

1. példa. Egy merőlegesen metsződő földelt fémsíkok által alakított sarokban egy $R = 5 \text{ cm}$ sugarú, $q = -15 \text{ nC/m}$ hosszegységre eső töltéssűrűséggel ellátott igen hosszú fémhenger helyezkedik el az ábrán látható módon az egyes síkoktól $a = 1,5 \text{ m}$ és $b = 2 \text{ m}$ távolságra. A közeg levegő.

a) Vegyen fel olyan ekvivalens töltéselrendezést, melynek elektromos tere megegyezik a fémlemezek és a töltés által létrehozott térrel! (1 pont)

Helyes ábra. (1 p)

b) Mekkora és milyen irányú erő hat a henger $l = 15 \text{ m}$ hosszúságú szakaszára? Az irányt elegendő az a) feladat ábráján jelölni! (3 pont)

Az eredő erő helyes formulája: $F = \sqrt{(F_1 + F_3 \sin \alpha)^2 + (F_2 + F_3 \cos \alpha)^2}$, (1 p)
 ahol $F_1 = \frac{-q^2 l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a}$, $F_2 = \frac{-q^2 l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2b}$ és $F_3 = \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}}$.
 A végeredmény: $F = 14,05 \mu\text{N}$. (1 p)
 Az ábrán az erő helyes feltüntetése. (1 p)

c) Határozza meg a potenciált az P pontban! (3 pont)

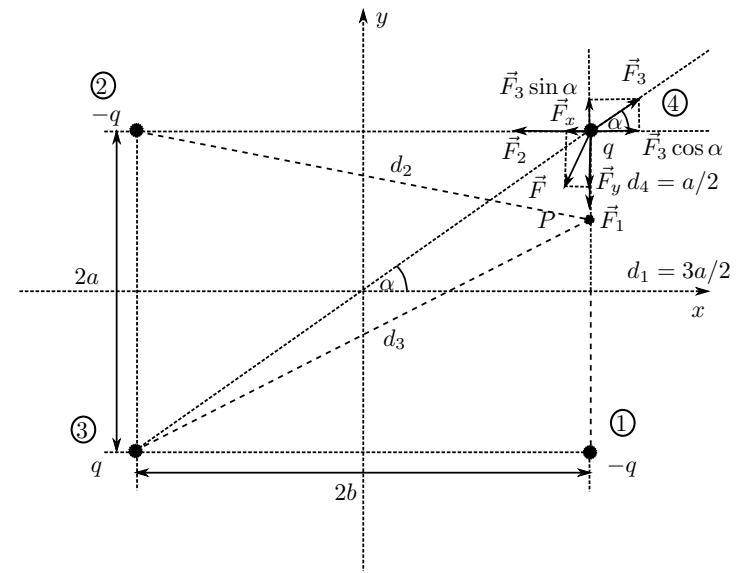
A potenciál kifejezése:

$$\phi_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[-\ln\left(\frac{r_0}{d_1}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{d_2}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{d_3}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{d_4}\right) \right],$$
 ahol $d_1 = \frac{3a}{2}$, $d_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2b)^2}$, $d_3 = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (2b)^2}$, $d_4 = \frac{a}{2}$. (2 p)
 A végeredmény: $\phi_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d_1 d_2}{d_3 d_4}\right) = -263,94 \text{ V}$. (1 p)

d) Határozza meg a feszültséget a henger és a fémsíkok között! (3 pont)

A feszültség kifejezése:

$$U = \phi - 0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{r_0}{R}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{2b}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{2a}\right) \right].$$
 (2 p)
 A végeredmény: $U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{4ab}{R\sqrt{(4a^2 + 4b^2)}}\right) = -1,04 \text{ kV}$. (1 p)



2. példa. Egy rétegzett gömbkondenzátor méretei: $R_1 = 1,5 \text{ mm}$, $R_2 = 3,5 \text{ mm}$, $R_3 = 5,5 \text{ mm}$. Az egyes rétegek dielektromos állandói és vezetőképességei rendre ϵ_1 , ϵ_2 , σ_1 és σ_2 . A fegyveretek közé kapcsolt feszültség $U = 1,5 \text{ kV}$, melyeken ennek hatására $+Q$, illetve $-Q$ nagyságú töltés halmozódik fel, ahol $Q = 830,79 \text{ pC}$.

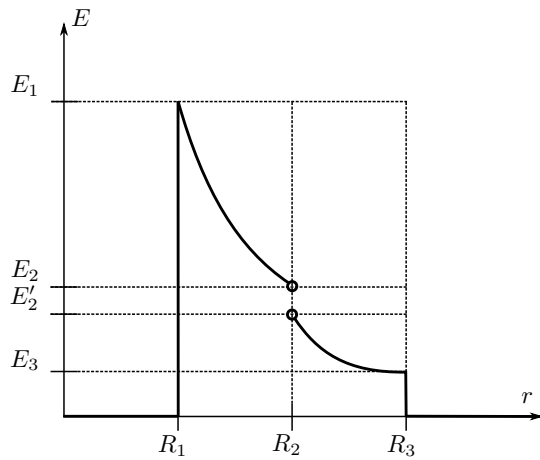
Tekintsük a két réteget tökéletes szigetelőnek ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), továbbá legyen $\epsilon_1 = 2,25$ és $\epsilon_2 = 3,3$!

a) Adja meg és ábrázolja a sugár függvényében az elektromos térerősség nagyságát a dielektrikumban (az $R_1 < r < R_3$ tartományon)! Az ábrán tüntesse fel a térerősségtértékeket a határátmeneteken! (3 pont)

A térerősség helyfüggése: (1 p)

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{1}{r^2}, & \text{ha } R_1 < r < R_2, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{r^2}, & \text{ha } R_2 < r < R_3. \end{cases}$$

Az elektromos eltolás folytonos a határon, de a térerősség ugrik.
 A határátmeneti értékek:
 $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{1}{R_1^2} = 14,8 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$, $E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{1}{R_2^2} = 2,71 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$,
 $E'_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{R_2^2} = 1,85 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$, $E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{1}{R_3^2} = 0,75 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$. (1 p)
 Kvalitatív helyes ábra. (A következő oldalon található ábra nem méretarányos.) (1 p)



- b) Legfeljebb mekkora feszültség kapcsolható a kondenzátorra úgy, hogy a térerősség ne lépje túl a kritikus értéket egyik dielektrikumban se, ha az egyes rétegek átütési szilárdsága rendre $E_{1,\text{krit}} = 250 \text{ kV/cm}$ és $E_{2,\text{krit}} = 300 \text{ kV/cm}$! (4 pont)

I. megoldás:

Mivel a térerősség az ε_1 permittivitású közegben a nagyobb – lásd a) feladat ábrája – és a kritikus térerősség is kisebb, így biztosan itt fog először megtörténni az átütés. A legnagyobb térerősség az R_1 sugarú fegyverzetten lép fel. (2 p)
A feladat lineáris és az a) feladat szerint E_1 térerősség U feszültség mellett adódik, így a maximális feszültség: $U_{\text{max}} = \frac{E_1}{E_{1,\text{krit}}} U = 25,41 \text{ kV}$. (2 p)

II. megoldás:

A kapacitás meghatározása a feladat szövegének segítségével: $C = \frac{Q}{U} = 0,55 \text{ pF}$, a definíció alapján közvetlenül: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)}$, vagy a két réteg soros kapcsolásával: $C = C_1 \times C_2$, ahol $C_i = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_i}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}}$ és $i = \{1, 2\}$. (2 p)
A maximális feszültség számítása: $E_{1,\text{max}} = \frac{CU_{\text{max}}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \frac{1}{R_1^2} \Rightarrow U_{\text{max}} = 25,41 \text{ kV}$. (2 p)

Legyen a továbbiakban $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^{-13} \text{ S/m}$!

- c) Határozza meg a szivárgási ellenállást! (3 pont)

I. megoldás:

Legyen $\sigma := \sigma_1 = \sigma_2$. Elektrosztatikai analógia alapján az egyes rétegek konduktanciája: $G_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_i} C_i$, ahol $i = \{1, 2\}$. (1 p)

Az eredő vezeték pedig soros kapcsolással kapható: $G = G_1 \times G_2$ (1 p)

A szivárgási ellenállás számítása: $G = \frac{I}{U} \Rightarrow R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}} \frac{1}{4\pi\sigma} = 385,83 \text{ T}\Omega$. (1 p)

II. megoldás:

Az alábbi két összefüggés felhasználásával $I = J(r)4\pi r^2$, $J(r) = \sigma E(r)$, (1 p)

majd a feszültség számítása a b) feladathoz hasonló módon. (1 p)

Végül az R ellenállás kifejezése. (1 p)

Kis példák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. Egy 0,25 m hosszú koaxiális kábel ere sugarának és köpenye belső sugarának a különbsége 1 cm. Alkalmazható-e elektrosztatikus modell a hosszegységre eső kapacitás számítására, ha a kábelt 1 GHz-en szeretnénk használni? Válaszát indokolja!

Igen, mert a c/f arány számottevően nagyobb a koaxiális kábel transzverzális irányú méreténél.

2. A σ fajlagos vezetőképességű közegben, egy nagy kiterjedésű fémsík fölött h magasságban egy $R \ll h$ sugarú vezeték helyezkedik el. Határozza meg a vezeték és a sík közötti hosszegységre eső vezetést!

$$G' = \frac{I'}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{2h}{R}\right)}$$

3. Elektrosztatikus térben, homogén térfogati töltéssűrűséggel ellátott, $\varepsilon_r = 1$ permittivitású szigetelő közegben a skalárpotenciál kifejezése V és m egységekben kifejezve $\phi(x) = -2x^2$. Határozza meg a térfogati töltéssűrűséget!

$$\rho = -\varepsilon\Delta\phi = 35,9 \frac{\text{pC}}{\text{m}^3}$$

4. A levegőben két egyforma, R sugarú igen hosszú vezeték helyezkedik el egymástól $d \gg R$ távolságban, melyek ellentétes irányú I áramot szállítanak (Lecher-vezeték). Adja meg a l hosszú szakaszának önindukciós együtthatóját!

Segítség: alkalmazzon ésszerű közelítéseket!

$$L = L_k + L_b \approx L_k = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-R}{R}\right) \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{R}\right)$$

5. Egy igen hosszú villámáram-levezető és egy hurok közötti kölcsönös induktivitás $L_{12} = 5 \text{ mH}$. A villámáram lineáris felfutású, $1 \mu\text{s}$ alatt 0-ról 10^5 A értékre emelkedik. Mekkora feszültség indukálódik eközben a hurokban?

$$U_i = -L_{12} \frac{di}{dt} = -0,5 \text{ GV}$$

A pozitív előjeles megoldás is elfogadható.