1. feladat — 10 pont

A komplex számsíkon egy négyzet középpontja $o = -2 + 3\imath$, egyik csúcspontja pedig $a = -3 + 6\imath$. Adja meg a többi csúcspontot!

Megoldás: Toljuk el a négyzetet úgy, hogy a középpontja az origó legyen! Ekkor az a csúcs eltoltja $a' = a - o = -1 + 3\imath$, és az eltolt négyzet többi csúcsa $b' = a' \cdot \imath = -3 - \imath$, $c' = b' \cdot \imath = 1 - 3\imath$, és $d' = c' \cdot \imath = 3 + \imath$.
Az eredeti négyzet csúcsai $a = -3 + 6\imath$, $b = b' + o = -5 + 2\imath$, $c = c' + o = -1$ és $d = d' + o = 1 + 4\imath$.

2. feladat — 4+6+4 pont

Mondja ki és bizonyítsa be a konvergens sorozat reciprokáról tanult tételt!

Adjon példát olyan a_n és b_n sorozatokra, melyekre $\lim a_n = \lim b_n = 0$ és

(a) $\dfrac{a_n}{b_n} \to -2$ (b) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2}$ (c) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \infty$

Megoldás: Tétel: Ha a_n konvergens és nem nullsorozat, akkor $\dfrac{1}{a_n}$ is az $\boxed{\textbf{2p.}}$, és ekkor $\lim \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\lim a_n}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

Bizonyítás: Legyen $A = \lim a_n$!. Ekkor $A \in \mathbb{R}$, és $A \neq 0$. Mivel $|A|/2 > 0$, ezért létezik $N_1 \in \mathbb{R}$, melyre

$$n > N_1 \qquad \text{esetén} \qquad 0 < \frac{|A|}{2} = |A| - \frac{|A|}{2} < |a_n|,$$

vagyis $a_n \neq 0$ véges sok kivétellel, így $1/a_n$ sorozat.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges! Mivel $\dfrac{\varepsilon A^2}{2} > 0$, ezért létezik $N_2 \in \mathbb{R}$, melyre

$$n > N_2 \qquad \text{esetén} \qquad |a_n - A| < \frac{\varepsilon A^2}{2}.$$

Így

$$n > \max\{N_1, N_2\} \text{ esetén } \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|A - a_n|}{|a_n A|} < \frac{\varepsilon A^2/2}{A^2/2} = \varepsilon.$$

(a) $a_n = 2/n$, $b_n = -1/n$;

(b) $a_n = 1/n$, $b_n = 2/n$;

(c) $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$.

3. feladat — 4+8+6 pont

(a) Mondja ki valamelyik Weierstrass-tételt!

(b) Hol és milyen szakadása van az $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x^2+x}$ függvénynek?

(c) Adja meg az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{x^3}\right)$ függvény első és második deriváltját!

Megoldás:

(a) Kompakt halmaz folytonos képe kompakt. $\boxed{\textbf{4p.}}$

(b) Folytonos, így csak a nevező zérushelyeiben van szakadás: $x_1 = 0$ és $x_2 = -1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = 1\cdot(-1) = -1$, így ez egy megszüntethető szakadás $\boxed{\textbf{3p.}}$.

$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = \lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = \sin(1)\cdot\infty = \infty$, így ez másodfajú szakadás $\boxed{\textbf{3p.}}$.

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x^3}}e^{x^3}3x^2 \boxed{\textbf{3p.}} = \dfrac{e^{x^3}3x^2}{1+e^{2x^3}}$.

$f''(x) = \dfrac{(e^{x^3}3x^23x^2 + e^{x^3}6x)(1+e^{2x^3}) - e^{x^3}3x^2e^{2x^3}6x^2}{(1+e^{2x^3})^2}\boxed{\textbf{3p.}} = \dfrac{e^{x^3}(9x^4+6x) + e^{3x^3}(6x-9x^4)}{(1+e^{2x^3})^2}$.

4. feladat — 9+3 pont

Vizsgálja monotonitás és konvexitás szempontjából az

$$f(x) = (x^2-6x+10)e^{x-1}$$

függvényt! $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$

Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = (2x-6)e^{x-1} + (x^2-6x+10)e^{x+1} = (x^2-4x+4)e^{x-1}$

$0 = f'(x)$ megoldása $x_1 = 2$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$f''(x) = (2x-4)e^{x-1} + (x^2-4x+4)e^{x-1} = (x^2-2x)e^{x-1}$

$0 = f''(x)$ megoldásai $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+10}{e^{1-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{-e^{1-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{1-x}} = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

	$-\infty$	$]-\infty,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,\infty[$	∞	
f	0	$\uparrow\cup$	$\uparrow$infl.	$\uparrow\cap$	$\uparrow$infl.	$\uparrow\cup$	∞	**3p.**
f'		$+$	$+$	$+$	0	$+$		**1p.**
f''		$+$	0	$-$	0	$+$		**1p.**

, vagy

	$-\infty$	$]-\infty,2[$	2	$]2,\infty[$	∞
f	0	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	∞
f'		$+$	0	$+$	

	$-\infty$	$]-\infty,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,\infty[$	∞	
f	0	$\cup$	infl.	$\cap$	infl.	$\cup$	∞	**3p.**
f''		$+$	0	$-$	0	$+$		**2p.**

5. feladat* **4+8 pont**

Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt! $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: **Tétel:** Ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, és létezik F primitív függvénye is $[a,b]$-n, akkor $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ $\boxed{\textbf{4p.}}$.

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\arccos(x))\boxed{\textbf{4p.}}\Big]_{-1/2}^{0} = \ln\frac{4}{3}\ \boxed{\textbf{4p.}}.$$

6. feladat* **8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int (3x-1)\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3+5x+3}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

(a) $$\int \underbrace{(3x-1)}_{f}\underbrace{\mathrm{e}^{3x-1}}_{g'\,\boxed{\textbf{2p.}}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{(3x-1)}_{f}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3}}_{g} - \int \underbrace{3}_{f'}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3}}_{g}\,\mathrm{d}x\boxed{\textbf{3p.}} = (3x-1)\frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3} + c\boxed{\textbf{3p.}} = (x-\frac{2}{3})\mathrm{e}^{3x-1} + c$$

(b) $\displaystyle\frac{x^3+5x+3}{x^3+3x} = 1 + \frac{2x+3}{x(x^2+3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$ Szorozva (x^3+3x)-szel kapjuk, hogy $2x+3 = A(x^2+3)+(Bx+C)x = (A+B)x^2+Cx+3A$, amiből $A=1$, $C=2$ és $B=-1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

$$\int \frac{x^3+5x+2}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x} + \frac{-x+2}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+3} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\boxed{\textbf{2p.}} = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + \frac{2}{3}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + c\boxed{\textbf{2p.}} = x + \ln|x| - \frac{1}{2}ln(x^2+3) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

7. feladat* **10 pont**

$t = x^3-1$ helyettesítéssel határozza meg az $\displaystyle\int_1^2 3x^5\sqrt{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: $x = \sqrt[3]{t+1} \implies \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t-1}^2}\,\mathrm{d}t$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, így $\displaystyle\int_{x=1}^{2} 3x^5\sqrt[3]{x^3-1}\,\mathrm{d}x =$

$$\int_{t=1^3-1}^{2^3-1\boxed{\textbf{2p.}}} 3\left(\sqrt[3]{t+1}\right)^5\sqrt{t}\frac{1}{3\sqrt[3]{t+1}^2}\,\mathrm{d}t\boxed{\textbf{2p.}} = \int_0^7 (t+1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^7 t^{3/2} + t^{1/2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\left[\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boxed{\textbf{2p.}}\right]_0^7 = \left(\frac{98}{5} + \frac{14}{3}\right)\sqrt{7} = \frac{224}{15}\sqrt{7}\boxed{\textbf{2p.}}$$

8. feladat* **8 pont**

Mennyi a $[-1, 1]$ intervallumon az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának ívhossza?

Megoldás: $l = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\operatorname{ch}' x)^2}\,\mathrm{d}x$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= 2 \operatorname{sh} 1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$