Jelek és rendszerek zárthelyi segédlet

Nem tankönyv, inkább csak a fontos fogalmak és képletek gyűjteménye

Tartalomjegyzék

Frissítve: 2022. április 3., 20:50

1. Komplex számok

1.1. Alapok

Komplex egység	$j = \sqrt{-1}$
Valós rész	$a = \mathrm{Re}(c)$
Képzetes rész	$b = \mathrm{Im}(c)$
Norma / abszolútérték	$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \|c\|$
Árkusz / szög	$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
Algebrai alak	$c = a + jb = Ae^{j\varphi}$
Trigonometrikus alak	$c = A\cos\varphi + jA\sin\varphi$

1.2. Műveletek

$$c_1 = a_1 + jb_1 \qquad c_2 = a_2 + jb_2$$

1.2.1. Összeadás

$$c_3 = c_1 + c_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$$

1.2.2. Szorzás

$$c_4 = c_1 \cdot c_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$
$$c_4 = c_1 \cdot c_2 = A_1e^{j\varphi_1} \cdot A_2e^{j\varphi_2} = A_1A_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

1.2.3. Osztás

$$c_5 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$c_5 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{A_1e^{j\varphi_1}}{A_2e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

2. Mértani sorok

$$q \neq 1 : \sum_{k=0}^{N} a \cdot q^k = a \cdot \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$$N \to \infty,\ |q| < 1 : \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = \frac{a}{1 - q}$$

3. Deriválás

3.1. Láncszabály

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = f'\big(g(t)\big) g'(t)$$

3.2. Linearitás

$$\frac{d}{dt}\big(Ff(t) + Gg(t)\big) = Ff'(t) + Gg'(t)$$

4. Integrálás

4.1. Newton-Leibniz formula

$$\int\limits_a^b f'(t)\,dt = \big[f(t)\big]_a^b = f(b) - f(a)$$

4.1.1. Linearitás

$$\int\limits_a^b Ff(t) + Gg(t)\,dt = F\int\limits_a^b f(t)\,dt + G\int\limits_a^b g(t)\,dt$$

5. Állapotváltozós leírás (ÁVL)

5.1. Folytonos idő (FI)

$$\left\{x_1(t_a),\, x_2(t_a),\, \ldots,\, x_N(t_a)\right\} \quad \Longrightarrow \quad y(t_a)$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \qquad \underline{x}' = \underline{x}(t)$$

5.2. Diszkrét idő (DI)

$$\left\{x_1[k_a],\, x_2[k_a],\, \ldots,\, x_N[k_a]\right\} \quad \Longrightarrow \quad y[k_a]$$

$$\underline{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_N[k] \end{bmatrix} \qquad \underline{x}' = \underline{x}'[k] = \underline{x}[k+1]$$

5.3. Normálalak

$$\begin{aligned} x_1' &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1N}x_N + B_1 u \\ x_2' &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2N}x_N + B_2 u \\ &\vdots \\ x_N' &= A_{N1}x_1 + A_{N2}x_2 + \ldots + A_{NN}x_N + B_N u \end{aligned}$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_N X_N + Du$$

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u \qquad y = \underline{C}^T \underline{x} + Du$$

$$\underline{x}(\underbrace{t_a + dt}_{t_b}) = \underline{x}(t_a) + \underline{x}'(t_a)\,dt = \underline{x}(t_a) + \left[\underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t_a) + \underline{B}u(t_a)\right] dt$$

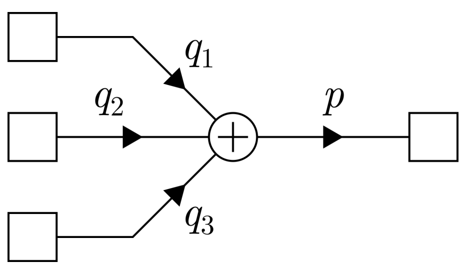
$$y(t_a) = \underline{C}^T \underline{x}(t_a) + Du(t_a)$$

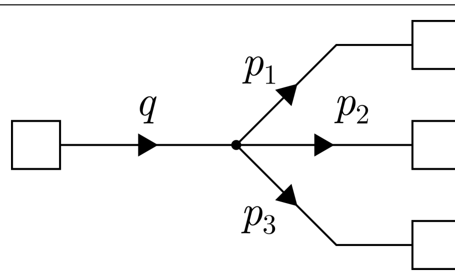
6. Jelfolyamhálózatok

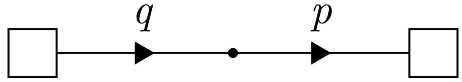
6.1. Komponensek

Komponens neve	**FI-karakterisztika**	**DI-karakterisztika**
Forrás (bemenet)	$q(t) = u(t)$	$q[k] = u[k]$
Nyelő (kimenet)	$p(t) = y(t)$	$p[k] = y[k]$
Erősítő (szorzó)	$q(t) = Kp(t)$	$q[k] = Kp[k]$
FI-integrátor	$q(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} P(\tau)\, d\tau$	–
DI-késleltető	–	$q[k] = P[k-1]$

6.2. Összekapcsolás

<table>
<tr><th>Kapcsolás neve</th><th>Rajz</th></tr>
<tr><td>Összegző (csomópont)</td><td>

$p = \sum_i q_i = q_1 + q_2 + \ldots + q_N$</td></tr>
<tr><td>Elágazás</td><td>

$\forall i : \; p_i = q \quad \Longrightarrow \quad p_1 = q,\; p_2 = q,\; \ldots,\; p_N = q$</td></tr>
<tr><td>Egyszerű csomópont</td><td>

$p = q$</td></tr>
</table>

6.3. Állapotváltozók (ÁVL) a jelfolyam-hálózatban

6.3.1. Jellemzők

Jellemző	FI-rendszer	DI-rendszer
Hálózat rendszáma (N)	Integrátorok száma	Késleltetők száma
Állapotváltozók	$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} P_x(\tau)\, d\tau$ $x'(t) = P_x(t)$	$x[k] = P_x[k-1]$ $x'[k] = P_x[k] \equiv x[k+1]$

6.3.2. Állapotváltozós normálalak (ÁVLNA)

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1N}x_N(t) + b_1u(t) \\
x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2N}x_N(t) + b_2u(t) \\
&\vdots \\
x_N'(t) &= a_{N1}x_1(t) + a_{N2}x_2(t) + \ldots + a_{NN}x_N(t) + b_Nu(t)
\end{aligned}
$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_Nx_N(t) + du(t)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_N \end{bmatrix} \quad D = [d]$$

Jelölés	Típus	Értéke
$\underline{\underline{A}}$	$N \times N$ mátrix	$\forall i:\ x_i'(t)$ együtthatói
$\underline{B}$	$1 \times N$ oszlopvektor	$x_i'(t)$ gerjesztés együtthatója
$\underline{C}^T$	$N \times 1$ sorvektor	$y(t)$ válasz együtthatói
D	Skalár (szám)	$y(t)$ válasz gerjesztés együtthatója

6.3.3. FI válasz közelítő számítása (Euler-módszer)

Előrelépő:

$$\underline{x}(t_{k+1}) \approx \underline{x}(t_k) + h_k \underline{x}'(t_k) = \underline{x}(t_k) + h_k \left[\underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t_k) + \underline{B} u(t_k) \right]$$
$$\underline{x}(t_{k+1}) \approx \underline{x}(t_k + h_k) = (\underline{\underline{I}} + h_k \underline{\underline{A}}) \underline{x}(t_k) + h_k \underline{B} u(t_k)$$

Hátralépő:

$$\underline{x}(t_{k+1}) \approx \underline{x}(t_k) + h_k \underline{x}'(t_{k+1}) = \underline{x}(t_k) + h_k \left[\underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t_{k+1}) + \underline{B} u(t_{k+1}) \right]$$
$$\underline{x}(t_{k+1})(\underline{\underline{I}} - h_k \underline{\underline{A}}) = \underline{x}(t_k) + h_k \underline{B} u(t_{k+1})$$
$$\underline{x}(t_{k+1}) \approx \underline{x}(t_k + h_k) = (\underline{\underline{I}} - h_k \underline{\underline{A}})^{-1} \big(\underline{x}(t_k) + h_k \underline{B} u(t_{k+1}) \big)$$

7. Vizsgálójelek módszere rendszerek leírására

7.1. Rendszer tulajdonságai

- **Lineáris**, ha $\forall i: \; u_i(t) \to y_i(t) \quad \implies \quad \sum_i c_i u_i(t) \to \sum_i c_i y_i(t)$
- **Invariáns**, ha $u(t) \to y(t) \quad \implies \quad u(t-T) \to y(t-T)$
- **Kauzális**, ha $t < 0: \; g(t) = 0 \quad \implies \quad y(t) = \varepsilon(t) u(t)$
- **Stabil**, ha véges (korlátos) gerjesztésre a válasz is véges

7.2. Speciális függvények

7.2.1. Egységugrás

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ 1 & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

7.2.2. Dirac-delta

$$\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T} & \text{ha } t = 0 \\ 0 & \text{ha } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)\, dt = 1 \qquad \delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)$$

7.3. Általánosított derivált

$$f(t) \text{ ált. deriváltja } g(t), \text{ ha } \int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau = f(t) \quad \Longrightarrow \quad g(t) = f'(t)$$

7.4. Impulzusválasz

$$h(t) = y(t), \text{ ha } u(t) = \delta(t)$$

Konvolúció-tétel

$$y(t) = \int\limits_{\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\underbrace{\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T}}_{\delta_T(t)} u(0)T \quad \Longrightarrow \quad u(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\delta_T(t-kT)T$$

$$T \to 0: \; u(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

7.5. Konvolúció

$$f * g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau \qquad (f * g = g * f)$$

8. Válasz közelítő számítása FI rendszerekben

$$t_0\text{-ban: } \underline{x}(t_0 = 0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{Euler: } y(t_k) = \underline{C}^T \underline{x}(t_k) + Du(t_k)$$

8.1. Elsőrendű eset

Előrelépő:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + h_k x'(t_k) &= x(t_k) + h_k\big(Ax(t_k) + Bu(t_k)\big) \\ x(t_{k+1}) &= x(t_k)(1 + h_k A) + h_k Bu(t_k) \end{aligned}$$

$$x(t_{0+1}) = \underbrace{\cancel{x(t_0)(1 + h_k A)}}_{x(t_0) \to 0} + h_k \underbrace{Bu(t_0)}_{\text{ismert}} = h_k Bu(t_0)$$

Hátralépő:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + h_k x'(t_{k+1}) &= x(t_k) + h_k\big(Ax(t_{k+1}) + Bu(t_{k+1})\big) \\ x(t_{k+1})(1 - h_k A) &= x(t_k) + h_k Bu(t_{k+1}) \\ x(t_{k+1}) &= \frac{x(t_k) + h_k Bu(t_{k+1})}{1 - h_k A} \end{aligned}$$

8.2. Gerjesztésválasz-stabilitás

A rendszer **GV-stabil**, ha az impulzusválasz abszolút integrálható (FI) / összegezhető (DI).

FI rendszer	DI rendszer
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big\lvert h(\tau)\big\rvert \, d\tau < \infty$	$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \big\lvert h[k]\big\rvert < \infty$

8.3. Kauzális rendszer

$$t < 0 : \ g(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)}_{\to 0} \underbrace{\varepsilon(\overbrace{t - \tau}^{t<\tau})}_{u(t)} \, d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

$$g(t) = \varepsilon(t) f(t) \qquad \Longrightarrow \qquad h(t) = \delta(t) f(0) + \varepsilon(t) f'(t)$$

9. DI rendszerek analízise az időtartományban I.

9.1. Exponenciális

$$0 < q < 1 : \ x[k] = Aq^k$$

9.2. Szinuszos

$$x[k] = A\cos(\vartheta k + \varphi)$$

9.3. Eltolás

9.3.1. Késleltetés

$$x[k] \to x[k-1] \equiv x^{(i)}[k]$$

9.3.2. Siettetés

$$x[k] \to x[k+1] \equiv x^{(-1)} \equiv x'[k]$$

9.3.3. Általánosítás

$$x[k] = \ldots + x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k] + x[1]\delta[k-1] + \ldots$$

$$x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[k-i] \qquad \text{(DI konvolúció)}$$

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$$

9.3.4. Belépő jel

$$\varepsilon[k]x[k] = \begin{cases} x[k] & \text{ha } k \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

9.3.5. Derékszögű ablakfüggvénny

$$x[k]\big(\varepsilon[k-a] - \varepsilon[k-b-1]\big) = \begin{cases} x[k] & \text{ha } a \leq k \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

10. DI rendszer impulzusválasza

10.1. FIR (Finite Impulse Response) típusú rendszer

$$k < 0 \text{ vagy } k \geq L: \; h[k] = 0$$
$$h[k] = h[k]\big(\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\big) \equiv \delta[k]h[0] + \delta[k-1]h[1]$$

FIR rendszer **mindig GV-stabil**.

10.2. Ugrásválasz

$$h[k] = W\big\{\delta[k]\big\}$$
$$g[k] = W\big\{\varepsilon[k]\big\}$$

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1] \quad \Longrightarrow \quad h[k] = g[k] - g[k-1]$$
$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i] \quad \Longrightarrow \quad g[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]$$

10.3. Lineáris, időinvariáns (LTI) rendszer

- **Lineáris?**

$$W\big\{a_1x_1(t) + \ldots + a_Nx_N(t)\big\} = a_1W\big\{x_1(t)\big\} + \ldots + a_NW\big\{x_N(t)\big\}$$
$$W\left\{\sum_i a_ix_i(t)\right\} = \sum_i a_iW\big\{x_i(t)\big\}$$

- **Időinvariáns?**

$$W\big\{x(t)\big\} = y(t)$$
$$W\big\{x(t-T)\big\} = y(t-T)$$

- **Kauzális?** $y(t_0): \; u(t) \; t \leq t_0$-beli értékeitől függ

11. DI rendszerek analízise az időtartományban II.

11.1. Válasz kifejezése

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{Gerjesztés:} & & \textbf{Válasz:} \\
\delta[k] & \xrightarrow{\text{def.}} & h[k] \\
\delta[k-i] & \xrightarrow{\text{inv.}} & h[k-i] \\
u[i]\delta[k-i] & \xrightarrow{\text{lin.}} & u[i]h[k-i] \\
\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\delta[k-i] & \xrightarrow{\text{lin.}} & \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i]
\end{array}
$$

11.2. Konvolúció kifejezése

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[ki]h[i]$$

Speciális eset: $h[k]$ és $u[k]$ belépő $\quad\Longrightarrow\quad k<0:\ h[k]=0,\ u[k]=0$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \big(\underbrace{\varepsilon[i]u[i]}_{i<0:\ 0}\big)\big(\underbrace{\varepsilon[k-i]h[k-i]}_{k-i<0:\ 0 \Longrightarrow k<i}\big) = \sum_{i=0}^{k} u[i]h[k-i]$$

$$
\begin{aligned}
k=0:&\ y[0]=u[0]h[0] \\
k=1:&\ y[1]=u[0]h[1]+u[1]h[0] \\
k=2:&\ y[2]=u[0]h[2]+u[1]h[1]+u[2]h[0] \\
&\ \vdots \\
k=n:&\ y[n]=u[0]h[n]+u[1]h[n-1]+u[2]h[n-2]+\ldots+u[n]h[0]
\end{aligned}
$$

11.3. Rendszeregyenlet

$$y[k] = b_0u[k] + b_1u[k-1] + \ldots + b_mu[k-m] - a_1y[k-1] - \ldots - a_ny[k-n]$$

$$y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_iy[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_ju[k-j]$$

11.4. Állandósult válasz

11.4.1. Szinuszus gerjesztés-válasz

$$x = x[k] = A\cos(\vartheta k + \varphi)$$

- A: x amplitúdója
- φ: x kezdőfázisa
- ϑ: DI (kör)frekvencia
- L: DI periódusidő

Periodikus, ha $\dfrac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q} \sim \dfrac{M}{N} \qquad (M,\ N \in \mathbb{Z})$

11.4.2. Trigonometrikus azonosság

$$x[k] = A\cos(\vartheta k + \varphi) = B\cos(\vartheta k) + C\sin(\vartheta k)$$

$$B = A\cos\varphi \qquad C = A\sin\varphi$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{C}{B}\right)$$

$$-\pi < \varphi < \pi \text{ vagy } 0 < \varphi < 2\pi$$

12. Átviteli karakterisztika

$$u[k] = U\cos(\vartheta k + \varrho u) \quad \Longrightarrow \quad \overline{U} = Ue^{j\varrho u}$$
$$y[k] = Y\cos(\vartheta k + \varrho y) \quad \Longrightarrow \quad \overline{Y} = Ye^{j\varrho y}$$
$$H\big(e^{j\vartheta}\big) = \left.\frac{\overline{Y}}{\overline{U}}\right|_{\vartheta} = K(\vartheta)e^{j\varphi(\vartheta)}$$

12.1. Meghatározás

12.1.1. Rendszeregyenletből

$$y[k]+a_1y[k-1]+a_2y[k-2]+\ldots+a_ny[k-n] = b_0u[k]+b_1u[k-1]+\ldots+b_mu[k-m]$$

Késleltetett jel:

$$u[k-1] = U\cos\big(\vartheta(k-1)+\varrho u\big) = U\cos(\vartheta k + \overbrace{\varrho u - \vartheta}^{\text{eltolt fázis}})$$

$$\overline{U} = Ue^{j(\varrho u - \vartheta)} = \underbrace{Ue^{j\varrho u}}_{\text{eredeti}}\overbrace{e^{-j\vartheta}}^{\text{eltolás}}$$

12.1.2. Hálózatból

$$ae^{-j\vartheta}\overline{U} = \overline{Y}\big(1 - be^{-j\vartheta}\big) \quad \Longrightarrow \quad H\big(e^{j\vartheta}\big) = \frac{ae^{-j\vartheta}}{1-be^{-j\vartheta}}$$

12.2. Fourier-sor (DI)

$$x[k] \equiv x[k+L] \qquad (\text{periodikus jel, } L \in \mathbb{N}_0)$$
$$x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^c\, e^{jp\Theta k}$$

- ***p*-edik Fourier-együttható:**

$$X_p^c = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[k]e^{-jp\Theta k}$$

- **Alap körfrekvencia:** $\Theta = \dfrac{2\pi}{L}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Theta = 2\pi\frac{M}{N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{M}{N} = \frac{\Theta}{2\pi}$$