ANALÍZIS 2# 2. PZH

MEGOLDÁSOK

1. feladat (25 pont).

$$\frac{d^{16}}{dx^{16}} \frac{e^{x^5}}{\sqrt{9-x^3}}\bigg|_{x=0} =?$$

Ami kell az ilyen feladatoknál: az adott függvényt valahogyan Taylor-sorba kell fejteni, hogy könnyedén megkaphassuk a sokadik derivált értékét egy bizonyos $x = = a$ pontban. Az $f(x)$ függvény Taylor-sora az $x = a$ pont körül

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ...$$

Keressük tehát a fenti függvény Taylor-sorának x^{16} tagjának együtthatóját, mert abból kiszámolható a 16. derivált értéke $x = 0$ pontban.

Tekintsük szorzatként a fenti függvényre:

$$\frac{e^{x^5}}{\sqrt{9-x^3}} = e^{x^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x^3}} = e^{x^5} \cdot (9-x^3)^{-\frac{1}{2}},$$

majd számoljuk ki mindkét tag Taylor-sorát ($a = 0$ körül):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ , ahol } x \in \mathbb{R}, \text{ amelyből } e^{x^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n!} \text{ adódik.} \tag{1}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ , ahol } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ amelyből}$$

$$(9-x^3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-x)^3}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-x)^{3k}}{3 \cdot 9^k} = \tag{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3 \cdot 9^k}.$$

Ennek a két sornak a szorzatából előáll a teljes függvény sora, ezt szabad csinálni, mert a Taylor-sor, mint operátor lineáris és multiplikatív. Szerencsére csak az x^{16} együtthatója kell nekünk, ezért meg kell néznünk, hogy állhat ez elő! Az exponenciális sorból 0,5,10,.. a binomiális sorból: 0,3,6,12,... kitevők jönnek be. A 16 csak $10 + 6$ módon áll elő, tehát ezt a két tagot kell csak kiszámolni a két sorból.
Az exponenciális sorból $\frac{1}{2}x^{10}$ a binomiális sorból $\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{3\cdot 9^2}x^6$, a szorzat sorának x^{16} együtthatója tehát $\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3\cdot 9^2}$, amelyet 16!-sal szorozva $f^{(16)}(0)$ értékét kapjuk, azaz a végeredmény: $16! \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3\cdot 9^2}$.

2. feladat (25 pont)**.** *Határozzuk meg a az $y = x^x$ $(x > 0)$ görbét $x_0 = 1$ pont fölött érintő egyenes egyenletét és egy Lagrange-féle maradéktag segítségével adjunk fölső korlátot a görbe és a fölírt egyenes eltérésre $x = 0.99$-nél.*

Szükségünk lesz x^x első két deriváltjára. Ez talán kicsit trükkös, mert implicit deriválni kell, legyen $y = x^x$, ekkor $\ln(y) = x\ln(x)$, most mindkét oldalt deriválva $\frac{1}{y}y' = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$, amibe visszahelyettesítve y-t, $y' = x^x(\ln(x) + 1)$ adódik. Ezt még egyszer most már lehet szorzatként deriválni, mert x^x ismert, a 2. derivált ilyen módon: $x^x(\ln(x) + 1)^2 + x^{x-1}$.

Az x^x görbét $x_0 = 1$ pont felett érintő egyenes egyenlete pontosan az elsőfokú $x_0 = 1$ körüli Taylor-polinomja a görbének.

Ha f legalább $(n + 1)$-szer folytonosan differenciálható $x_0 \in \mathbb{R}$ egy $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ környezetében, akkor minden $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ számhoz létezik egy olyan $\xi \in (x_0, x)$, illetve $\in(x, x_0)$, amelyre

$$f(x) = T_{n,f}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Tehát az érintő és a görbe legnagyobb eltérése (amely egy biztosan jó felső korlát) a $|x^x - T_{n,f}(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}|$ függvény ξ változóra vett maximuma a $(x, x_0) = (0.99{,}1)$ intervallumon, mivel x, x_0 rögzített a maximum $f^{(n+1)}(\xi)$ maximumában vétetik fel, amely a második derivált monotonitása miatt $\xi = 1$-ben lesz. Ebből adódóan az eltérés $\leq \frac{1(\ln(1)+1)^2+1}{2}(1 - 0.99)^2 = 10^{-4}$.

3. feladat. *Vizsgáljuk meg az*

a) $|x|^{|y|}$ *b)* $\ln(x^2 + y^2)(x^2 + y^4)$ *c)* $\frac{xy^2}{x^2y+y^4}$

kifejezések határértéket az $(x, y) = (0{,}0)$ pontban.

a) $|x|^{|y|}$, ha $x \to 0$, majd $y \to 0$, akkor a határérték 0. Megfordítva pedig $y \to 0$, majd $x \to 0$, akkor a határérték 1. Mivel az iterált határértékek nem egyeznek meg, ezért a függvénynek nem létezik a határértéke az adott pontban.

b) Írjuk fel polárkoordinátákkal a változókat, ekkor $x = r\cos(\theta)$ és $y = r\sin(\theta)$, visszahelyettesítve:

$$\lim_{r\to 0} \ln(r^2)r^2(\cos^2(\theta) + r^2\sin^4(\theta)),$$

itt bejön egy speciális $r^2\ln(r^2)$ határérték, amelyet L'Hospital-szabállyal meghatározhatunk:

$$r^2\ln(r^2) = \frac{\ln(r^2)}{r^{-2}},$$

mert a számláló és a nevező is végtelenhez tart, amint $r \to 0$, így $\lim_{r\to 0} r^2\ln(r^2) = \frac{2}{r}\frac{-r^3}{2}|_{r=0} = 0$.

Mivel $r^2\ln(r^2) \to 0$ és $\cos^2(\theta) + r^2\sin^4(\theta) \to \cos^2(\theta)$ léteznek, ezért vehetjük a határértékek szorzatát, így a határérték létezik és 0.

c) Itt vizsgáljuk az iránymenti határértéket, legyen $y = mx$, ahol $x \to 0$. Helyettesítve:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xm^2x^2}{x^2mx + m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1 + m^3x} = m,$$

tehát a függvény határértéke függ az irány megválasztásától, így a határérték nem létezik.

4. feladat (25 pont)**.** *Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter-értékekre lesz a*

$$f(x,y) = (2a+b)^2(x+1)^2 + \frac{1}{2}(y+1)^2 - 2\sin(x) + a\sin(y) + \frac{bxy}{(x+a)^2+1}$$

képlettel megadott f függvénynek lokális szélsőértéke az $(x,y) = (0{,}0)$ pontban?

Szükségünk van $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}, f'_x, f'_y$ parciális deriváltakra.

$$f'_x = 2\,(2\,a+b)^2\,(x+1) - 2\,\cos(x) + \frac{by}{(x+a)^2+1} - \frac{bxy\,(2\,x+2\,a)}{\left((x+a)^2+1\right)^2}$$

$$f'_y = y + 1 + a\cos(y) + \frac{bx}{(x+a)^2+1}$$

Szélsőértéke akkor lehet a függvénynek a $(0{,}0)$ pontban, hogy ha az $f'_x = f'_y = 0$ egyenletrendszernek van megoldása a, b-re. Mivel $x = y = 0$, ezért kapjuk, hogy:

$$f'_x|_{0,0} = 2\,(2\,a+b)^2 - 2$$

$$f'_y|_{0,0} = 1 + a$$

Ebből $(a,b) = (-1{,}1) = (-1{,}3)$ elégítik ki a szükséges feltételt. További deriváltak:

$$f''_{xx} = 2\,(2\,a+b)^2 + 2\,\sin(x) - 2\,\frac{by\,(2\,x+2\,a)}{\left((x+a)^2+1\right)^2} + 2\,\frac{bxy\,(2\,x+2\,a)^2}{\left((x+a)^2+1\right)^3} - 2\,\frac{bxy}{\left((x+a)^2+1\right)^2}$$

$$f''_{yy} = 1 - a\sin y$$

$$f''_{xy} = \frac{b}{(x+a)^2+1} - \frac{bx\,(2\,x+2\,a)}{\left((x+a)^2+1\right)^2}$$

$$f''_{yx} = \frac{b}{(x+a)^2+1} - \frac{bx\,(2\,x+2\,a)}{\left((x+a)^2+1\right)^2}$$

Két eset van, először legyen $a = -1, b = 1$, ekkor $f''_{xx}(0{,}0) = 2$, $f''_{yy}(0{,}0) = 1$, $f''_{xy}(0{,}0) = f''_{xy}(0{,}0) = \frac{1}{2}$, ebben az esetben a Hesse-mátrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa: $7/4 > 0$ és $f_{xx} > 0$, tehát itt lokális minimum van.

Most legyen $a = -1$ és $b = 3$, ilyenkor a Hesse-mátrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa: $-1/4 < 0$, ilyenkor pedig nincs lokális szélsőérték.

Tehát csak $(a,b) = (-1{,}1)$ paraméter-értékek a jók.