Info MSc Mat D ZH javítókulcs, „Sztochasztika 2", 2014. 05. 12

Mogy

① a.) $N \sim Geom(p)$, $p = \frac{1}{6} \Rightarrow P(N=k) = q^{k-1} p \quad (k = 1, 2, 3 \ldots)$

$q := 1-p$

$$\Rightarrow \boxed{g_N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k q^{k-1} p = pz \sum_{l=0}^{\infty} (qz)^l = \frac{pz}{1-qz}}$$

b.) Legyen X_i a Jancsika i-edik sorozatának hossza, $i = 1, 2, \ldots, N$-re

Így $X_i \sim Geom(p)$ és az X_i-k függetlenek egymástól és N-től is.

$g_{X_i}(z) = \frac{pz}{1-qz}$ szintén

Ezzel $M = \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg

$$\Rightarrow g_M(z) = g_N(g_X(z)) = \frac{p\frac{pz}{1-qz}}{1-q\frac{pz}{1-qz}} = \frac{p^2 z}{1-qz-qpz} = \frac{p^2 z}{1-(1-p^2)z}$$

(amiből $M \sim Geom(p^2)$)

és $\mathbb{E}M = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_i = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} = 6 \cdot 6 = 36$

c.) Móricka egymaga játssza a Pistike és Jancsika játékát, tehát a szükséges dobásszám várható értéke

$$\mathbb{E}(M+N) = \mathbb{E}M + \mathbb{E}N = 36 + 6 = 42$$

$\boxed{42 \text{ a válasz.}}$

Info MSc Mat D ZH javítókulcs, „Sztochasztika 2", 2014.05.12

Mogy

(2) Legyen X_i az i-edik szörny miatt elvesztett életerő-egységek száma, $i=1,\dots,n$, $n=1000$.

$S_n := X_1+\dots+X_n$

Kérdés $P(S_n \le 70)$ (esetleg $P(S_n < 70)$)

Az X_i-k függetlenek és $X_i \sim B(p)$ ahol $p=\frac{1}{10}$

1. megoldás: Hoeffding ~~Cramér~~ tétellel: $m = EX_i = p = \frac{1}{10} \Rightarrow ES_n = 100$

$0=a_i \le X_i \le b_i = 1$ minden i-re

$\Rightarrow$ $t=30$ választással

$$P(S_n \le 70) = P(S_n \le ES_n - t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\cdot 30^2}{1000(1-0)^2}\right) = e^{-1.8} \approx 0.165$$

2. megoldás: Cramér tétellel: $m = EX_i = p = \frac{1}{10}$, így $a=-\infty$, $b=\frac{7}{100}$ választással

$$P(S_n \le 70) = P\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{7}{100}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b]\right) \underset{\approx}{\le} \underbrace{e^{-nI(b)}}_{b<m \text{ miatt}},$$

ahol $I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln\frac{1-p}{1-x}$ a Bernoulli eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $\Rightarrow$ $nI(b) = 1000\cdot\left[\frac{7}{100}\ln\frac{\frac{9}{10}\,\frac{7}{100}}{\frac{1}{10}\,\frac{93}{100}} - \ln\frac{9/10}{93/100}\right] =$

$= 70 \ln\frac{63}{93} - 1000 \ln\frac{90}{93} \approx 5.53$

$\Rightarrow$ $\boxed{P(S_n \le 70) \lessapprox e^{-5.53} \approx 0.004}$

Mogy

(3) a.) $S = \{0,1,2,3,4\}$;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "1/4"] & 1 \arrow[l, bend left, "1/3"] \arrow[r, bend left, "1/4"] & 2 \arrow[l, bend left, "1/4"] \arrow[r, bend left, "1/4"] & 3 \arrow[l, bend left, "1/5"] \arrow[r, bend left, "1/4"] & 4 \arrow[l, bend left, "1/6"]
\end{tikzcd}$$

Indoklás: q_7 „átlag 3 perc alatt végez" $\lambda_{1,0} = \frac{1}{3}$ rátát jelent,

4 $\lambda_{2,1} = \frac{1}{4}$

5 $\lambda_{3,2} = \frac{1}{5}$

6 $\lambda_{4,3} = \frac{1}{6}$

q_2 „óránként átlag 15-en", vagyis percenként átlag $\frac{1}{4}$ ügyfél

$\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \frac{1}{4}$ rátát jelent,

a többi ráta nulla.

b.)
$$G = \begin{array}{c} \\ 0. \\ 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{9}{20} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array}$$

mert $G_{ij} = \lambda_{ij}$, ~~ha~~ kivéve a főátlóban, ahol annyi, hogy minden sorösszeg nulla legyen.

c.) $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{20} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{\frac{1}{4}} & \cancel{-\frac{1}{6}} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

ebből $\pi = \frac{1}{\text{normálás}} \cdot (32; 24; 24; 30; 45) = \left(\frac{32}{155}; \frac{24}{155}; \frac{24}{155}; \frac{30}{155}; \frac{45}{155}\right)$

~~d.) Az $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ percenkénti ügyintézési ráta időátlag.~~

Info MScMatD ZH javítókulcs „Sztochasztika2", 2014.05.12 —4—

Mogy

③ folytatás

d) A percenkénti ügy-elintézési ráta az állapottól függően

$$f=\begin{pmatrix}0\\1/3\\1/4\\1/5\\1/6\end{pmatrix}$$

Az ergodtétel miatt ennek időátlaga hosszú távon

$$\sum_i \pi_i f(i) = \pi f = \left(\frac{32}{155}\ \frac{24}{155}\ \frac{24}{155}\ \frac{30}{155}\ \frac{45}{155}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\1/3\\1/4\\1/5\\1/6\end{pmatrix} = \frac{32\cdot 0+\frac{24}{3}+\frac{24}{4}+\frac{30}{5}+\frac{45}{6}}{155} =$$

$$= \frac{8+6+6+7.5}{155} = \frac{27.5}{155},$$

Vagyis hosszú távon óránként átlag $60\cdot\frac{27.5}{155} = \frac{330}{31} \approx 10.16$ ügyet intéz el.