Laplace transzformáció alkalmazása lineáris differenciálegyenletek és -rendszerek megoldására

1. Példa

Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenletet:

$$y' + y = e^x$$

MO.

(1) Direkt:

(a) Homogén.

$$y' + y = 0 \rightsquigarrow \frac{y'}{y} = -1 \rightsquigarrow \ln|y| = -x + c \rightsquigarrow y = ce^{-x} \rightsquigarrow y_{há} = ce^{-x},\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Inhomogén.

$$y = c(x)e^{-x} \rightsquigarrow y' = c'e^{-x} - ce^{-x} \rightsquigarrow c'e^{-x} - ce^{-x} + c'e^{-x} = e^x \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow c'e^{-x} = e^x \rightsquigarrow c = e^{2x} \rightsquigarrow c(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \rightsquigarrow$$

$$y_{ip} = c(x)e^{-x} = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = \frac{1}{2}e^x \rightsquigarrow \boldsymbol{y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x},\ \ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}\,.$$

(2) Laplace transzformáció:

$Y \stackrel{\circ}{=} \mathsf{L}(y)\,,\ y(0) = a\,.$

$$y' + y = e^x \rightsquigarrow sY - a + Y = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow Y(s+1) = \frac{1}{s-1} + a \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow Y = \dfrac{1 + a(s-1)}{(s-1)(s+1)}\,.$ Ezt kell parciális törtekre bontani (persze $s = -1, s = 1$-el):

$$\frac{1 + a(s-1)}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1) + B(s-1)}{(s-1)(s+1)} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow 1 + a(s-1) = A(s+1) + B(s-1) \rightsquigarrow 1 - 2a = -2B \rightsquigarrow B = a - \dfrac{1}{2}$ és

$$2A = 1 \rightsquigarrow A = \frac{1}{2} \rightsquigarrow Y = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + (a - \frac{1}{2})\frac{1}{s+1} \rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{2}e^x + (a - \frac{1}{2})e^{-x} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow \boldsymbol{y = ce^{-x} + \dfrac{1}{2}e^x}$, ahol persze $c = a - \frac{1}{2}$. [1]

Megjegyzés

Persze Laplace-transzformációt (a derivált Laplace transzformáltjában megjelenő kezdeti érték miatt igazán kezdeti érték probléma megoldására érdemes használni):

$$y' + y = e^x,\ y(0) = 1 \rightsquigarrow sY - 1 + Y = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow Y(s+1) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{s}{s-1} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow Y = \frac{s}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} \rightsquigarrow A(s-1) + B(s+1) = s \rightsquigarrow$$

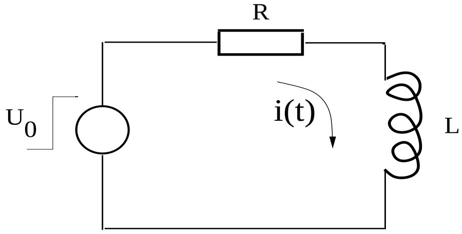
$$\rightsquigarrow A = B = \frac{1}{2} \rightsquigarrow Y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} \rightsquigarrow y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x\,.$$

---

[1] Az $Y = \dfrac{1 + a(s-1)}{(s-1)(s+1)}$-ból kiolvasható a megoldás jellege (az együtthatók persze nem): a nevezőbeli $s - 1$ egy $c_1\, e^x$-es tagot, míg az $s + 1$ egy $c_2\, e^{-x}$-os tagot eredményez.

2. Példa

Egy soros R-L körre $t = 0$-ban egy U_0 feszültségimpulzust kapcsolunk. Számítsuk ki az i áramerősség időfüggvényét!



Általában tudjuk, hogy

(a) C kapacitás esetén: $\boldsymbol{i = C\frac{du}{dt}}$ (mert $U = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\,d\tau$).

(b) L induktivitás esetén: $\boldsymbol{u = L\frac{di}{dt}}$.[2]

Így az áramkörben (a kezdeti érték fizikai megfontolások eredménye, lásd a Megjegyzés (1)-et alább):

$$\boldsymbol{u_R + u_L = U_0 \;\rightsquigarrow\; iR + L\,i' = U_0} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{i(0) = 0}\,.$$

Ez egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, tehát a megoldása a szokásos.

(1) Direkt megoldás

(a) Homogén: $L\,i' + iR = 0 \;\rightsquigarrow\; \dfrac{i'}{i} = -\dfrac{R}{L} \;\rightsquigarrow\; \ln|i| = -\dfrac{R}{L}t + c \;\rightsquigarrow\; i = ce^{-\frac{R}{L}t},\ c \in \mathbb{R}\,.$

(b) Inhomogén: $Lc'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - c(t)L\dfrac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} + Rc(t)e^{-\frac{R}{L}t} = U_0 \;\rightsquigarrow$

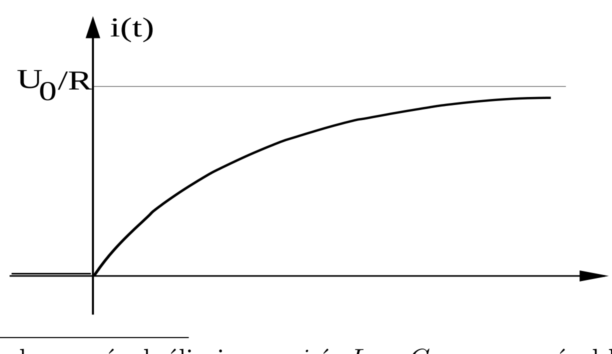
$\rightsquigarrow\; Lc'(t)e^{-\frac{R}{L}t} = U_0 \;\rightsquigarrow\; c'(t) = \dfrac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t} \;\rightsquigarrow\; c(t) = \dfrac{U_0}{R}e^{\frac{R}{L}t} \;\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\; i(t) = c(t)e^{-\frac{R}{L}t} = \dfrac{U_0}{R}$

(c) Általános: $i = ce^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{U_0}{R},\ \ c \in \mathbb{R}\,.$

(d) Kezdeti érték: $0 = i(0) = ce^{-\frac{R}{L}0} + \dfrac{U_0}{R} = c + \dfrac{U_0}{R} = 0 \;\rightsquigarrow\; c = -\dfrac{U_0}{R} \;\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\; i = -\dfrac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{U_0}{R} = \dfrac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\,.$



[2] Vegyük észre, hogy ezek egymás duálisai: $u \leftrightarrow i$ és $L \leftrightarrow C$ szerepcserével kaphatóak egymásból.

(2) Laplace transzformáció ($I \mathrel{\hat{=}} \mathsf{L}(i)$):

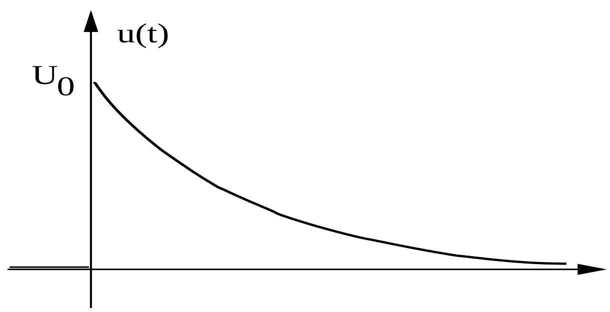
$$LsI + IR = \frac{U_0}{s} \rightsquigarrow I = \frac{\frac{U_0}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{R}{L}} \rightsquigarrow$$

$$A(s+\frac{R}{L}) + Bs = \frac{U_0}{L} \underset{s=0,\, s=-\frac{R}{L}}{\rightsquigarrow} A = \frac{\frac{U_0}{L}}{\frac{R}{L}} = \frac{U_0}{R}\,,\ B = -\frac{\frac{U_0}{L}}{\frac{R}{L}} = -\frac{U_0}{R} \rightsquigarrow$$

$$I = \frac{\frac{U_0}{R}}{s} - \frac{\frac{U_0}{R}}{s+\frac{R}{L}} \rightsquigarrow i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\,.$$

Megjegyzés

(1) A megoldás fizikai szemléletünkkel egybevág: az induktivitáson az áram nem tud gyorsan változni $\rightsquigarrow$ az első időpillanatban nem folyik áram a (soros) áramkörben $\rightsquigarrow$ az ellenálláson nem esik feszültség $\rightsquigarrow$ az egész U_0 az induktivitáson esik $\rightsquigarrow$ az áram deriváltja egy pozitív konstans $\rightsquigarrow$ az áram lineárisan növekedve indul. Ahogy az áram elkezd nőni az ellenálláson elkezd nőni a feszültség $\rightsquigarrow$ az induktivitáson kisebb feszültség esik $\rightsquigarrow$ az áram tovább nő, de növekedési üteme lassul. Ez a folyamat egészen addig tart, amíg az ellenálláson esik az egész U_0 feszültség: ekkor U_0/R egyenáram folyik az áramkörben, ez nem változik, az induktivitáson tényleg nem esik feszültség. Az ellenálláson eső feszültség nyilván $u(t) = i(t) \cdot R$ ugyanolyan jellegű, mint az $i(t)$ míg az induktivitáson eső feszültség: $u(t) = L\dfrac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$:



(2) Teljesen analóg módon határozhatóak meg a különböző dualis áramkörök, tehát a feszültség- (áram-) ugrással meghajtott soros(párhuzamos) R-L (R-C) körök jellemzői. Ez összesen $2^3 = 8$ eset. Legyen $e(t) = e^{-ct}$, $E(t) = 1 - e^{-ct}$, $F(t) = t$, $(t > 0)$.

SOROS ÁRAMKÖRÖK:

(a) Feszülség, R-L: (Ezt láttuk) $\quad i \sim E(t)\,,\ u_L \sim e(t)\,.$
(b) Feszülség, R-C: (Ezt mindjárt látjuk) $\quad i \sim e(t)\,,\ u_C \sim E(t)\,.$
(c) Áram, R-L: nincs, induktivitáson nincs áramugrás (végtelen lenne a feszültség).
(d) Áram, R-C: $\quad i \sim I_0\,,\quad u_C \sim F(t)\,.$

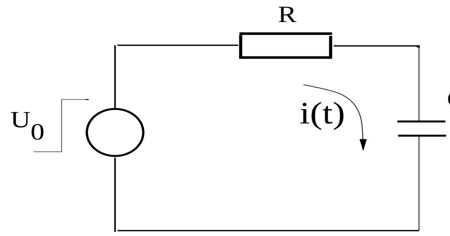
PÁRHUZAMOS ÁRAMKÖRÖK (ELŐBBIEK DUÁLISAI):

(a-dual) Áram, R-C: $\quad u \sim E(t)\,,\ i_C \sim e(t)\,.$
(b-dual) Áram, R-L: $\quad u \sim e(t)\,,\ i_L \sim E(t)\,.$
(c-dual) Feszültség, R-C: nincs, kapacitáson nincs feszültségugrás (végtelen lenne az áram).
(d-dual) Feszültség, R-L: $\quad u \sim U_0\,,\quad i_L \sim F(t)\,.$

(A (d) esetben állandó árammal töltjük a kondenzátort ill. (d-dual) esetben állandó feszültségen tartjuk az induktivitást.)

3. Példa

Egy soros R-C körre $t = 0$-ban egy U_0 feszültségimpulzust kapcsolunk. Számítsuk ki az i áramerősség időfüggvényét!



Általában tudjuk, hogy

(a) C kapacitás esetén: $\quad \boldsymbol{i = C\dfrac{du}{dt}} \quad$ (mert $\boldsymbol{U = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau}$).

(b) L induktivitás esetén: $\quad \boldsymbol{u = L\dfrac{di}{dt}}$.

Így az áramkörben (a kezdeti feltétel fizikai megfontolások eredménye, lásd a Megjegyzést alább):

$$\boldsymbol{u_R + u_C = U_0 \rightsquigarrow iR + \frac{Q}{C} = U_0 \rightsquigarrow \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + iR = U_0} \text{ és } \boldsymbol{i(0) = \frac{U_0}{R}}.$$

Ebből mindkét oldal t szerinti deriválásával egy **homogén** elsőrendű lineáris differenciálegyenlet:

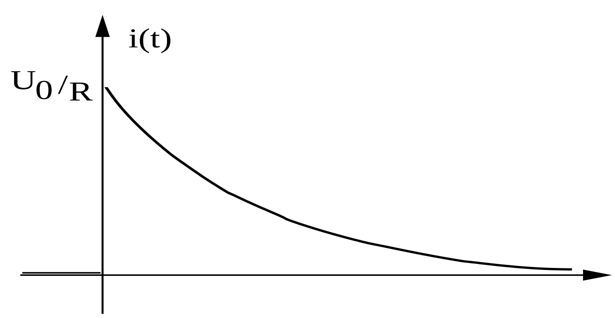
$$\boldsymbol{iR + \tfrac{Q}{C} = U_0 \rightsquigarrow \tfrac{i}{C} + i'R = 0} \text{ és } \boldsymbol{i(0) = \tfrac{U_0}{R}},$$

tehát a megoldása a szokásos.

(1) Direkt megoldás

(a) Általános: $\dfrac{i}{C} + i'R = 0 \rightsquigarrow \dfrac{i'}{i} = -\dfrac{1}{RC} \rightsquigarrow \ln|i| = -\dfrac{1}{RC}t + c \rightsquigarrow i = ce^{-\frac{1}{RC}t}$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) Kezdeti érték: $\dfrac{U_0}{R} = i(0) = ce^{-\frac{1}{RC}0} = c \rightsquigarrow i = \dfrac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$.



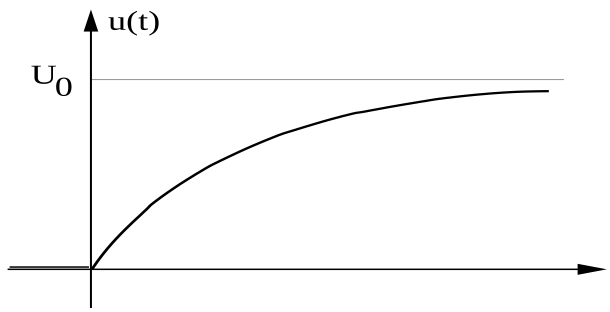
(2) Laplace transzformáció ($I \circeq \mathsf{L}(i)$):

$$RsI - U_0 + \frac{I}{C} = 0 \rightsquigarrow I = \frac{\frac{U_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \rightsquigarrow i = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Megjegyzés

A megoldás fizikai szemléletünkkel egybevág: a kondenzátoron a feszültség nem tud gyorsan változni $\rightsquigarrow$ az első idő pillanatban nem esik feszültség a kondenzátoron $\rightsquigarrow$ az egész U_0 az ellenálláson esik $\rightsquigarrow$ az áram az első időpillanatban U_0/R $\rightsquigarrow$ a kondenzátor feszültsége (az áram integrálja) lineárisan növekedve indul. Ahogy a kondenzátoron elkezd nőni a feszültség, az ellenálláson elkezd csökkenni $\rightsquigarrow$ kisebb áram folyik a kondenzátorba $\rightsquigarrow$ a feszültség tovább nő rajta, de növekedési üteme lassul. Ez a folyamat egészen addig tart, amíg a kondenzátor fel nem töltődik az U_0 feszültségre: ekkor már nem esik feszültség az ellenálláson és így nem folyik áram az áramkörben U_0/R egyenáram folyik az áramkörben. Az ellenálláson eső feszültség nyilván $u(t) = i(t) \cdot R$ ugyanolyan jellegű, mint az $i(t)$ míg a kondenzátoron eső feszültség:

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\,\tau = -\, U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}\Big|_0^t = U_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}):$$



Megjegyzés

Érdemes még egy másik rokon dualitást megemlíteni: a ‘kondenzátor’ ↔‘ induktivitás’ duális fogalompárt a ‘kezdetben’ ↔ ‘végül’ és a ‘rövidzár’ ↔ ‘szakadás’ duális fogalompárokkal kiegészítve a dualitás segítségével egy, az ezekre a fogalmakra vonatkozó igaz állításból további hármat tudunk generálni (és ezek együttesen az összes lehetséges esetet lefedik). Valóban, ha valamely, ezekkel a a fogalmakkal képzett igaz állításnak úgy képezzük a duálisát, hogy bármely elemet rögzítve a másik kettőt rendre a duálisával helyettesítjük, az eredményül kapott duális állítások megadják az ezekkel a fogalmakkal képezhető összes lehetséges különbözö igaz állítást. Példaként két különböző kiinduló állítás duálisait adjuk meg. (A szereplő rövidítések a következők C: kondenzátor, L: induktivitás; k: kezdetben, v: végül; sz: szakadás, r: rövidzár és vastagon a rögzített elem rövidítése szerepel.)

(0) C - k - r (a kondenzátor kezdetben rövidzár)

---

(1) **C** - v - sz (a kondenzátor végül szakadás)

(2) L - **k** - sz (az induktivitás kezdetben szakadás)

(3) L - v - **r** (az induktivitás végül rövidzár)

(0) L - k - sz (az induktivitás kezdetben szakadás)

---

(1) **L** - v - r (az induktivitás végül rövidzár)

(2) C - **k** - r (a kondenzátor kezdetben rövidzár)

(3) C - v - **sz** (a kondenzátor végül szakadás)

4. Példa

Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris differencálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémát: $y' + y = \sin 3\,x \quad y(0) = 0\,.$

Megoldás Laplace transzformációval.

Legyen $Y(s) \triangleq \mathsf{L}(y(x))\,.$

Mindkét oldalt Laplace transzformálva:

$$s\,Y + Y = \frac{3}{s^2+9}$$

Ebből Y-t kifejezve:

$$Y = \frac{3}{(s+1)(s^2+9)}$$

Parciális törtekre bontva:

$$\frac{3}{(s+1)(s^2+9)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9}\,, \text{ tehát } 3 = A(s^2+9) + (Bs+C)(s+1)\,,$$

amiből ($s = -1$, $s = 0$, $s = 1$)

$$\boldsymbol{A = \frac{3}{10}}\,,\ 9\,A + C = 3 \ \rightsquigarrow\ \boldsymbol{C} = 3 - \frac{27}{10} = \boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

$$3 = \frac{3}{10}\cdot 10 + 2\cdot(B + \frac{3}{10}) \ \rightsquigarrow\ \boldsymbol{B = -\frac{3}{10}}\,.$$

Tehát $Y = \dfrac{3/10}{s+1} + \dfrac{-3/10\,s}{s^2+9} + \dfrac{3/10}{s^2+9} \ \rightsquigarrow\ \boldsymbol{y = \frac{3}{10}e^{-x} - \frac{3}{10}\cos 3x + \frac{1}{10}\sin 3x}\,.$

5. Példa

Oldjuk meg az alábbi másodrendű lineáris differencálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémát: $y'' - 10y' + 25y = e^{-3x} \quad y'(0) = 0\,,\ y(0) = 1/25\,.$

Megoldás Laplace transzformációval.

Legyen $Y(s) \stackrel{\circ}{=} \mathsf{L}(y(x))\,.$

Mindkét oldalt Laplace transzformálva, Y-t kifejezve:

$$s^2Y - \frac{s}{25} - 10sY + \frac{10}{25} + 25Y = \frac{1}{s+3} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \; Y(s^2 - 10s + 25) = \frac{1}{s+3} + \frac{s}{25} - \frac{10}{25} = \frac{25 + s(s+3) - 10(s+3)}{25(s+3)} = \frac{s^2 - 7s - 5}{25(s+3)} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \; Y = \frac{s^2 - 7s - 5}{25(s-5)^2(s+3)}$$

Nos ezt kell parciális törtekre bontani:

$$\frac{s^2 - 7s - 5}{(s-5)^2(s+3)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{(s-5)^2} + \frac{C}{s+3} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \; s^2 - 7s - 5 = A(s-5)(s+3) + B(s+3) + C(s-5)^2\,.$$

A három behelyettesítés persze $s = 5, s = -3, s = 0$:

(1) $s = 5$: $B\,8 = -15 \rightsquigarrow B = -15/8$

(2) $s = -3$: $C\,64 = 25 \rightsquigarrow C = 25/64$

(3) $s = 0$: $-15\,A + 3B + 25\,C = -5 \rightsquigarrow -15\,A - 45/8 + 625/64 = -5 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow -960\,A - 360 + 625 = -320 \rightsquigarrow A = 585/960 = 39/64\,.$

Tehát (az A, B, C együtthatókat még 25-el osztani kell):

$$Y = \frac{s^2 - 7s - 5}{25(s-5)^2(s+3)} = \frac{39/1600}{s-5} - \frac{15/200}{(s-5)^2} + \frac{1/64}{s+3}\,,$$

amit visszatranszformálva ($15/200 = 3/40$):

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{39}{1600}\,e^{5x} - \frac{3}{40}\,x\,e^{5x} + \frac{1}{64}\,e^{-3x}}\,.$$

6. Példa

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$\dot{x} = x - 5y$

$\dot{y} = 2x - y$

ahol a kezdeti értekek:

$x(0) = -6\,, \quad y(0) = 0\,.$

Megoldás Laplace transzformációval.

Legyen $X(s) \mathrel{\hat{=}} \mathsf{L}(x(t)), \quad Y(s) \mathrel{\hat{=}} \mathsf{L}(y(t))\,.$

Mindkét egyenlet mindkét oldalát Laplace transzformálva majd Y-t kifejezve

(1) $sX + 6 = X - 5Y$

(2) $sY = 2X - Y$

Kifejezeve X-et (2)-ből és az eredményt (1)-be helyettesítve:

(3) $X = Y\dfrac{s+1}{2} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; sY\dfrac{s+1}{2} + 6 = Y\dfrac{s+1}{2} - 5Y \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; Y\left(\dfrac{s(s+1)}{2} - \dfrac{s+1}{2} + 5\right) = -6 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; Y((s-1)(s+1) + 10) = -12 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; Y = -\dfrac{12}{s^2+9} \rightsquigarrow$

(4) $Y = -4\dfrac{3}{s^2+9} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; \boldsymbol{y(t) = -4\sin 3t}.$

Másrészt, (4) és (3)-ból:

$X = -12\dfrac{3}{s^2+9}\dfrac{s+1}{2} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; X = -6\dfrac{s+1}{s^2+9} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; X = -6\dfrac{s}{s^2+9} - 2\dfrac{3}{s^2+9} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; \boldsymbol{x(t) = -6\cos 3t - 2\sin 3t}\,.$