



Analízis 2 informatikusoknak, 2. ZH

2016.04.18.
BMETE90AX22

Munkaidő: 50 perc

Max. pontszám: 30, Ponthatárok: 12– 2, 16,5– 3, 19,5– 4, 24– 5

1. FELADAT. ((1+3)+2p) Az alábbi két sor közül az egyik konvergens, a másik pedig divergens.

$$A) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{k+1}, \quad B) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{k^2+1}$$

a) Igazoljuk a sorok ezen tulajdonságait! b) A konvergens sort a $k = 49$ -es tagig összeadva $s_{49} = 0.44059$ adódik. Adjunk becslést arra, hogy ettől az értéktől legfeljebb mennyivel térhet el a sor összege!

2. FELADAT. (3+3p) Legyen

$$s(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(5^k x)}{4^k}.$$

a) Mutassuk meg, hogy az $s(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens az \mathbb{R} halmazon! b) Igazoljuk, hogy a $\lim_{x \rightarrow 0} s(x)$ határérték létezik, és számoljuk is ki!

3. FELADAT. (1+2+2+1p) Adjuk meg az alábbi hatványsor x_0 bázispontját, konvergenciasugarát és konvergencia-tartományát! Hol abszolút konvergens a hatványsor?

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k^2 2^k}$$

4. FELADAT. (1+2+2+1p) Írjuk fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Adjuk meg a sor konvergenciasugarát, az $f^{(4)}(0)$ értéket (elemi műveletekkel felírva), valamint írjuk fel az $f'(x)$ függvény Taylor-sorát is (ezt is az $x_0 = 0$ pontban)!

5. FELADAT. (3+3p) Adjuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek (szükség esetén vizsgáljuk a szereplő kétváltozós függvények értékeit az $y = x$, $y = 0$ és $y^2 = x$ görbék mentén)!

$$A) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, \quad B) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$



Analízis 2 informatikusoknak, 2. ZH

2016.04.18.
BMETE90AX22

Munkaidő: 50 perc

Max. pontszám: 30, Ponthatárok: 12– 2, 16,5– 3, 19,5– 4, 24– 5

1. FELADAT. ((3+1)+2p) Az alábbi két sor közül az egyik konvergens, a másik pedig divergens.

$$A) \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{3k}{k^2+2}, \quad B) \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{3k}{k+2}$$

a) Igazoljuk a sorok ezen tulajdonságait! b) A konvergens sort a $k = 99$ -es tagig összeadva $s_{99} = 0.35039$ adódik. Adjunk becslést arra, hogy ettől az értéktől legfeljebb mennyivel térhet el a sor összege!

2. FELADAT. (3+3p) Legyen

$$s(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos(4^k x)}{3^k}.$$

a) Mutassuk meg, hogy az $s(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens az \mathbb{R} halmazon! b) Igazoljuk, hogy a $\lim_{x \rightarrow 0} s(x)$ határérték létezik, és számoljuk is ki!

3. FELADAT. (1+2+2+1p) Adjuk meg az alábbi hatványsor x_0 bázispontját, konvergenciasugarát és konvergencia-tartományát! Hol abszolút konvergens a hatványsor?

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x+3)^k}{k^3 3^k}$$

4. FELADAT. (1+2+2+1p) Írjuk fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Adjuk meg a sor konvergenciasugarát, az $f^{(4)}(0)$ értéket (elemi műveletekkel felírva), valamint írjuk fel az $f'(x)$ függvény Taylor-sorát is (ezt is az $x_0 = 0$ pontban)!

5. FELADAT. (3+3p) Adjuk meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek (szükség esetén vizsgáljuk a szereplő kétváltozós függvények értékeit az $y = x$, $y = 0$ és $y^3 = x$ görbék mentén)!

$$A) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^3}{x^2 + y^6}, \quad B) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^3}{x^2 + y^2}$$