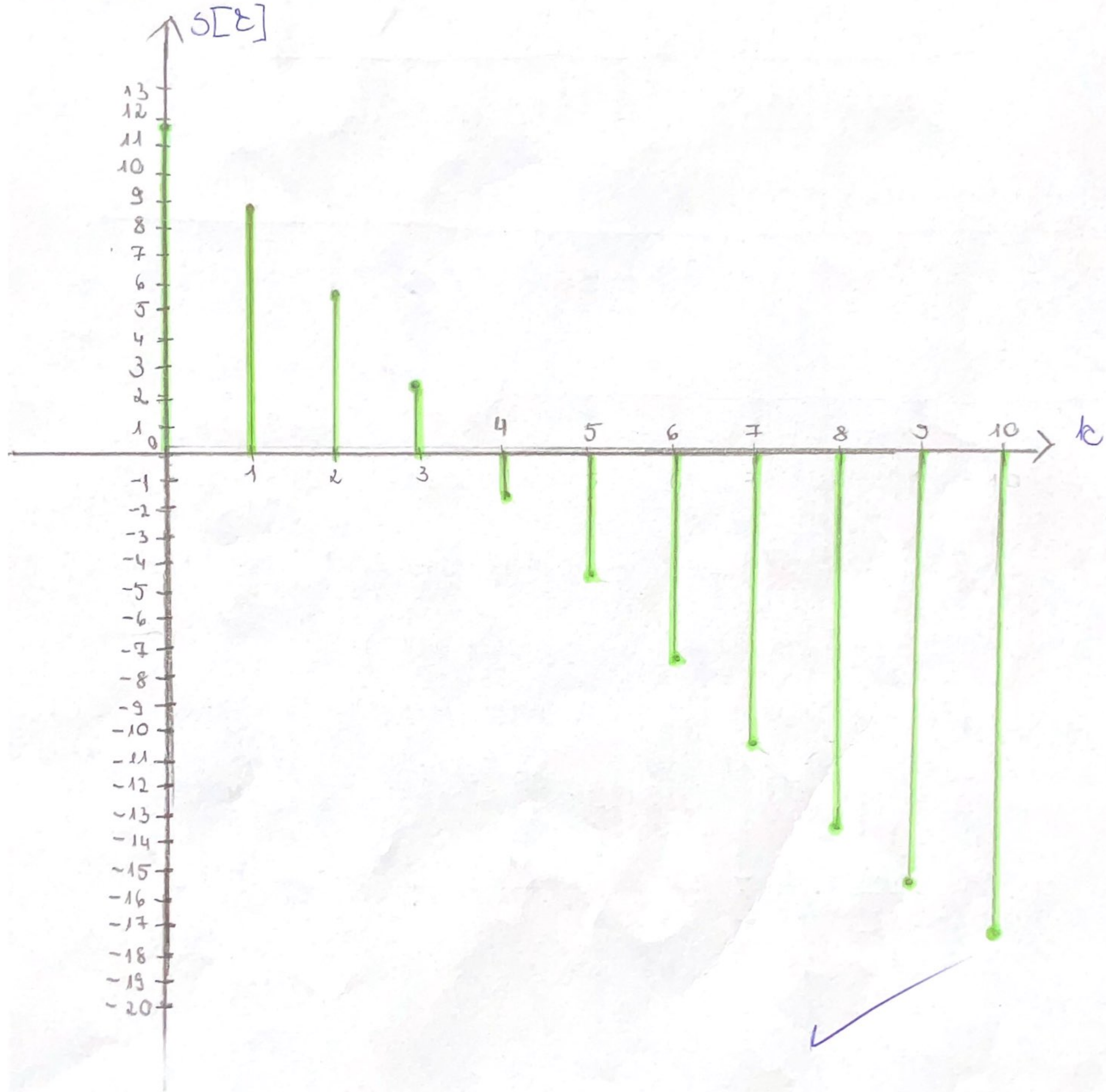
A fizikai tartalom feltétele: GV stabilitás, ez teljesül.

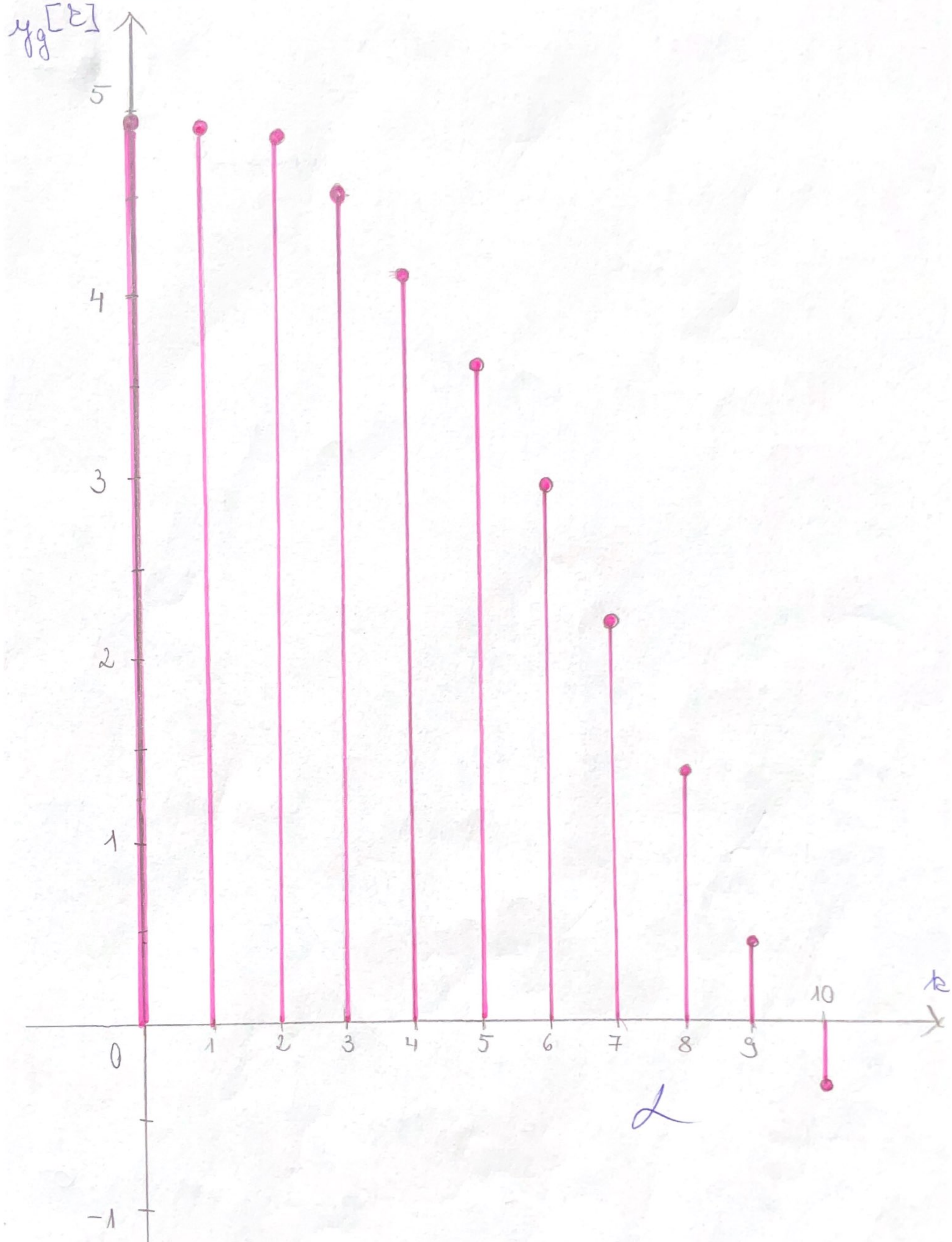
$\overline{Y} = \overline{S} \cdot \overline{H} = 20 \cdot e^{j0{,}3\pi} \cdot 0{,}24997 e^{-j0{,}87456} = 4{,}9994 e^{j0{,}067911}$

periódusidő: $\frac{M}{L} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{55}$ $\qquad \frac{M}{L} = \frac{3}{110} \rightarrow L = 110$

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	11,7557	8,8244	5,63465	2,2798	-1,141776	-4,5299
$y_g[k]$	4,98788	4,97266	4,811794	4,50997	4,07604	3,5227

k	6	7	8	9	10
$s[k]$	-7,7854	-10,8128	-13,523498	-15,838	-17,688658
$y_g[k]$	2,8662	2,125728	1,32299	0,4815	-0,3741





y_g[k]
5
4
3
2
1
0
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k

2.3.

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	0	-2	0	-5	2	2

$\vartheta_e = \frac{2\pi}{K}$ $\quad \vartheta_e = \frac{\pi}{3}$

$K = 6$

$s[k] = s[k+6] = [0 \ -2 \ 0 \ -5 \ 2 \ 2]$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} s[k]\, e^{-j\cdot i\cdot k\cdot\frac{2\pi}{K}}$$

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{6}(-7+4) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{6}\left(0 - 2e^{-j\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}} + 0e^{-j\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}} - 5e^{-j\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\cdot 1\cdot 4\cdot\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\cdot 1\cdot 5\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-2e^{-\frac{\pi}{3}j} - 5e^{-\pi j} + 2e^{-\frac{4\pi}{3}j} + 2e^{-\frac{5\pi}{3}j}\right)$$

$$= 0{,}6667 + 0{,}8660254j = 1{,}0929064\cdot e^{0{,}914743j}$$

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{6}\left(-2e^{-j\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}} - 5e^{-j\cdot 2\cdot 3\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\cdot 2\cdot 4\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\cdot 2\cdot 5\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-2e^{-\frac{2\pi}{3}} - 5e^{-2\pi j} + 2e^{-\frac{8\pi}{3}j} + 2e^{-\frac{10\pi}{3}j}\right)$$

$$= -1 + 0{,}2886751j = 1{,}040833\cdot e^{2{,}8605578j}$$

$$\bar{S}_3 = \frac{1}{6}\left(-2e^{-j\cdot\cancel{3}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{\cancel{3}}} - 5e^{-j3\pi} + 2e^{-j4\pi} + 2e^{-5\pi j}\right)$$

$$= 1{,}166667$$

$$\bar{S}_4 = \frac{1}{6}\left(-2e^{-\frac{4\pi}{3}j} - 5e^{-4\pi j} + 2e^{-\frac{16\pi}{3}j} + 2e^{-\frac{20\pi}{3}j}\right)$$

$$= -1 - 0{,}2886751j = 1{,}040833\cdot e^{-2{,}8605578j}$$

$$\bar{S}_5 = \frac{1}{6}\left(-2e^{-\frac{5\pi}{3}j} - 5e^{-5\pi j} + 2e^{-\frac{20\pi}{3}j} + 2e^{-\frac{25\pi}{3}j}\right)$$

$$= 0{,}6667 - 0{,}8660254j = 1{,}0929064\cdot e^{-0{,}914743j}$$

?

$\bar{S}_0 = -\frac{1}{2}$

$\bar{S}_1 = \bar{S}_5^* = 0,6667 + 0,866j = 1,0929\, e^{0,91474j}$

$\bar{S}_2 = \bar{S}_4^* = -1 + 0,2886751j = 1,0408 \cdot e^{2,86055j}$

$\bar{S}_3 = 1,16667$

$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_4$	$\bar{S}_5$
$-\frac{1}{2}$	$1,093 e^{0,915j}$	$1,04 e^{2,861j}$	$1,167$	$1,04 e^{-2,861j}$	$1,093 e^{-0,915j}$

komplex alak: $s[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \bar{S}_i \, e^{j \cdot k \cdot i \cdot \vartheta_0}$

$$s[k] = -\frac{1}{2} e^0 + 1,093 e^{j(k\frac{\pi}{3} + 0,915)} + 1,04 e^{j(k\frac{2\pi}{3} + 2,861)} + 1,167 e^{jk\pi} +$$
$$+ 1,04 e^{j(k\frac{\pi 4}{3} - 2,861)} + 1,093 e^{j(k\frac{5\pi}{3} - 0,915)}$$

$$\left(s[k] = -\frac{1}{2} + 1,093 \left[e^{j(k\frac{\pi}{3} + 0,915)} + e^{j(k\frac{5\pi}{3} - 0,915)} \right] + 1,04 \left[e^{j(k\frac{2\pi}{3} + 2,861)} + e^{j(k\frac{4\pi}{3} - 2,8} \right. + \right.$$
$$\left. + 1,167 e^{jk\pi} \right)$$

Valós együtthatók: $S_i^A = 2 \cdot \mathrm{Re}\{\bar{S}_i\}$ $\quad S_i^B = -2 \cdot \mathrm{Im}\{\bar{S}_i\}$

$0 < i < 3$ $\qquad S_0 = \bar{S}_0 = -\frac{1}{2}$

$S_1^A = 2 \cdot \mathrm{Re}\{\bar{S}_1\} = 1,334$ $\qquad S_1^B = -2 \cdot \mathrm{Im}\{\bar{S}_1\} = -1,732$

$S_2^A = 2 \cdot \mathrm{Re}\{\bar{S}_2\} = -2$ $\qquad S_2^B = -2 \cdot \mathrm{Im}\{\bar{S}_2\} = -0,577$

$S_3^A = 2 \cdot \mathrm{Re}\{\bar{S}_3\} = 2,334$ $\qquad S_3^B = -2 \cdot \mathrm{Im}\{\bar{S}_3\} = 0$

$$s[k] = S_0 + \sum_{i=1}^{K/2} \left(S_i^A \cdot \cos(i \cdot k \cdot \vartheta_0) + S_i^B \cdot \sin(i \cdot k \cdot \vartheta_0) \right)$$

$$s[k] = -\frac{1}{2} + 1,334 \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{3}\right) - 1,732 \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cdot \cos\left(2k \frac{\pi}{3}\right)$$
$$-0,577 \cdot \sin\left(2k \frac{\pi}{3}\right) + 2,334 \cdot \cos(k \cdot \pi)$$
$$\left(\cos\left(3k \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

A diszkrét F-sor pontosan állítja elő az eredeti jelet.

$\boxed{2.4.}$ Gerjesztés $\Rightarrow$ $s[k] = -\frac{1}{2} + 2{,}186\cos\left(\frac{k\pi}{3} + 0{,}915\right) +$

$+ 2{,}08\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}k + 2{,}861\right) + 1{,}167\cos(k\pi)$

Az átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{-0{,}01\,e^{-j\vartheta}}{1 - 1{,}819\,e^{-j\vartheta} + 0{,}82\,e^{-2j\vartheta}}$$

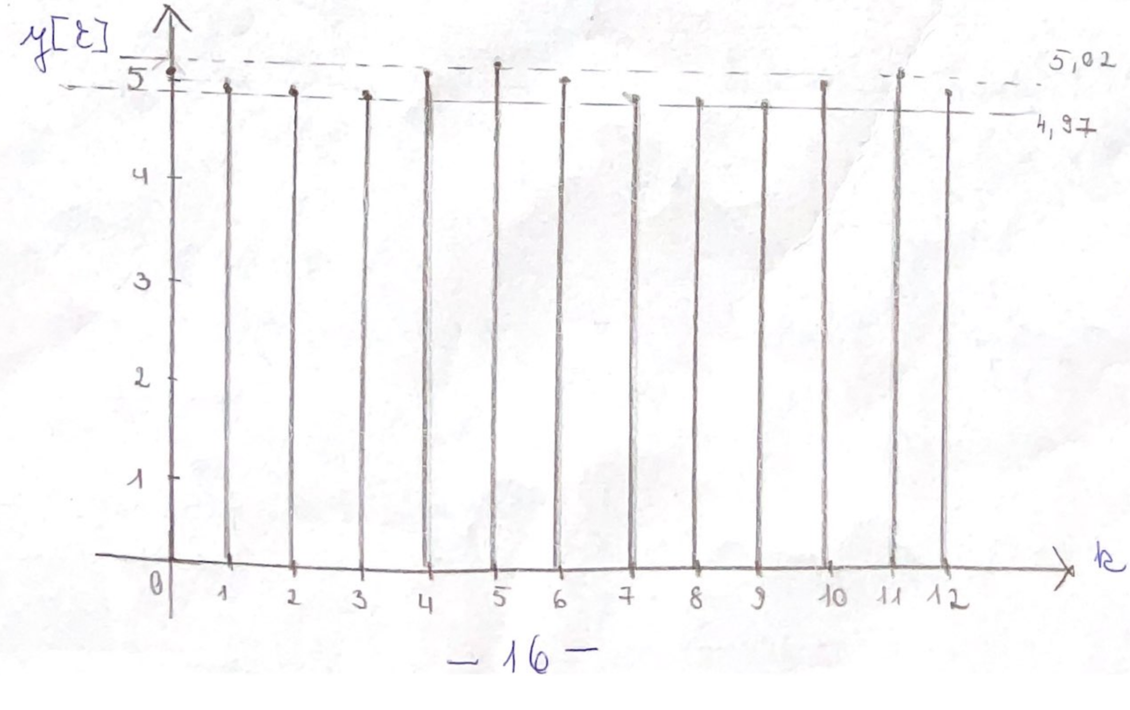
A rendszer linearitása miatt alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét:

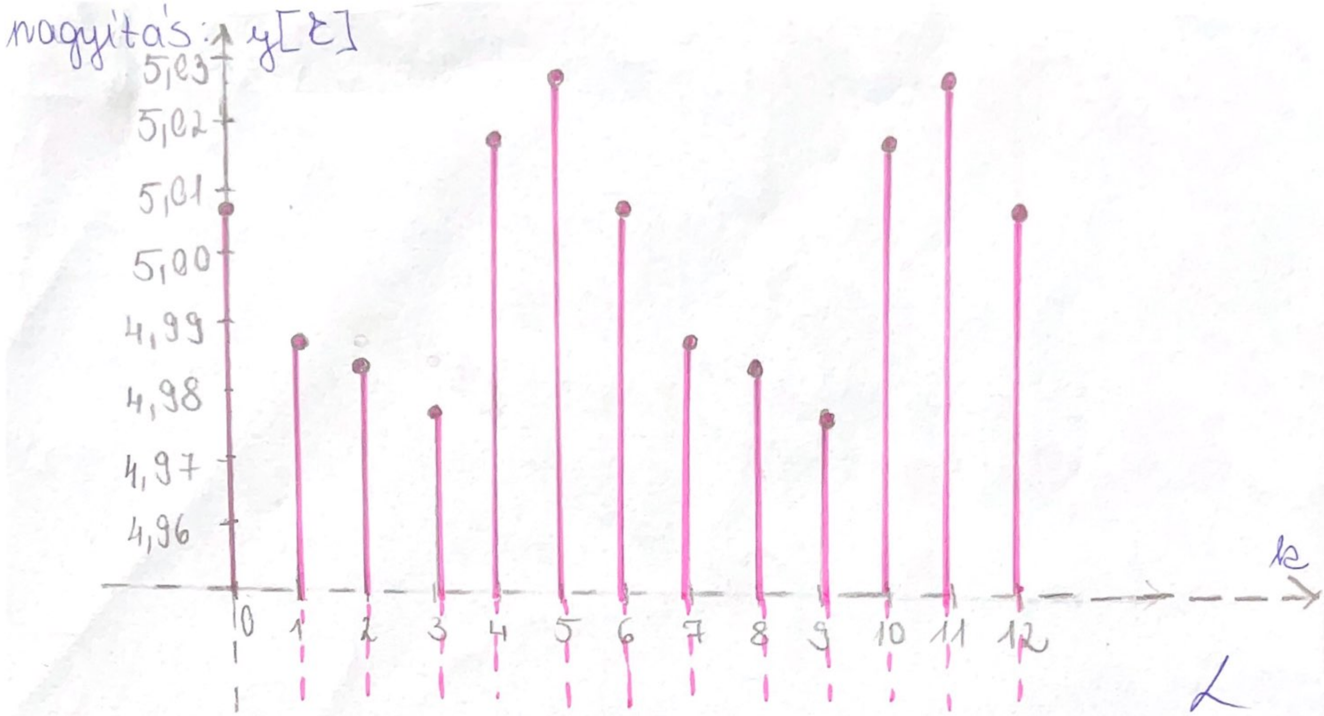
ϑ_0	$\overline{S}$	$\overline{H}$	$\overline{Y}$
0	$-\frac{1}{2}$	-10	5
$\frac{\pi}{3}$	$2{,}186\cdot e^{0{,}915j}$	$0{,}0108\,e^{0{,}1698j}$	$0{,}0237\,e^{1{,}085j}$
$\frac{2\pi}{3}$	$2{,}08\cdot e^{2{,}861j}$	$0{,}003658\,e^{0{,}057j}$	$7{,}6\cdot 10^{-3}\,e^{2{,}918j} = 0{,}0076\,e^{2{,}918j}$
π	$1{,}167$	$0{,}002748\,e^{0j}$	$3{,}2\cdot 10^{-3} = 0{,}0032$

$y[k] = 5 + 0{,}024\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{3} + 1{,}085\right) + 7{,}6\cdot 10^{-3}\cos\left(k\frac{2\pi}{3} + 2{,}918\right)$

$+ 3{,}2\cdot 10^{-3}\cdot\cos(k\pi)$

k	0	1	2	3	4	5
$s[k]$	0	-2	0	-5	2	2
$y[k]$	5,007	4,986	4,984	4,978	5,018	5,0256





2.5. $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{-0,01\, e^{-j\vartheta}}{1-1,819\, e^{-j\vartheta} + 0,82\, e^{-2j\vartheta}} = \dfrac{Y}{S}$

Rendszeregyenlet:

$$y[k] - 1,819\, y[k-1] + 0,82\, y[k-2] = -0,01 \cdot s[k-1]$$

Megoldása: Homogén rész: $\lambda^2 - 1,819\lambda + 0,82\lambda = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,819 \pm \sqrt{0,028761}}{2} < \begin{matrix} \lambda_1 = 0,994 = 0,99 \\ \lambda_2 = 0,824 = 0,82 \end{matrix}$$

$h[k] = c_1 \cdot 0,99^k + c_2 \cdot 0,82^k$ $\qquad h[0] = c_1 + c_2 = 1 \qquad c_1 = 1 - c_2$

$k = 2: h[2] = c_1 \cdot 0,99^2 + c_2 \cdot 0,82^2 \Rightarrow c_1 \cdot 0,98 + 0,67\, c_2 = -0,1819$

$k = 3: h[3] = c_1 \cdot 0,99^3 + c_2 \cdot 0,82^3 \Rightarrow c_1 \cdot 0,97 + 0,55 = -0,02488761$

$$c_1 = \frac{-0,01819 - 0,67\, c_2}{0,98}$$

$$\frac{0,54\, c_2 - 0,67\, c_2 - 0,01819}{0,9801} = -0,02488761 \quad \Bigg\} \quad \begin{matrix} c_2 = 0,04 \\ c_1 = -0,058 \end{matrix}$$

$$h[k] = -0,01\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left(-0,058 \cdot 0,99^{k-2} + 0,04 \cdot 0,82^{k-2}\right)$$

Megegyezik az 1.3.-ban kapott eredménnyel.

$\boxed{2.6.}$ $$\mathcal{F}\{h[k]\} = -0{,}01e^{-j\vartheta} - \frac{0{,}058e^{-j2\vartheta}}{1-0{,}99e^{-j\vartheta}} + \frac{0{,}04e^{-j2\vartheta}}{1-0{,}82e^{-j\vartheta}} =$$

$\Rightarrow$ számláló:

$$^\circ\left(-0{,}01e^{-j\vartheta}\right)\left(1-0{,}99e^{-j\vartheta}\right)\left(1-0{,}82e^{-j\vartheta}\right) =$$

$$= \left(-0{,}01e^{-j\vartheta} + 0{,}0099e^{-2j\vartheta}\right)\left(1-0{,}82e^{-j\vartheta}\right) =$$

$$= -0{,}01e^{-j\vartheta} - 0{,}0081e^{-3j\vartheta} + 0{,}0099e^{-2j\vartheta} + 0{,}0082e^{-2j\vartheta} =$$

$$= -0{,}01e^{-j\vartheta} + 0{,}018e^{-2j\vartheta} - 0{,}0081e^{-3j\vartheta}$$

$$^\circ\ -0{,}058e^{-j2\vartheta}\left(1-0{,}82e^{-j\vartheta}\right) = -0{,}058e^{-2j\vartheta} + 0{,}048e^{-3j\vartheta}$$

$$^\circ\ -0{,}04e^{-2j\vartheta}\left(1-0{,}99e^{-j\vartheta}\right) = -0{,}039e^{-3j\vartheta} + 0{,}04e^{-2j\vartheta}$$

nevező:

$$^\circ\left(1-0{,}99e^{-j\vartheta}\right)\left(1-0{,}82e^{-j\vartheta}\right) = 1 - 1{,}819e^{-j\vartheta} + 0{,}82e^{-2j\vartheta}$$

$$\mathcal{F}\{h[k]\} = \frac{-0{,}01e^{-j\vartheta} + \cancel{0{,}018e^{-2j\vartheta}} - \cancel{0{,}058e^{-2j\vartheta}} + \cancel{0{,}04e^{-2j\vartheta}} - \cancel{0{,}0081e^{-3j\vartheta}} - \cancel{0{,}039e^{-3j\vartheta}} + \cancel{0{,}048e^{-3j\vartheta}}}{1 - 1{,}819e^{-j\vartheta} + 0{,}82e^{-2j\vartheta}}$$

$$\mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\vartheta}) = \frac{-0{,}01e^{-j\vartheta}}{1-1{,}819e^{-j\vartheta}+0{,}82e^{-2j\vartheta}}$$

Megegyezik a 2.1.-ben kiszámított átviteli karakterisztikával ✓

ZIER BLANKA ALEXANDRA