Pótló zárthelyi dolgozat
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Egy megkevert magyarkártya-pakliból 4 lapot húzunk. Legyenek P, Z, T ill. M azon események, hogy a húzott lapok közt van piros, zöld, tök ill. makk. Jelölje továbbá rendre A, F, K ill. Á azt, hogy húztunk legalább egy alsót, felsőt, királyt ill. ászt, valamint N_i azt, hogy húztunk i értékű lapot, ahol i lehetséges értékei 7, 8, 9 ill. 10. Fejezzük ki a következő eseményeket a fent megadott események és a halmazműveletek segítségével:

   a) húztunk számos és figurás lapot is,

   b) négy ászt húztunk,

   c) a húzott lapok a piros alsó, a piros felső, a piros király és a piros ász.

   A megadott kifejezések helyességének indoklása is szükséges.

   (Egy pakli magyar kártya a következő 32 lapból áll: minden színből (piros, zöld, tök és makk) van 4 darab számos lap 7, 8, 9 ill. 10 értékekkel, illetve 4 figurás lap: alsó, felső, király és ász.)

   Megoldás:

   a)

   (1 pont) Az, hogy húztunk számos lapot, pontosan azt jelenti, hogy az N_7, N_8, N_9 és N_{10} események közül legalább az egyik teljesül, azaz ez az esemény $N_7 \cup N_8 \cup N_9 \cup N_{10}$.

   (1 pont) Hasonlóan, az, hogy húztunk figurás lapot, pontosan azt jelenti, hogy az A, F, K és Á események közül legalább az egyik teljesül, azaz ez az esemény $A \cup F \cup K \cup \text{Á}$.

   (1 pont) Mivel mindkét fenti feltételnek teljesülni kell, így a két esemény metszetét kell tekintenünk, tehát a kérdéses esemény
   $$(N_7 \cup N_8 \cup N_9 \cup N_{10}) \cap (A \cup F \cup K \cup \text{Á}).$$

   b)

   (1 pont) Mivel összesen négy lapot húzunk, így az, hogy négy ászt húzunk, pontosan azt jelenti, hogy más típusú lapot nem húzunk.

(1 pont) Először az utóbbi esemény komplementerét határozzuk meg: itt arról van szó, hogy legalább egy másik (ásztól különböző) típusú lapból húztunk, tehát az összes többi laptípushoz tartozó esemény unióját kell csak venni: $N_7 \cup N_8 \cup N_9 \cup N_{10} \cup A \cup F \cup K$.

(1 pont) Így a kérdéses esemény $\overline{N_7 \cup N_8 \cup N_9 \cup N_{10} \cup A \cup F \cup K}$.

c)

(1 pont) Az hogy minden húzott lapunk piros, az éppen azt jelenti, hogy mem húztunk egyetlen más színből sem, tehát ez az esemény $\overline{Z \cup T \cup M}$.

(2 pont) Ha minden figurás lapból húzunk, akkor szükségképp (mivel ezekből négyféle van, és négy lapot húzunk) mindegyikből pont egyet húzunk, tehát $A \cap F \cap K \cap \text{Á}$ éppen azt jelenti, hogy a mind a négy figurás lapból húztunk pontosan egyet.

(1 pont) Világos, hogy a kérdéses esemény a fenti két esemény metszete:

$$(\overline{Z \cup T \cup M}) \cap (A \cap F \cap K \cap \text{Á}).$$

2. Az $A, B \subset \Omega$ eseményekről tudjuk, hogy $1/4$ a valószínűsége annak, hogy kettejük közül egyik sem következik be, illetve hogy ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy mindkettő bekövetkezik. Határozzuk meg az $\mathbb{P}(B \setminus A)$ valószínűséget, ha azt is tudjuk, hogy az A esemény kétszer akkora valószínűséggel következik be, mint a B esemény.

   Megoldás:

   (1 pont) A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = \dfrac{1}{4}$

   (1 pont) és $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$,

   (1 pont) továbbá $\mathbb{P}(A) = 2\,\mathbb{P}(B)$.

   (1 pont) A komplementer valószínűségére vonatkozó formula alapján

   $$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

   (2 pont) A két eseményre vonatkozó *szita-formula* alapján

   $$\frac{3}{4} = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

   (1 pont)

   $$= 2\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B) - \frac{1}{4} = 3\,\mathbb{P}(B) - \frac{1}{4}.$$

   (1 pont) Ezt átrendezve $3\,\mathbb{P}(B) = 1$, azaz $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$ (ebből pedig $\mathbb{P}(A) = 2\,\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, de erre az adatra nincs szükség a továbbiakban).

   (1 pont) Így tehát $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

   (1 pont) $= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$.

3. Száz kocka közül 98 szabályos, kettő pedig szabálytalan, ez utóbbiaknak mindegyik oldalán 6-os van. Találomra választunk egy kockát a százból, majd a kiválasztott kockával háromszor dobunk. Mekkora az esélye, hogy szabálytalan kockával dobtunk, ha mindhárom dobás eredménye hatos lett?

   Megoldás:

   (0 pont) A rövidség kedvéért vezessünk be jelöléseket a következő eseményekre:

   $$HH = \{\text{három hatost dobunk}\}, \quad SZ = \{\text{szabályos kockával dobunk}\},$$

   (Ha nincs bevezetve külön jelölés az eseményekre, hanem szövegesen vannak körülírva, nem jár pontlevonás.)

(1 pont) A kérdéses valószínűség: $\mathbb{P}(\overline{SZ} \mid HH)$.

(1 pont) Az SZ és $\overline{SZ}$ események teljes eseményrendszert alkotnak,

(2 pont) ezért alkalmazható rájuk a Bayes-tétel:

$$\mathbb{P}(\overline{SZ} \mid HH) = \frac{\mathbb{P}(HH \mid \overline{SZ})\,\mathbb{P}(\overline{SZ})}{\mathbb{P}(HH \mid SZ)\,\mathbb{P}(SZ) + \mathbb{P}(HH \mid \overline{SZ})\,\mathbb{P}(\overline{SZ})}.$$

Ha esetleg a tétel nincs nevesítve, akkor is hivatkozni kell rá, hogy ez a formula az előadás anyagának része. Az előadásra való hivatkozás nélkül a formulára nem jár pont. Ha valaki külön alkalmazza az egyerű Bayes-tételt, majd utána a teljes valószínűség tételét (mindkettőnél a tétel nevére vagy az előadásra hivatkozva), akkor is jár ez a két pont (egy-egy a két tétel alkalmazásáért). Hivatkozás nélkül ebben az esetben sem jár az adott pont. Kizárólag hibátlanul felírt formulá(k)ra adható pont.

(2 pont) A feladat szövege alapján

$$\mathbb{P}(HH \mid SZ) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}, \qquad \mathbb{P}(HH \mid \overline{SZ}) = 1,$$

(2 pont) továbbá

$$\mathbb{P}(SZ) = \frac{98}{100} = \frac{49}{50}, \qquad \mathbb{P}(\overline{SZ}) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}.$$

(1 pont) Tehát behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(\overline{SZ} \mid HH) = \frac{1 \cdot \frac{1}{50}}{\frac{1}{216} \cdot \frac{49}{50} + 1 \cdot \frac{1}{50}}.$$

Ha a megoldó nem írja le általános alakban a formulát, csak a behelyettesített értéket, akkor a formuláért járó 2 pontot is megkapja, amennyiben *hivatkozik a tételre*, és a behelyettesített értékek *midegyikének* jelentése *pontosan* tisztázott, valamint a helyettesítés *hibátlan*.

(1 pont) A műveleteket elvégezve

$$\mathbb{P}(\overline{SZ} \mid HH) = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{49}{50\cdot 216} + \frac{216}{50\cdot 216}} = \frac{1}{50} \cdot \frac{50 \cdot 216}{265} = \frac{216}{265} \approx 0{,}8151.$$

4. Egy fiókban 10 pár (azaz 20 darab) párosítatlan zokni van. Véletlenszerűen kihúzunk belőlük 4 darabot, jelölje X a négy húzott zokniból összerakható párok számát. Határozzuk meg X eloszlását.

Megoldás:

(1 pont) 4 darab zokni közt 0, 1 vagy 2 pár található, így $\mathrm{ran}X = \{0, 1, 2\}$.

(1 pont) A húzásnál 20 elemből választunk 4-et, így összesen $\binom{20}{4}$-féle húzás lehetséges, ez tehát az Ω eseménytér elemszáma.

(1 pont) Az $\{X = 2\}$ esemény éppen azt jelenti, hogy két párból húzunk ki két-két zoknit, ez a két pár pedig összesen $\binom{10}{2}$-féleképp választható,

(1 pont) így

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323} \approx 0{,}0093.$$

(1 pont) Az $\{X = 0\}$ esemény azt jelenti, hogy mind a négy kihúzott zokni különböző párokból való, ezeket a párokat $\binom{10}{4}$-féleképp választhatjuk ki.

(1 pont) Azonban mindegyik párból egymástól függetlenül két különböző zoknit húzhatunk, ez pedig összesen $2^4 \cdot \binom{10}{4}$ különböző lehetőséget jelent a húzásra.

(1 pont) Tehát

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{16 \cdot \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323} \approx 0{,}6935.$$

(2 pont) Végül $\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=1$ miatt

(1 pont)

$$\mathbb{P}(X=1)=1-\frac{227}{323}=\frac{96}{323}\approx 0{,}2972.$$

Az utolsó 3 pont a következőképp is megkapható:

(1 pont) Az $\{X=1\}$ esemény azt jelenti, hogy 3 párból húzunk.

(1 pont) Ha a párok fixek, akkor 3-féleképp választható, hogy melyikből húzzuk ki mindkettőt, a másik kettőből pedig függelenül kétféleképp húzhatunk, ez tehát összesen $3\cdot 2^2\cdot\binom{10}{3}$ lehetőség,

(1 pont) vagyis

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{12\cdot\binom{10}{3}}{\binom{20}{4}}=\frac{96}{323}.$$

(A megoldás persze olyan modellből is megkapható, ahol figyelembe vesszük a húzások sorrendjét.)

5. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(XY>0 \mid X<2)$ valószínűséget és az $\mathbb{E}(X+2Y)$ várható értéket.

Y \ X	0	1	2
-1	1/5	1/5	1/10
1	1/20	1/4	1/5

Megoldás:

(1 pont) $XY>0$ pontosan akkor teljesül, ha $Y=1$, továbbá $X=1$ vagy $X=2$, azaz

$$\{XY>0\}=\{X=1,Y=1\}\cup\{X=2,Y=1\}.$$

(1 pont) $\{X<2\}=\{X=0\}\cup\{X=1\}$

(1 pont) A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\mathbb{P}(XY>0\mid X<2)=\frac{\mathbb{P}(\{XY>0\}\cap\{X<2\})}{\mathbb{P}(X<2)}=\frac{\mathbb{P}(X=1,Y=1)}{\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)}=\frac{1/4}{\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)}.$$

(1 pont) Az X marginális eloszlása:

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=0,Y=-1)+\mathbb{P}(X=0,Y=1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=1,Y=-1)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20},$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=2,Y=-1)+\mathbb{P}(X=2,Y=1)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10},$$

(1 pont) tehát

$$\mathbb{P}(XY>0\mid X<2)=\frac{\mathbb{P}(X=1,Y=1)}{\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)}=\frac{1/4}{5/20+9/20}=\frac{1}{4}\cdot\frac{20}{14}=\frac{5}{14}.$$

(1 pont) A várható érték linearitása miatt $\mathbb{E}(X+2Y)=\mathbb{E}(X)+2\,\mathbb{E}(Y)$.

(1 pont) A várható érték definíciója szerint

$$\mathbb{E}(X)=0\cdot\mathbb{P}(X=0)+1\cdot\mathbb{P}(X=1)+2\cdot\mathbb{P}(X=2)=\frac{9}{20}+\frac{3}{5}=\frac{21}{20}.$$

(1 pont) Az Y várható értékének meghatározásához számoljuk az Y marginális eloszlását:

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\mathbb{P}(X=0,Y=-1)+\mathbb{P}(X=1,Y=-1)+\mathbb{P}(X=2,Y=-1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{10}=\frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=1)=\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2},$$

(1 pont) tehát ismét a várható érték definíciója szerint

$$\mathbb{E}(Y)=(-1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1)+1\cdot\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0,$$

(1 pont) vagyis $\mathbb{E}(X+2Y)=\mathbb{E}(X)=\dfrac{21}{20}$.

6. Legyenek $X\sim Geo(p)$ és $Y\sim Geo(p)$ független, geometriai eloszlású valószínűségi változók, melyeknek $p\in(0;1)$ paramétere azonos. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(X\geq 3)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\mathbb{D}(X+Y)=2$.

Megoldás:

(1 pont) Mivel $\mathbb{D}^2(X+Y)=4$,

(2 pont) így a változók függetlensége miatt $4=\mathbb{D}^2(X+Y)=\mathbb{D}^2(X)+\mathbb{D}^2(Y)$. (Ha a megoldó nem hivatkozik a függetlenségre, vagy a szabályt a szórásra alkalmazza, akkor ebből a 2 pontból egy sem adható meg.)

(1 pont) A geometriai eloszlás szórásnégyzetét behelyettesítve $4=2\cdot\dfrac{1-p}{p^2}$ adódik,

(1 pont) ezt pedig 2-vel leosztva, p^2-tel felszorozva és átrendezve a $2p^2+p-1=0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

(1 pont) Ennek megoldásai

$$p_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4},$$

(1 pont) és mivel pozitív számot keresünk, így az egyetlen helyes megoldás a $p=\dfrac{1}{2}$.

(1 pont) $\mathbb{P}(X\geq 3)=1-\mathbb{P}(X<3)=1-(\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2))$

(1 pont) $=1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}\right)$ (ez a pont a jó helyettesítésért jár)

(1 pont) $=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$.