ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2012. márc. 22.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (11 pont)

a) Adja meg a következő fogalmak definícióját!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -7\,, \qquad \text{illetve} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{7n^3-2n^2+3n+1}{n^2+6}} = \infty$$

a.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -7$

(D) $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$: $|a_n+7|<\varepsilon$, ha $n>N(\varepsilon)$ (2)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

(D) $\forall\ P>0$-hoz $\exists\ N(P)$: $a_n>P$, ha $n>N(P)$ (2)

b.) $\boxed{7}$ $a_n=\sqrt[3]{\frac{7n^3-2n^2+3n+1}{n^2+6}} > \sqrt[3]{\frac{7n^3-2n^3+0+0}{n^2+6n^2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}n} > P$

$\Rightarrow n > \frac{7}{5}P^3$, tehát $N(P) \geq \left[\frac{7}{5}P^3\right]$

2. feladat (25 pont)

Állapítsa meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben konvergensek!

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n\, 3^n + 6}{2^{3n} + 5}$

b) $b_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n-4}\right)^{6n}$

c) $c_n = \left(\dfrac{n}{4n+7}\right)^n$

d) $d_n = \sqrt{n^4+2n+3} - \sqrt{n^4+n^2}$

a.) $\boxed{6}$ $a_n = \dfrac{(-3)^n + 6}{8^n+5} = \dfrac{\left(-\frac{3}{8}\right)^n + 6\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 + 5\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{0+0}{1+0} = 0$

Felhasználtuk, hogy
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a|<1$.

an1z1p120322/1.

b.) $\boxed{6}$ $b_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{-4}{2n}\right)^{2n}} \right)^3 \longrightarrow \left(\dfrac{e}{e^{-4}}\right)^3 = e^{15}$

c.) $\boxed{6}$ $0 < c_n < \left(\dfrac{n}{4n+0}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \to 0$, $0 \swarrow 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

d.) $\boxed{7}$ $d_n = \left(\sqrt{n^4+2n+3} - \sqrt{n^4+n^2}\right) \dfrac{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+n^2}}{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+n^2}} =$

$= \dfrac{n^4+2n+3-(n^4+n^2)}{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+n^2}} = \dfrac{-n^2+2n+3}{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+n^2}} =$

$= \underbrace{\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4}}}_{=1} \quad \dfrac{-1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \dfrac{-1+0+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = -\dfrac{1}{2}$

3. feladat (15 pont)

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 8}{7}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 9$$
$$(a_n) = (9,\ 10.43,\ 14.4, \cdots)$$

a) Mely valós számok jöhetnek szóba a sorozat határértékeként?
b) Igazolja, hogy $a_n > 8$, $n \in \mathbb{N}^+$
c) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
d) Konvergens-e a sorozat!

a.) $\boxed{3}$ $A = \dfrac{A^2-8}{7} \Longrightarrow A^2 - 7A - 8 = 0 \Longrightarrow A = -1$ vagy $A = 8$.

(Más szám határértékként nem jöhet szóba.)

b.) Teljes indukcióval látjuk be, hogy $a_n > 8$.

$\boxed{5}$ 1.) $a_i > 8$ $i = 1, 2, 3$-ra teljesül

2.) Tfh. $a_n > 8$

3.) Igaz-e, hogy $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 8}{7} > 8$?

2.) miatt $a_n > 8 \Longrightarrow a_n^2 > 64 \quad |-8$

$\Longrightarrow a_n^2 - 8 > 56 \quad |:7$

$\Longrightarrow \dfrac{a_n^2-8}{7} = a_{n+1} > \dfrac{56}{7} = 8$

Tehát $a_n > 8$ teljesül minden n-re.

c.) Sejtés: a sorozat monoton nő

$\boxed{5}$ Biz.: teljes indukcióval

1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül

2.) Tfh. $a_{n-1} < a_n$

3.) Igaz-e: $a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 8}{7} < \frac{a_n^2 - 8}{7} = a_{n+1}$?

2.) miatt igaz: $\underbrace{8 < a_{n-1}}_{b.)\text{-ből}} < a_n$

$\Rightarrow \quad a_{n-1}^2 < a_n^2 \quad |-8$

$\Rightarrow \quad a_{n-1}^2 - 8 < a_n^2 - 8 \quad |:7$

$\Rightarrow \quad \frac{a_{n-1}^2 - 8}{7} = a_n < a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 8}{7}$

Tehát (a_n) monoton nő.

d.) A sorozat divergens, mert $a_n \to \infty$.

$\boxed{2}$ Ugyanis $a_1 = 9$ és a sorozat monoton nő, tehát $A \neq 8$ és $A \neq -1$.

4. feladat (11 pont)

$$a_n = \frac{3n^4 \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) - 3n^4}{2n^4 + 1}$$

Keresse meg a sorozat összes torlódási pontját!

lim sup a_n = ? , lim inf a_n = ?

Ha $n = 4k+1$: $\sin n\frac{\pi}{2} = 1$, így

$$a_n = \frac{3n^4 - 3n^4}{2n^4+1} = 0 \to 0 \qquad (3)$$

Ha $n = 2k$: $\sin n\frac{\pi}{2} = 0$, így

$$a_n = \frac{-3n^4}{2n^4+1} = \frac{-3}{2+\frac{1}{n^4}} \to -\frac{3}{2} \qquad (3)$$

Ha $n = 4k+3$: $\sin n\frac{\pi}{2} = -1$, így

$$a_n = \frac{-3n^4 - 3n^4}{2n^4+1} = \frac{-6}{2+\frac{1}{n^4}} \to -3 \qquad (3)$$

Ezért $\overline{\lim}\, a_n = 0$ (1), $\underline{\lim}\, a_n = -3$ (1)

an1z1p 12 0322/3.

5. feladat (14 pont)

Írja le a Leibniz kritériumot!

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \; \frac{5^{n+1}}{n\,5^n + 1}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

Leibniz kritérium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \quad , \quad c_n > 0$$

Ha c_n monoton fogyóan tart 0-hoz, akkor a sor konvergens. 3

$$c_n = \frac{5^{n+1}}{n\,5^n+1} = \frac{5 \cdot 5^n}{n \cdot 5^n + 1} = \frac{5}{\underbrace{n}_{\infty} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{\to 0}} \longrightarrow 0 \qquad 2$$

$$c_{n+1} \overset{?}{<} c_n$$

$$\frac{5^{n+2}}{(n+1)\,5^{n+1}+1} \overset{?}{<} \frac{5^{n+1}}{n\,5^n+1} \qquad \Big| : 5^{n+1}$$

$$\frac{5}{(n+1)\,5^{n+1}+1} \overset{?}{<} \frac{1}{n\,5^n+1}$$

$$5(n\,5^n+1) \overset{?}{<} n\,5^{n+1} + 5^{n+1} + 1$$

$$4 \overset{?}{<} 5^{n+1} \quad \text{Ez } \forall\ n\text{-re teljesül} \Rightarrow c_{n+1} < c_n$$

5

Mivel $c_n \searrow 0$, a Leibniz kritérium miatt a sor konv. 1

$s \approx s_{99}$

Mivel a sor Leibniz sor:

$$|H| = |s - s_{99}| < c_{100} = \frac{5^{101}}{100 \cdot 5^{100} + 1} \qquad 3$$

6. feladat (8+16=24 pont)

$$a_n = \frac{2^{2n} + 2^n}{4 + 5^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{3n+2}{n^2+4}$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$, $\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

Amelyik konvergens, annál adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a.) $\boxed{8}$

$$a_n = \frac{4^n + 2^n}{4 + 5\cdot 5^n} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + 5} \longrightarrow \frac{0+0}{0+5} = 0 \quad 5$$

$$b_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{3+0}{1+0} = 0 \quad 3$$

b.) $\sum^{\infty} a_n$:

$\boxed{16}$

$$0 < a_n < \frac{4^n + 4^n}{0 + 5\cdot 5^n} = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n ; \quad \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ konv. geom. sor}$$

$$\left(q = \frac{4}{5},\ |q|<1\right) \xRightarrow[\text{majoráns kr.}]{} \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \quad 5$$

$s \approx s_{100}$

$$\underbrace{0 < H}_{1} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{4 + 5\cdot 5^n} < \sum_{n=101}^{\infty} \frac{4^n + 4^n}{5\cdot 5^n} = \frac{2}{5}\sum_{n=101}\left(\frac{4}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{5}\,\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{101}}{1-\frac{4}{5}} \quad 5$$

$\sum^{\infty} b_n$:

$$b_n = \frac{3n+2}{n^2+4} > \frac{3n}{n^2 + 4n^2} = \frac{3}{5}\,\frac{1}{n}$$

$$\frac{3}{5}\sum^{\infty}\frac{1}{n} \text{ div. (harm. sor)} \xRightarrow[\text{minoráns kr.}]{} \sum^{\infty} b_n \text{ div.} \quad 5$$

7. feladat (12 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n-5}\right)^{3n}$ b) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{3n^3+5}{n^3+2}}$

$$a_n = \left(\frac{\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-5}{n}\right)^n}\right)^3 \longrightarrow \left(\frac{e^{-2}}{e^{-5}}\right)^3 = e^9 \qquad 5$$

$$\underbrace{\underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{\tfrac{5}{3}}}\ \ \frac{1}{(\underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{n}})^3}}_{\downarrow \atop 1} = \sqrt[n]{\frac{5}{n^3+2n^3}} < b_n = \sqrt[n]{\frac{3n^3+5}{n^3+2}} < \sqrt[n]{\frac{3n^3+5n^3}{n^3}} = \sqrt[n]{8} \to 1$$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} b_n \to 1 \qquad 7$$

8. feladat (8 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6}{5+(\sqrt{3})^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6}{5+\sqrt[n]{3}}$

a.) $\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{6}{5+(\sqrt{3})^n}}_{:=c_n}$

$c_n \searrow 0$, tehát Leibniz sor, így konvergens.
(Vagy: belátható, hogy absz. konv. (majoráns kr-mal), így konv.)

b.) $\boxed{4}$ $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$

$$|b_n| = \frac{6}{5+\sqrt[n]{3}} \longrightarrow \frac{6}{5+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum^{\infty} b_n$ div., mert nem teljesül a konv. szükséges feltétele.