ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI β variáns

2007. ápr. 19.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\ x^{k-1}$$

függvénysor összegfüggvényét és a sor konvergenciasugarát!

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, x^{k-1} = 2+3x+4x^2+\cdots \qquad f(0)=2 \quad (1)$$

Ha $x \neq 0$: $f_1(x) := x\cdot f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^k$ (2)

$[0,x] \subset (-R,R)$ esetén szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^x f_1(x)\,dx \underset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \int_0^x x^k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} \underset{(2)}{=} \frac{x^2}{1-x} \ (2) \qquad R=1 \ (1) \qquad (|q|=|x|<1)$$

$$f_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' \underset{(1)}{=} \frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \ (1)$$

$x\neq 0$: $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{x} = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ és $f(0)=2$ $\Big\} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$ (1) és $R=1$ (1) (változatlan)

2. feladat (12 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$$

x_0 bázispontú Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

a) $x_0 = 0$ *b)* $x_0 = 3$

$$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!} \ (2) \quad u\in\mathbb{R} \ (1)$$

a.) $e^{2x+3} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 2^n}{n!} x^n$, (3) $x \in \mathbb{R}$, tehát $R=\infty$ (1)

b.) $e^{2x+3} = e^{2(x-3)+9} \underset{(2)}{=} e^9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(x-3))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^9\cdot 2^n}{n!} (x-3)^n$ (2) $x\in\mathbb{R}$

Tehát $R=\infty$ (1)

an2z2 070419/1.

3. feladat (10 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$$

függvények origó körüli Taylor sorait, azok konvergenciasugarait!

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ (1) $\quad |x| < 1 = R$ (1)

$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{-x}{2}}$ (1) $= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,x^n$ (2)

$|q| = \left|\frac{-x}{2}\right| = \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2$, tehát $R_f = 2$ (1)

$f'(x) = \left(\frac{1}{2+x}\right)' = \left((2+x)^{-1}\right)' = \frac{-1}{(2+x)^2} \Rightarrow g(x) = -f'(x)$ (1)

$\Rightarrow g(x) = -\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,x^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n\,x^{n-1}$ (2)

$x \in (-R_f, R_f)$ (szabad tagonként deriválni)

$R_g = R_f = 2$ (1) (nem változik)

4. feladat (14 pont)

Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x^6}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergenciasugarát!

b) $f^{(18)}(0) = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

c) Az $f(x)$ értékét az $x = 0,1$ pontban a 12-drendű Taylor polinomja segítségével számoljuk ki.
Becsülje meg az így elkövetett hibát!

$\boxed{6}$ a.) $f(x) = (1+3x^6)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}(3x^6)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}3^n x^{6n} =$ (3)

$= 1 + \frac{1/3}{1}\cdot 3x^6 + \frac{1/3\,(-2/3)}{1\cdot 2}3^2x^{12} + \frac{1/3\,(-2/3)(-5/3)}{1\cdot 2\cdot 3}3^3x^{18} + \dots$

$|3x^6| = 3|x|^6 < 1$ (2) $\Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$, tehát $R = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$ (1)

$\boxed{4}$ b.) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (1)

$f^{(18)}(0) = 18!\,\underbrace{a_{18}}_{x^{18}\text{ együtthatója}}$ (1) $= 18!\,\frac{1/3\,(-2/3)(-5/3)}{6}\cdot 3^3$ (2)

an2z207041912.

c.) $f(0{,}1) \approx T_{12}(0{,}1)$ Leibniz sorról van szó, ezért 1

4

$$|H| \le \underbrace{\frac{1/3\,(-2/3)\,(-5/3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3^3}_{=\frac{5}{3}}\; 0{,}1^{18}$$ 3

5. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^{12}+y^{12}}}{x^6+y^6}$$

a) Határozza meg a függvény origóbeli iterált határértékeit (ismételt határértékeit)!

$$\left(\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = ?\,,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = ?\right)$$

b) Vizsgálja meg a függvény origóbeli határértékét az $y = mx$ egyenesek mentén!

c) Létezik-e a határértéke f-nek az origóban?
Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

a.) 3

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{x^{12}+y^{12}}}{x^6+y^6} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt{x^{12}}}{x^6}}_{=1} = 1$$ 1 1

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^{12}+y^{12}}}{x^6+y^6} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^{12}}}{y^6} = \lim_{y\to 0}\frac{y^6}{y^6} = 1$$ 1

(A szimmetria miatt ugyanaz.)

b.) 4

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^{12}+m^{12}x^{12}}}{x^6+m^6x^6} =$$ 2

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^6}{x^6}}_{=1}\frac{\sqrt{1+m^{12}}}{1+m^6} = \frac{\sqrt{1+m^{12}}}{1+m^6}$$ 2

c.) 5

Mivel az előző határérték függ m-től, ezért $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$. 2

f nem totálisan deriválható az origóban, 1 hiszen nem értelmezett ott. 2
(Ha értelmezett lenne, akkor sem lenne deriválható, mert nem folytonos a függvény az origóban, mivel $\nexists$ ott a határérték.)

an2z20704 19/3.

6. feladat (12 pont)

a) Írja le az f kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli parciális deriváltjainak a definícióit!

b) A definíció alapján döntse el, hogy léteznek-e az f függvény $P_0\,(0,0)$ pontbeli parciális deriváltjai, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x^{12}+7y^8}}{x^4+y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a.) $f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$ 2

$f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$ 2

b.) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{4h^{12}}}{h^4} - 0}{h} =$ 2

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^6}{h^5} = \lim\limits_{h\to 0} 2h = 0$ 1 1

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\frac{\sqrt{7k^8}}{k^4} - 0}{k} =$ 2

$= \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\sqrt{7}\,k^4}{k^4 \cdot k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\sqrt{7}}{k} = \nexists$ 1 1

7. feladat (18 pont)

Legyen

$$f(x,y) = \ln(3x^4y^2+1), \qquad P_0(-1,1)$$

a) Indokolja meg, hogy létezik a P_0-hoz tartozó érintősík és írja fel az egyenletét!

b) Számolja ki az f függvénynek a $P_0(-1,1)$ pontbeli, $\underline{v} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ irányú iránymenti deriváltját!

c) Határozza meg az f függvény $P_0(-1,1)$ pontbeli maximális iránymenti deriváltjának értékét!

$\boxed{11}$ a.) $f'_x = \dfrac{1}{3x^4y^2+1} \cdot 12x^3y^2$

$f'_y = \dfrac{1}{3x^4y^2+1} \quad 6x^4y$ 3

Mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ grad f mindenütt létezik. 2

Mivel grad f (P_0) $\exists$ $\Rightarrow$ $\exists$ P_0-ban az érintősík

an2z20704191/4.

Az érintősík :

$$f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)-(z-f(P_0))=0 \quad 2$$

$$f'_x(P_0)=-3 \;\; 1 \;, \quad f'_y(P_0)=\frac{3}{2} \;\; 1 \;, \quad f(P_0)=\ln 4$$

$$-3(x+1)+\frac{3}{2}(y-1)-(z-\ln 4)=0 \quad 2$$

b.) $\boxed{6}$

$$|v|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13} \;; \quad e=\frac{v}{|v|}=\frac{3}{\sqrt{13}}i-\frac{2}{\sqrt{13}}j \quad 1$$

$$\left.\frac{df}{de}\right|_{P_0}=\operatorname{grad} f(P_0)\cdot e \;\; 2 \; =\left(-3i+\frac{3}{2}j\right) \;\; 1 \; \left(\frac{3}{\sqrt{13}}i-\frac{2}{\sqrt{13}}j\right)=$$

$$=\frac{-9}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}} \;\; 2 \; =\frac{-12}{\sqrt{13}}$$

c.) $\boxed{2}$

$$\max \left.\frac{df}{de}\right|_{P_0}=|\operatorname{grad} f(P_0)| \;\; 1 \; =\sqrt{9+\frac{9}{4}} \;\; 1 \; =\frac{\sqrt{45}}{2}$$

8. feladat (8 pont)

A $g\in C^2_{\mathbb{R}}$ egyváltozós függvény változója helyébe írjuk az e^{3x+4y} kifejezést!
Legyen az így kapott kétváltozós függvény $f(x,y) = g(\mathrm{e}^{3x+4y})$!

$$f'_x=? \qquad f'_y=?$$

$$f''_{xx}=? \qquad f''_{yy}=? \qquad \cancel{f''_{xy}=?} \qquad \cancel{f''_{yx}=?}$$

$$f'_x=g'(e^{3x+4y})\,e^{3x+4y}\cdot 3 \quad 2$$

$$f'_y=g'(e^{3x+4y})\,e^{3x+4y}\cdot 4 \quad 2$$

$$f''_{xx}=3\left(\left(g''(e^{3x+4y})\,e^{3x+4y}\cdot 3\right)e^{3x+4y}+g'(e^{3x+4y})\,e^{3x+4y}\cdot 3\right) \quad 2$$

$$f''_{yy}=4\cdot\left(\left(g''(e^{3x+4y})\,e^{3x+4y}\cdot 4\right)e^{3x+4y}+g'(e^{3x+4y})\,e^{3x+4y}\cdot 4\right) \quad 2$$