HÁLÓZATOK ÉS RENDSZEREK II

2. házi feladat : Diszkrét idejű hálózatok vizsgálata

Név : Bán Márton tk.: 3.
törzsszám : LY8UQH

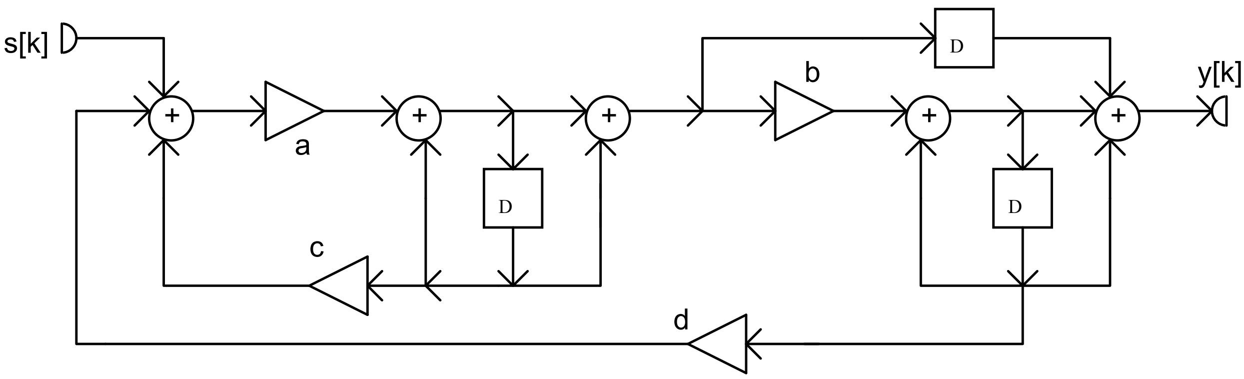
Javító : Horváth Zoltán konzultációs idõ : ábra: 17.
adatsor: 9.

Beadási határidõk: 1.rész : elfogadta :

2.rész :

3.rész :

17.



Erősítések:

a	b	c	d
0,5	0,5	0,8	0,5

2.2.:

S	ϑ_0	ρ
20	$0{,}12\pi$	$4\pi/3$

1.4.:

F	G	p
3	0,9	-14/13

2.3. s[k] értékei:

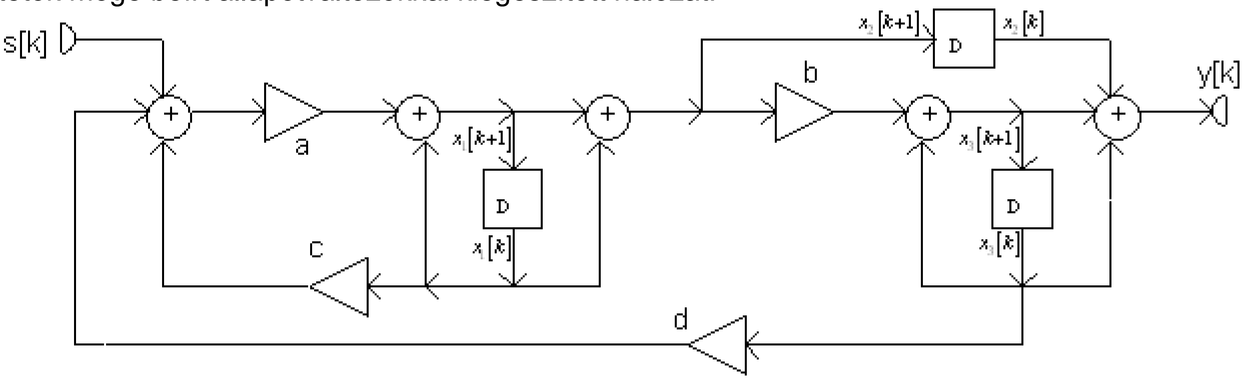
k	0	1	2	3	4	5
s[k]	0	5	0	3	2	2

Megjegyzések: *Mindenkinek le kell töltenie a feladatlapot, a megadott hálózat ábráját, és a feladatlap fejlécét ki kell tölteni. Ha javítás ill.részfeladat megoldásának külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az elõzõ részeket is és a* ***feladatlapot is (az ábrával)*** *be kell adni. Javítás esetén a hibás részt nem szabad kicserélni még akkor sem, ha valamelyik pontot elölrõl kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, hogy melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthetõ és világos külalakra és arra, hogy a teljes megoldást részletesen le kell írni, nem elegendõ csak az eredményeket közölni. A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére alkalmazhat számítógépes programokat (ANDI, DERIVE, MATLAB stb), de a megoldás elvi lépéseit akkor is részletesen le kell írni!*

Vizsgálat az idõtartományban

1.1
Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!

A késleltetők mögé beírt állapotváltozókkal kiegészített hálózat:



$$x_1[k+1] = (1+ac)x_1[k] + adx_3[k] + as[k]$$

$$x_2[k+1] = (2+ac)x_1[k] + adx_3[k] + as[k]$$

$$x_3[k+1] = b(2+ac)x_1[k] + (1+bad)x_3[k] + bas[k]$$

$$y[k] = b(2+ac)x_1[k] + x_2[k] + (2+bad)x_3[k] + bas[k]$$

a	b	c	d
0,5	0,5	0,8	0,5

Így az állapotváltozós leírás normál alakja:

$$x_1[k+1] = 1.4x_1[k] + 0.25x_3[k] + 0.5s[k]$$

$$x_2[k+1] = 2.4x_1[k] + 0.25x_3[k] + 0.5s[k]$$

$$x_3[k+1] = 1.2x_1[k] + 1.125x_3[k] + 0.25s[k]$$

$$y[k] = 1.2x_1[k] + x_2[k] + 2.125x_3[k] + 0.25s[k]$$

1.2
Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1.feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!

A stabilitás vizsgálatához felírom a rendszeregyenletet mátrixait:

Először paraméteresen:

$$A = \begin{bmatrix} 1+ac & 0 & ad \\ 2+ac & 0 & ad \\ b(2+ac) & 0 & 1+bad \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a \\ a \\ ba \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} b(2+ac) & 1 & (2+bad) \end{bmatrix}$$

$$D = [ba]$$

Majd behelyettesítve az adott szorzók értékeit:

$$A=\begin{bmatrix}1.4 & 0 & 0.25\\ 2.4 & 0 & 0.25\\ 1.2 & 0 & 1.125\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\\ 0.25\end{bmatrix}$$

$$C^T=\begin{bmatrix}1.2 & 1 & 2.125\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}0.25\end{bmatrix}$$

Ebből a sajátértékek kiszámolása:

$$\det(A-\lambda\cdot \mathrm{E})=0$$

$$\begin{vmatrix}1.4-\lambda & 0 & 0.25\\ 2.4 & -\lambda & 0.25\\ 1.2 & 0 & 1.125-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1.4-\lambda)(-1.125\lambda+\lambda^2)+0.25(1.2\lambda)=0$$

$$-\lambda^3+2.525\lambda^2-1.225\lambda=0$$

$$\lambda\left(\lambda^2-2.525\lambda+1.225\right)=0$$

Így azt kapjuk a sajátértékekre, hogy:

$\boxed{\lambda_1=0}$ $\boxed{\lambda_2=0.6551}$ $\boxed{\lambda_3=1.8699}$

Látszik, hogy λ_3 abszolút értéke nagyobb 1-nél, így a rendszer nem lehet asszimptótikusan stabilis. Hogy mi mégis stabilissá tegyük, meg kell változtatni valamelyik szorzó(k) értékét.

Én a következőképp választom meg a szorzóim értékét:

a	b	c	d
-1	-0.1	0,5	-0,5

Így a hálózat stabilis jelleget mutat, teljesül a Jury kritérium is , az új mátrixok
(1.1 feladat megoldása újra):

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.5\\ 1.5 & 0 & 0.5\\ -0.15 & 0 & 0.95\end{bmatrix}} \qquad \boxed{B=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0.1\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{C^T=\begin{bmatrix}-0.15 & 1 & 1.95\end{bmatrix}} \qquad \boxed{D=\begin{bmatrix}0.1\end{bmatrix}}$$

Ebből a sajátértékek kiszámolása: $\det(A-\lambda\cdot \mathrm{E})=0$

$$\begin{vmatrix}0.5-\lambda & 0 & 0.5\\ 1.5 & -\lambda & 0.5\\ -0.15 & 0 & 0.95-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(0.5-\lambda)\left(-\lambda(0.95-\lambda)\right)-0.5\cdot 0.15\lambda=0$$

$$(0.5-\lambda)\left(\lambda^2-0.95\lambda\right)-0.075\lambda=0$$

$$0.5\lambda^2 - \lambda^3 - 0.475\lambda + 0.95\lambda^2 - 0.075\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - 1.45\lambda + 0.55\right) = 0$$

$$-\lambda^3 + 1.45\lambda^2 - 0.55\lambda = 0$$

Így azt kapjuk a javított rendszer sajátértékeire, hogy:

$\boxed{\lambda_1 = 0}$ $\boxed{\lambda_2 = 0.725 - 0.1561j}$ $\boxed{\lambda_3 = 0.725 + 0.1561j}$

Exponenciális alakban:

$\boxed{\lambda_1 = 0}$ $\boxed{\lambda_2 = 0.7416 \cdot e^{-j0.2121}}$ $\boxed{\lambda_3 = 0.7416 \cdot e^{j0.2121}}$

Látszik, hogy az eredmények az egysékörön belül esnek, így a rendszer aszimptotikusan stabilis.

1.3

Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a k = 0, 1, 2,...10.ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!

a, Az impulzusválasz numerikus alakban:

$$x_1[k+1] = 0.5x_1[k] + 0.5x_3[k] - s[k]$$

$$x_3[k+1] = -0.15x_1[k] + 0.95x_3[k] + 0.1s[k]$$

$$x_2[k+1] = 1.5x_1[k] + 0.5x_3[k] - s[k]$$

$$y[k] = -0.15x_1[k] + x_2[k] + 1.95x_3[k] + 0.1s[k]$$

Azaz a következő táblázat írható fel a ”lépésről-lépésre” módszer segítségével:

k	$\delta[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	$w[k]$
0	1	0	0	0	0.1
1	0	-1	-1	0.1	-0.655
2	0	-0.45	-1.45	0.245	-0.9047
3	0	-0.1025	-0.5525	0.3003	0.0485
4	0	0.0989	-0.0036	0.3006	0.5677
5	0	0.1997	0.2986	0.2708	0.7967
6	0	0.2352	0.4350	0.2273	0.8430
7	0	0.2313	0.4665	0.1806	0.7840
8	0	0.2059	0.4372	0.1369	0.6733
9	0	0.1714	0.3773	0.0992	0.5450
10	0	0.1353	0.3067	0.0685	0.4200

b, Az impulzusválasz analitikus alakban:

$$w[k] = \sum_{i=1}^{3} c_i \lambda_i^k \text{ ; ha } k \geq 2$$

Mivel példánkban $\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad w[k] = c_2\lambda_2^k + c_3\lambda_3^k$

Ezt így is írhatjuk úgy is, hogy: $w[k]=E(k-2)\left(c_2\lambda_2^{k-2}+c_3\lambda_3^{k-2}\right)$

Így felírható ez a kétismeretlenből álló egyenletrendszer:

$k=2 \qquad -0.9048=c_2+c_3$

$k=3 \qquad 0.0485=0.7416\cdot \mathrm{e}^{-j0.2121}\cdot c_2+0.7416\cdot \mathrm{e}^{j0.2121}\cdot c_3$

(c_1 azért hagyható el, mivel az impulzusválasz felírásánál a $\lambda_1=0$ miatt úgyis kiesne)
A kétismeretlenes egyenletrendszerünk, a Derive segítségével könnyen rendezni lehet:

c_2 = -0.4524 + 2.2562j $\qquad$ c_3 = -0.4524 - 2.2562j

Exponenciális alakban:

$c_2=2.3011\cdot e^{j\ 1.7687}$ $\qquad$ $c_3=2.3011\cdot e^{-j\ 1.7687}$

Ezeket az eredményeket visszaírva kapjuk az impulzusválaszra, hogy:

$$w[k]=E(k-2)\left(2.3011\cdot e^{j\ 1.7687}\left(0.7416\cdot \mathrm{e}^{-j0.2121}\right)^{k-2}+2.3011\cdot e^{-j\ 1.7687}\left(0.7416\cdot \mathrm{e}^{j0.2121}\right)^{k-2}\right)$$

$$w[k]=E(k-2)\left(2.3011\cdot 0.7416^{k-2}\cdot\left(\mathrm{e}^{-j0.2121(k-2)+j\ 1.7687}+\cdot\mathrm{e}^{j0.2121(k-2)-j\ 1.7687}\right)\right)$$

$$w[k]=E(k-2)\left(2.3011\cdot 0.7416^{k-2}\cdot\left(\mathrm{e}^{-j(0.2121k-2.1929)}+\cdot\mathrm{e}^{j(0.2121k-2.1929)}\right)\right)$$

Az Euler-formula segítségével az impulzusválasz felírható trigonometrikus alakban, imarginárius tagok nélkül a következőképpen:

$$w[k]=E(k-2)\left(4.6022\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos\left(0.2121k-2.1929\right)\right)$$

$$w[k]=E(k-2)\left(4.6022\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos\left(0.2121(k-2)-1.7687\right)\right) \text{ (ha k>2)}$$

Az impulzusválasz formulájának érvényességét kiterjesszük k=1-re és k=0-ra, ahol az nem ad helyes értékeket. Ezért most ”kijavítjuk” a függvényt: hozzáadunk egy k=0 és egy k=1 beli Dirac-deltát a helyes érték beállítására. A ”lépésről-lépésre” módszerrel való megoldásánál megkaptuk, hogy k=0-ban $w[k]=0.1$ illetve k=1-ben $w[k]=-0.655$.

A MATLAB-ba beírva viszont látható, hogy a fenti képlet k ezen értékeire mást ad:

```
w =

  Columns 1 through 7

   -4.8765   -2.4737   -0.9049    0.0485    0.5679    0.7968    0.8430
```

Columns 8 through 12

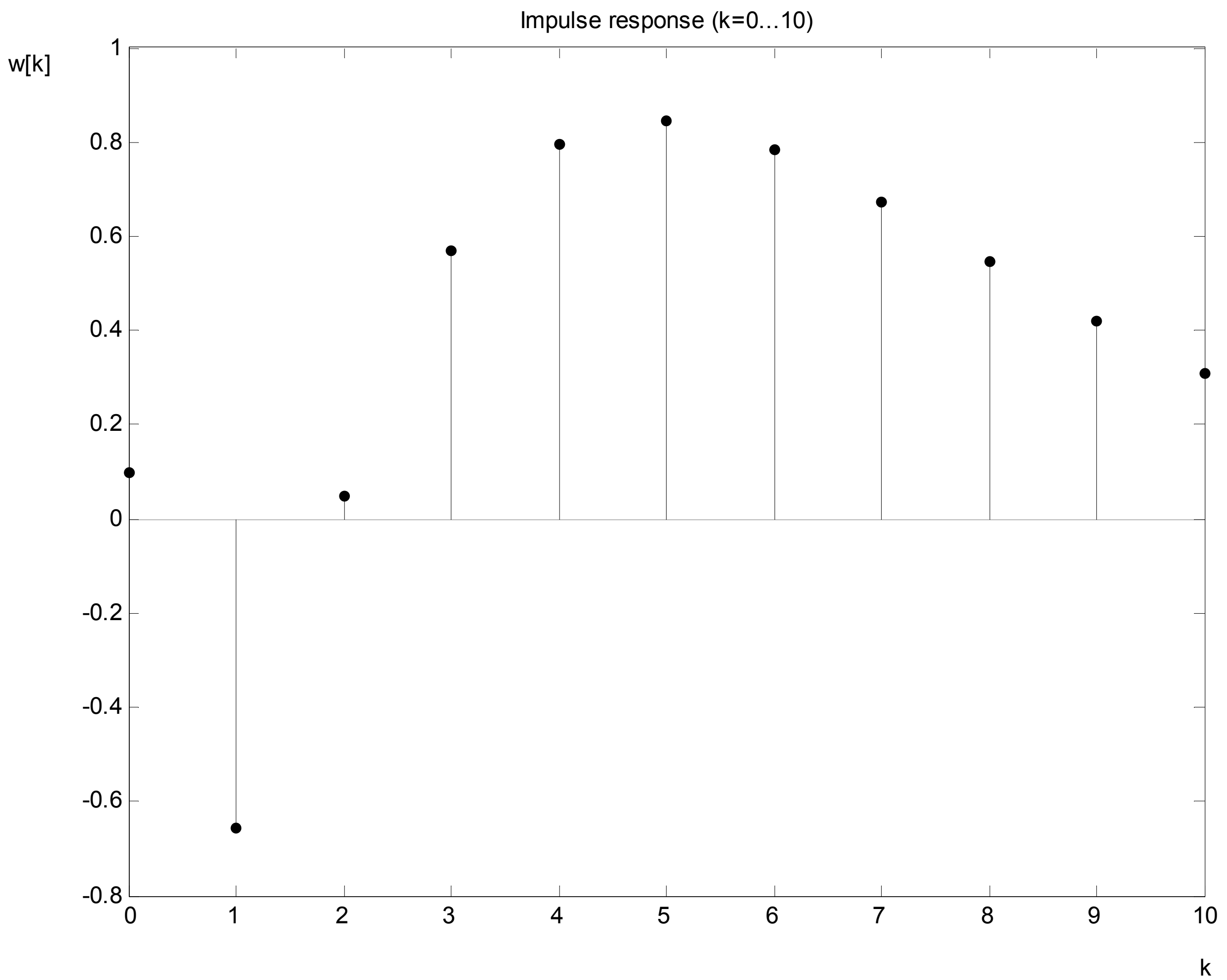
0.7841 0.6733 0.5450 0.4200 0.3092

Így az impulzusválaszra adódó képletünk így a következőképpen módosul:

$$\boxed{w[k]=0.1\cdot\delta[k]-0.655\cdot\delta[k-1]+E(k-2)\left(4.6022\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos\left(0.2121(k-2)-1.7687\right)\right)}$$

(természetesen az értékek mind radiánban értendők)

Ábrázolva:



1.4
A hálózat gerjesztése : s[k] = ε[k](F + Gp^k). Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a k = 0, 1,...5 értékekre!

F	G	p
3	0,9	-14/13

Az adott táblázat alapján felírható a gerjesztés:

$$s[k] = E[k]\left(F + Gp^k\right) = E[k]\left(3 + 0.9\cdot\left(\frac{-14}{13}\right)^k\right)$$

A hálózat válaszát a gerjesztés és az impulzusválasz konvolúciója adja, ami diszkrét esetben a következő összegzéssel számítható:

$$y[k] = s[k] * w[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]w[k-n];$$

A gerjesztés belépő ezért az összegzés határai leszűkíthetők:

$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} s[n]w[k-n];$$

Az impulzusválasz értékei adottak az előző feladatból, a gerjesztés értékeit pedig MATLAB-bal egyszerűen számítható adott k értékeire:

```
>> s=3+0.9*(((-14)/13).^k)

s =

   3.9000    2.0308    4.0438    1.8759    4.2105    1.6963
```

k	$s[k]$	$w[k]$
0	3.9000	0.1
1	2.0308	-0.655
2	4.0438	-0.9048
3	1.8759	0.0485
4	4.2105	0.5677
5	1.6963	0.7967

Ezeket az értékeket visszahelyettesítve a konvolúciós képletbe:

$$y[0] = s[0]\cdot w[0]$$

$$\boxed{y[0]} = 3.9000\cdot 0.1 = \boxed{0.3900}$$

$$y[1] = s[0]\cdot w[1] + s[1]\cdot w[0]$$

$$\boxed{y[1]} = 3.9000\cdot(-0.655) + 2.0308\cdot 0.1 = \boxed{-2.3514}$$

$$y[2] = s[0]\cdot w[2] + s[1]\cdot w[1] + s[2]\cdot w[0]$$

$$\boxed{y[2]} = 3.9000\cdot(-0.9048) + 2.0308\cdot(-0.655) + 4.0438\cdot 0.1 = \boxed{-4.4545}$$

$$y[3] = s[0]\cdot w[3] + s[1]\cdot w[2] + s[2]\cdot w[1] + s[3]\cdot w[0]$$

$$\boxed{y[3]} = 3.9000\cdot 0.0485 + 2.0308\cdot(-0.9048) + 4.0438\cdot(-0.655) + 1.8759\cdot 0.1 = \boxed{-4.1094}$$

$$y[4] = s[0]\cdot w[4] + s[1]\cdot w[3] + s[2]\cdot w[2] + s[3]\cdot w[1] + s[4]\cdot w[0]$$

$$\boxed{y[4]} = 3.9000\cdot 0.5677 + 2.0308\cdot 0.0485 + 4.0438\cdot(-0.9048)$$

$$+1.8759\cdot(-0.655)+4.2105\cdot 0.1=\boxed{-2.1540}$$

$$y[5]=s[0]\cdot w[5]+s[1]\cdot w[4]+s[2]\cdot w[3]+s[3]\cdot w[2]+s[4]\cdot w[1]+s[5]\cdot w[0]$$

$$\boxed{y[5]}=3.9000\cdot 0.7967+2.0308\cdot 0.5677+4.0438\cdot 0.0485+$$

$$1.8759\cdot(-0.9048)+4.2105\cdot(-0.655)+1.6963\cdot 0.1=\boxed{0.1706}$$

Így megkapjuk a választ az impulzusválasz és a gerjesztés ismeretében k = 0, 1,...5 értékekre:

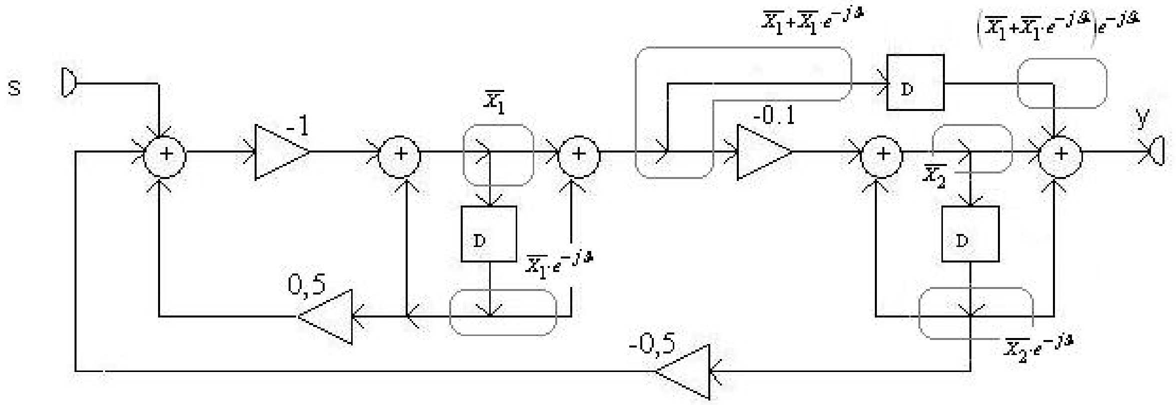
k	$y[k]$
0	0.3900
1	-2.3514
2	-4.4545
3	-4.1094
4	-2.1540
5	0.1705

1.5
(Nem kötelezõ). Ellenõrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

2. Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1
Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a (-2π,+2π) tartományon!

Az állípotváltozós normálalaknak kapott egyenltek kis módosításával felírható 4 újabb egyenlet, ami már a frekvenciatartományra vonatkozik. Ahol $e^{-j\vartheta}$ egyszeres késleltetést jelent, így ennek ismeretébe írom át a fent kapott egyenleteket, ahol 4 ismeretlen szerepel: X_1, X_3, X_2, $\frac{Y}{S}$



A hálózatról leolvasható három frekvenciatartománybeli egyenlet, ami alapján már kiszámolható az átviteli karakterisztika:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{X_1}=0.5\overline{X_1}e^{-j\vartheta}+0.5\overline{X_2}e^{-j\vartheta}-\overline{S}\\&\overline{X_2}=\overline{X_2}e^{-j\vartheta}-0.1\left(\overline{X_1}+\overline{X_1}e^{-j\vartheta}\right)\\&\overline{Y}=\left(\overline{X_1}+\overline{X_1}\cdot e^{-j\vartheta}\right)e^{-j\vartheta}+\overline{X_2}+\overline{X_2}\cdot e^{-j\vartheta}\end{aligned}\right\}$$

Amiket kicsit egyszerűbb alakra hozva:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{X_1}=\frac{0.5e^{-j\vartheta}}{\left(1-0.5e^{-j\vartheta}\right)}\overline{X_2}-\frac{1}{\left(1-0.5e^{-j\vartheta}\right)}\overline{S}\\&\overline{X_2}=\frac{\left(0.1+0.1e^{-j\vartheta}\right)}{\left(e^{-j\vartheta}-1\right)}\overline{X_1}\\&\overline{Y}=\left(e^{-j\vartheta}+\cdot e^{-2j\vartheta}\right)\overline{X_1}+\left(1+\cdot e^{-j\vartheta}\right)\overline{X_2}\end{aligned}\right\}$$

$\overline{X_2}$ -t behelyettesítve az első egyenletbe, megkapjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{X_1}=\frac{\left(e^{-j\vartheta}-1\right)}{0.5e^{-j\vartheta}\left(0.1+0.1e^{-j\vartheta}\right)-\left(1-0.5e^{-j\vartheta}\right)\left(e^{-j\vartheta}-1\right)}\overline{S}\\&\overline{Y}=\left(\frac{\left(1+e^{-j\vartheta}\right)\left(e^{-j\vartheta}\left(e^{-j\vartheta}-1\right)+0.1\left(1+e^{-j\vartheta}\right)\right)}{\left(e^{-j\vartheta}-1\right)}\right)\overline{X_1}\end{aligned}\right\}$$

$\overline{X_1}$ -t egyszerűbb alakra hozva:

$$\overline{X_1}=\frac{\left(e^{-j\vartheta}-1\right)}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}\overline{S}$$

Majd behelyettesítve a válasz képletébe:

$$\overline{Y}=\left(\frac{\left(1+e^{-j\vartheta}\right)\left(0.1-0.9e^{-j\vartheta}+e^{-2j\vartheta}\right)}{\left(-1+e^{-j\vartheta}\right)}\right)\frac{\left(e^{-j\vartheta}-1\right)}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}\overline{S}$$

$$\overline{Y}=\frac{\left(1+e^{-j\vartheta}\right)\left(0.1-0.9e^{-j\vartheta}+e^{-2j\vartheta}\right)}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}\overline{S}$$

$$\overline{Y}=\frac{0.1-0.9e^{-j\vartheta}+e^{-2j\vartheta}+0.1e^{-j\vartheta}-0.9e^{-2j\vartheta}+e^{-3j\vartheta}}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}\overline{S}$$

$$\overline{Y}=\frac{0.1-0.8e^{-j\vartheta}+0.1e^{-2j\vartheta}+e^{-3j\vartheta}}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}\overline{S}$$

Amiből $\overline{S}$ -el leosztva kapjuk az átviteli karakterisztikát:

$$\boxed{W(e^{j\vartheta})=\frac{\overline{Y}}{\overline{S}}=\frac{0.1-0.8e^{-j\vartheta}+0.1e^{-2j\vartheta}+e^{-3j\vartheta}}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}}$$

<u>MATLAB-bal ellenőrizve:</u>

```
A=[0.5, 0, 0.5; 1.5, 0, 0.5; -0.15, 0, 0.95 ];
B=[-1;-1;0.1];
C=[-0.15, 1, 1.95];
D = 0.1;
Ts = -1;                    % idővektor nem meghatározott
Hs=ss(A,B,C,D, Ts);
Hz = tf(Hs)
%amire a válasz:

Transfer function:

0.1 z^3 - 0.8 z^2 + 0.1 z + 1
-----------------------------
  z^3 - 1.45 z^2 + 0.55 z

Sampling time: unspecified
```

Mivel a rendszer stabil, az átviteli függvényből (fent Hz) egyszerű z $=e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel kapjuk az átviteli karakterisztikát, amit fent már „kézzel-ceruzával" kiszámítottunk.

Az amplitúdókarakterisztikát, az átviteli karakterisztika aboszolútértékeként számítjuk:

$$K(\vartheta)=\left|W\left(e^{j\vartheta}\right)\right|;$$

Enneka megadásához kicsit át kell alakítani az átviteli karakterisztikát:

$$W(e^{j\vartheta})=\frac{\overline{Y}}{\overline{S}}=\frac{0.1e^{3j\vartheta}-0.8e^{2j\vartheta}+0.1e^{j\vartheta}+1}{e^{3j\vartheta}-1.45e^{2j\vartheta}+0.55e^{j\vartheta}}=\frac{0.1\cos 3\vartheta-0.1j\sin 3\vartheta-0.8\cos 2\vartheta+0.8j\sin 2\vartheta+0.1\cos\vartheta-0.1j\sin\vartheta+}{\cos 3\vartheta-j\sin 3\vartheta-1.45\cos 2\vartheta+1.45j\sin 2\vartheta+0.55\cos\vartheta-0.55j\sin\vartheta}$$

Különválasztva a képzetes és a valós részt:

$$W(e^{j\vartheta})=\frac{\left(0.1\cos 3\vartheta-0.8\cos 2\vartheta+0.1\cos\vartheta+1\right)-j\left(0.1\sin 3\vartheta-0.8\sin 2\vartheta+0.1\sin\vartheta\right)}{\left(\cos 3\vartheta-1.45\cos 2\vartheta+0.55\cos\vartheta\right)-j\left(\sin 3\vartheta-1.45\sin 2\vartheta+0.55\sin\vartheta\right)}$$

Ezzel az alakkal már könnyen elvégezhető az abszolútérték művelet:

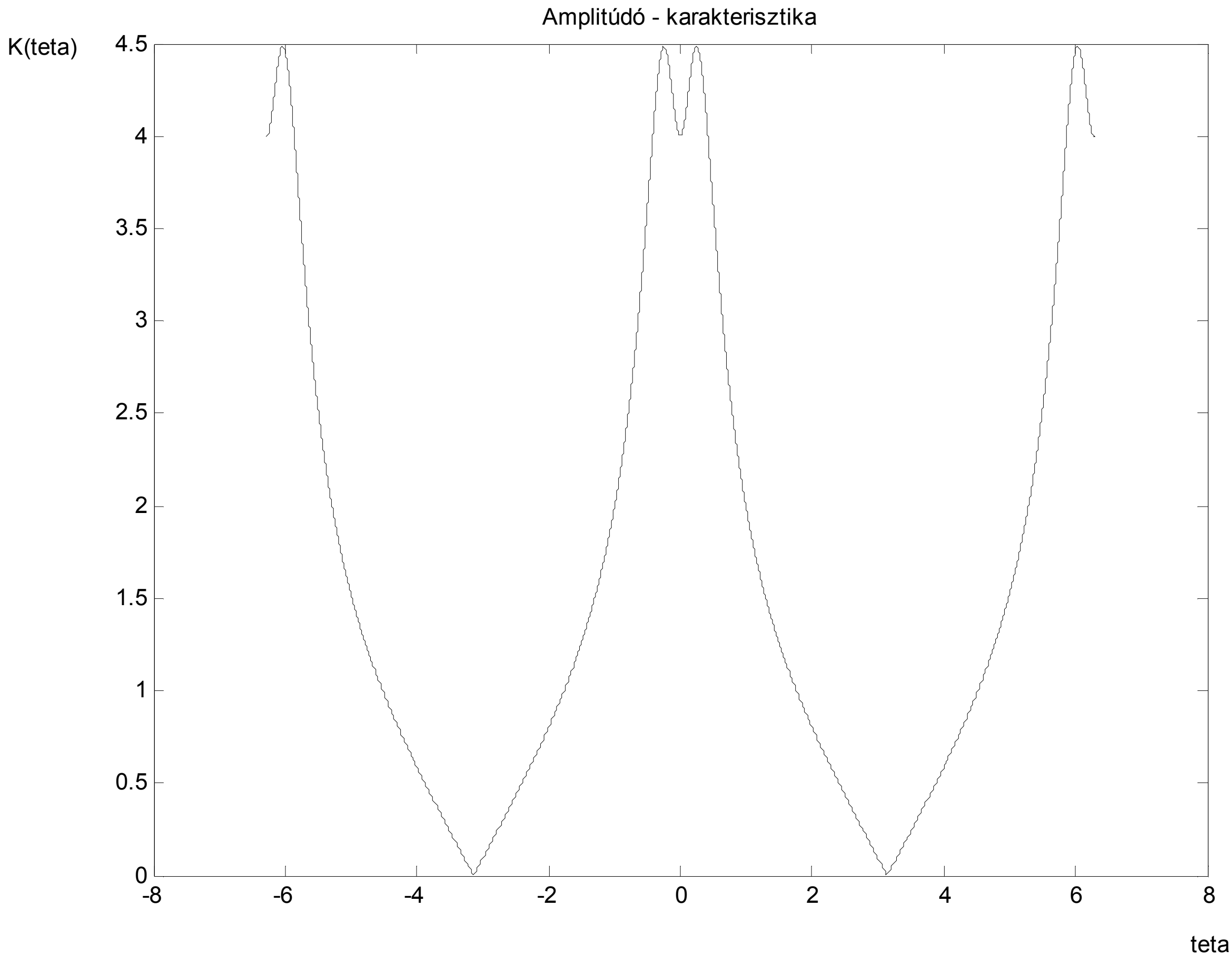
$$K\left(\vartheta\right)=\left|W\left(e^{j\vartheta}\right)\right|=W(e^{j\vartheta})=\sqrt{\frac{\left(0.1\cos 3\vartheta-0.8\cos 2\vartheta+0.1\cos\vartheta+1\right)^2+\left(0.1\sin 3\vartheta-0.8\sin 2\vartheta+0.1\sin\vartheta\right)^2}{\left(\cos 3\vartheta-1.45\cos 2\vartheta+0.55\cos\vartheta\right)^2+\left(\sin 3\vartheta-1.45\sin 2\vartheta+0.55\sin\vartheta\right)^2}}$$

Az amplitúdókarakterisztika ábrázolásához, szintén a MATLAB-ot használom, a következő parancssorral kirajzoltatom a fv-t:

```
mintavetel = 10000;
felbontas = 1/mintavetel;
teta = -2*pi:felbontas:2*pi;
Kteta = zeros(1, length(teta));

for i=1:length(teta)
   Kteta(1,i)=abs( ( 0.1*exp(3*j*teta(i))- 0.8*exp(2*j*teta(i))+0.1*exp(j*teta(i))+1)/(exp(3*j*teta(i))-
1.45*exp(2*j*teta(i))+0.55*exp(j*teta(i))));
end;
plot(teta, Kteta);
```

Ami krajzolja, hogy:



2.2

Az s[k] = Scos(ϑ_0k + ρ) gerjesztõjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevõjének idõfüggvényét! Ábrázolja az s[k] és az y_g[k] jeleket a k = 0, 1, 2,...10 értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az y_g[k] jelnek legyen fizikai tartalma?

S	ϑ_0	ρ
20	0,12π	4π/3

A paramétereket behelyettesítve: $s[k]=20\cos\left(0.12\pi\cdot k+\frac{4\pi}{3}\right)$

Ebből látszik a gerjesztés komplex amplitudója: $\overline{S}=20\cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$

Tudjuk, hogy: $\overline{Y}=\overline{H}\cdot\overline{S}$

$$W(e^{j\vartheta})=\frac{\overline{Y}}{\overline{S}}=\frac{1.1e^{-3j\cdot 0,12\pi}-2.25e^{-2j\cdot 0,12\pi}-0.1e^{-j\cdot 0,12\pi}+1}{e^{-3j\cdot 0,12\pi}-1.45e^{-2j\cdot 0,12\pi}+0.4e^{-j\cdot 0,12\pi}}$$

Amit leegyszerüsítve:

$W(e^{j\vartheta}) = 0.4812 - 2.3537 \cdot j = 2.4024 \cdot e^{-1.3691j}$

Azaz:

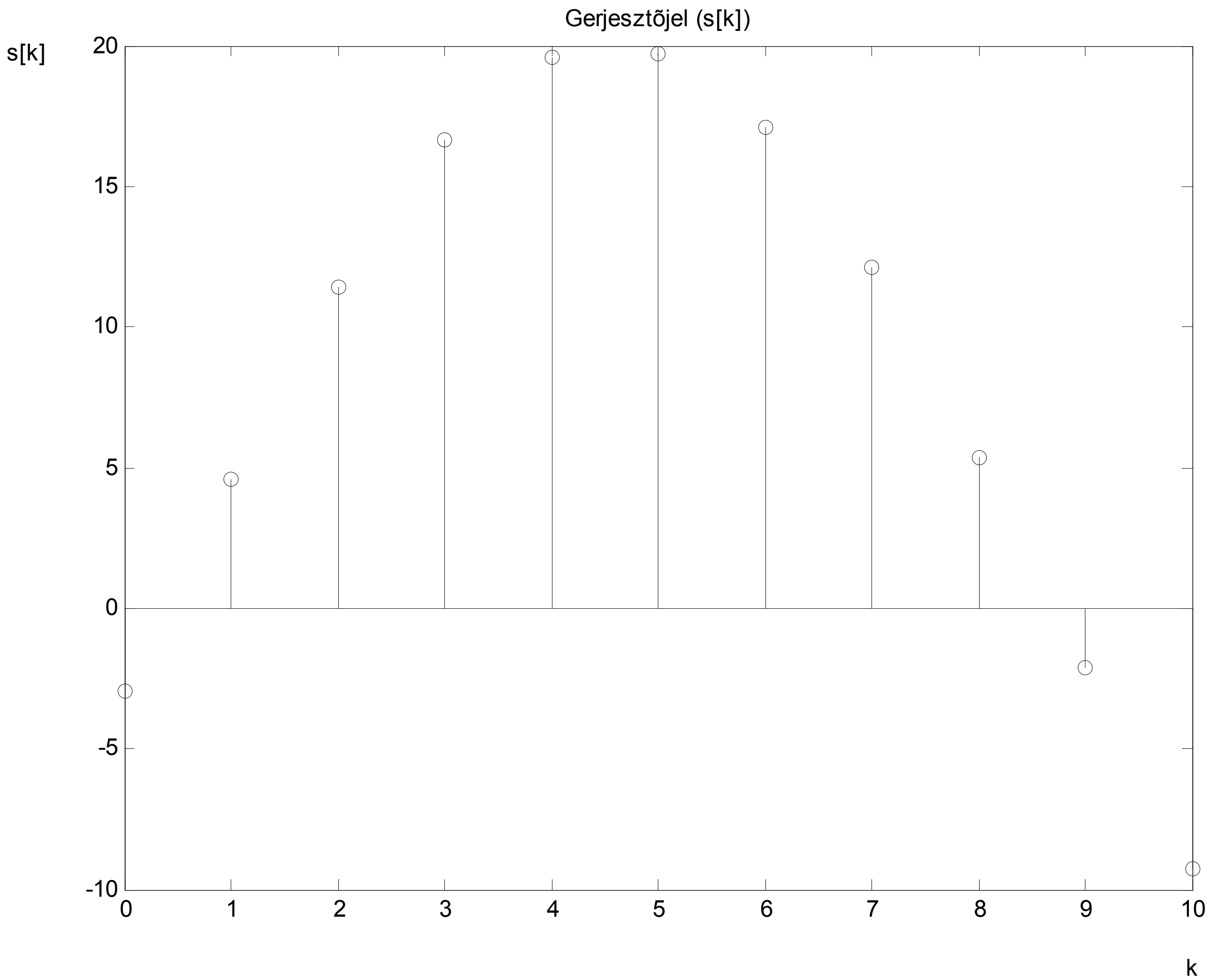
$$\overline{Y} = 2.4024 \cdot e^{-1.3691j} \cdot 20 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} = 48.048 \cdot e^{j \cdot 2.8197}$$

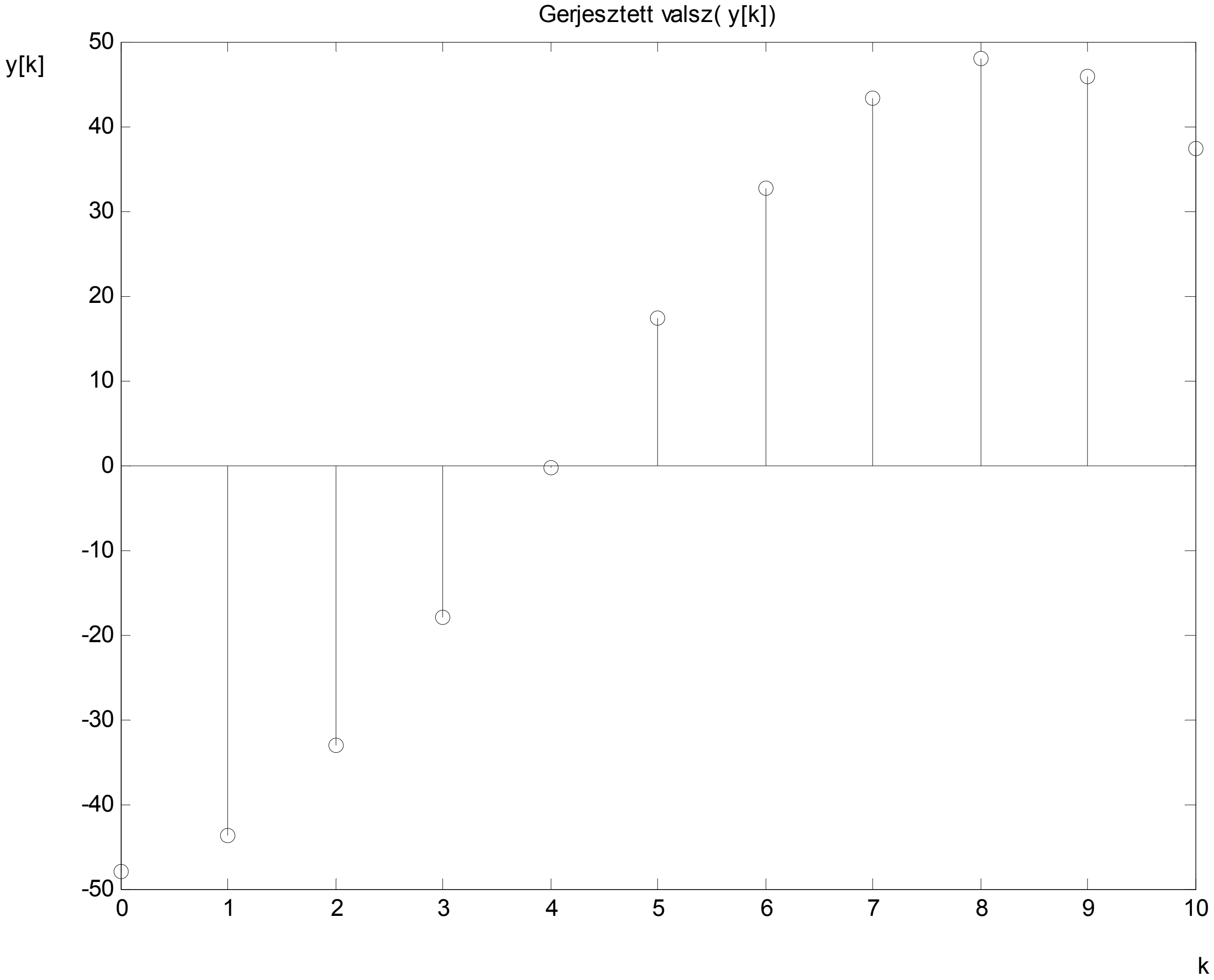
Ebből pedig megkapjuk a gerjesztett összetevőt:

$$\boxed{y[k] = 48.048 \cos(0.12\pi \cdot k + 2.8197)}$$

A válasz fizikai tartalma a rendszer gerjesztés-válasz stabilitásától függ, jelen esetben a rendszer GV stabilis, így ez a feltétel teljesül.

Ábrázolás a MATLAB-bal:





<u>2.3</u>

<u>Egy 6 periódusú s[k] gerjesztõjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztõjel Fourier sorának valós és komplex alakját, és ellenõrizze, hogy a Fourier sorral számított értékek valóban az adott s[k] értékeket szolgáltatják!</u>

A megadott gerjesztés egy periódusa (K=0...5 -> K=6):

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	0	5	0	3	2	2

A Fourier-sor komplex alakja: $$s[k]=\sum_{p=0}^{K-1} F_p e^{-j\cdot p\cdot k\cdot \vartheta}$$

ahol S_i értékeit a következő képlet adja meg: $$\overline{F_p}=\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} s[k]e^{-j\cdot p\cdot k\cdot \vartheta}$$

ahol, $$\boxed{\vartheta}=\frac{2\pi}{K}=\frac{2\pi}{6}=\boxed{\frac{\pi}{3}}$$

A képletbe behelyettesítve:

$$\boxed{\overline{F_0}} = \frac{1}{6}(0+5+0+3+2+2) = \boxed{2}$$

$$\boxed{\overline{F_1}} = \frac{1}{6}\left(0+5\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}+0\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}+3\cdot e^{-j\pi}+2\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}+2\cdot e^{-j\frac{5\pi}{3}}\right) = \boxed{-0.0833 - 0.1443j}$$

$$\boxed{\overline{F_2}} = \frac{1}{6}\left(0+5\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}+0\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}+3\cdot e^{-j2\pi}+2\cdot e^{-j\frac{8\pi}{3}}+2\cdot e^{-j\frac{10\pi}{3}}\right) = \boxed{-0.2500 - 0.7217j}$$

$$\boxed{\overline{F_3}} = \frac{1}{6}\left(0+5\cdot e^{-j\frac{3\pi}{3}}+0\cdot e^{-j\frac{6\pi}{3}}+3\cdot e^{-j3\pi}+2\cdot e^{-j\frac{12\pi}{3}}+2\cdot e^{-j\frac{15\pi}{3}}\right) = \boxed{-1.3333}$$

Továbbá:

$$\boxed{\overline{F_4}} = \overline{F_2}^* = \boxed{-0.2500 + 0.7217j} \qquad \boxed{\overline{F_5}} = \overline{F_1}^* = \boxed{-0.0833+0.1443j}$$

A MATLAB-bal könnyen ellenőrizhetőek az adott k-hoz tartozó $\overline{F_p}$ komplex Fourier együtthatók értékei a következő két soros utasítással:

```
s = [0 5 0 3 2 2];
Fp = fft(s)/6;
```

Amiből kapjuk a következő táblázatot:

k	$\overline{F_p}$	$\overline{F_p}$ (exp. alak)
0	2.0000	2.0000
1	-0.0833 + 0.1443i	$0.1666 \cdot e^{j2.0943}$
2	-0.2500 + 0.7217i	$0.7638 \cdot e^{j1.9043}$
3	-1.3333	-1.3333
4	-0.2500 - 0.7217i	$0.7638 \cdot e^{-j1.9043}$
5	-0.0833 - 0.1443i	$0.1666 \cdot e^{-j2.0943}$

Így meg kapom a gerjesztés Fourier sorának komplex alakjára, hogy:

$$s[k] = \sum_{i=0}^{L-1} S_i e^{-j\cdot i\cdot k\cdot \vartheta}$$

$$s[k] = 2 + (-0.0833 + 0.1443j)e^{-j\cdot k\cdot\frac{\pi}{3}} + (-0.2500 + 0.7217j)e^{-j\cdot k\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}}$$

$$+(-1.3333)e^{-j\cdot k\cdot\pi} + (-0.2500 - 0.7217j)e^{-j\cdot k\cdot 4\cdot\frac{\pi}{3}} + (-0.0833 - 0.1443j)e^{-j\cdot k\cdot 5\cdot\frac{\pi}{3}}$$

$$s[k]=2+0.1666\cdot e^{-j\cdot\left(k\cdot\frac{\pi}{3}-2.0943\right)}+0.7638\cdot e^{-j\cdot\left(k\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}-1.9043\right)}$$
$$-1.3333e^{-j\cdot k\cdot\pi}+0.7638e^{-j\cdot\left(k\cdot 4\cdot\frac{\pi}{3}+1.9043\right)}+0.1666e^{-j\cdot\left(k\cdot 5\cdot\frac{\pi}{3}+2.0943\right)}$$

Az $i=0$ és a $i=\frac{L}{2}$ sorszámú Fourier együtthatók értékei szükségszerűen valósnak adódtak. A valós Fourier-sor F_i^A és F_i^B értékeit a következő képen határozzuk meg a komplex együtthatókból:

$$F_0^A=F_0,\qquad F_0^B=0$$
$$\left.\begin{array}{l}F_i^A=2\Re F_i\\ F_i^B=-2\Im F_i\end{array}\right\}0\le i<\frac{L}{2}$$
$$F_{L/2}^A=F_{L/2},\quad F_{L/2}^B=0$$

A gerjesztés Fourier-sorának valós alakja:

$$s[k]=S_0+\sum_{i=0}^{L/2}\left(S_i^A\cos(i\cdot k\cdot\vartheta)+S_i^B\sin(i\cdot k\cdot\vartheta)\right)$$

Így a megadott gerjesztésre a következő valós S_i^A és S_i^B Fourier-együtthatókat kapjuk:

k	S_i^A	S_i^B
0	2.0000	0
1	-0.1666	0.2886
2	-0.5000	1.4434
3	-1.3333	0

Így kapjuk a gerjesztésre, hogy:

$$s[k]=2-0.1666\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot k\right)+0.2886\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot k\right)$$
$$-0.5000\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot k\right)+1.4434\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot k\right)-1.3333\cos(\pi\cdot k)$$

<u>Ellenőrzés:</u>

A valós és komplex inverz Fourier-transzformációk képleteibe behelyettesítve, könnyen leellenőrizhető, hogy valóban visszakapjuk a gerjesztésre megadott s[k] értékeket,

De a MATLAB is visszaadja közelítőleg az adott értékeket:

s=ones(1,6);

```
for i=1:6   %feltöltjük egy periódusnyi elemmel
    s(i)=2-0.1666*cos(pi*i/3)+0.2886*sin(pi*i/3)-0.5*cos(2*pi*i/3)+1.4434*sin(2*pi*i/3)-1.3333*cos(pi*i);
end;
stem(s);
s
%ábrázolunk egy periódust 1-6 ig, ahol a 6-nál lévő érték értelemszerűen
%megegyezik a 0-nál lévő értékkel, mivel egy egész periódust nézünk, csak 1-el elcsúsztatva.

s =

    5.0000   -0.0001    2.9999    2.0001    2.0000    0.0001

>>
```

Komplex alakra:

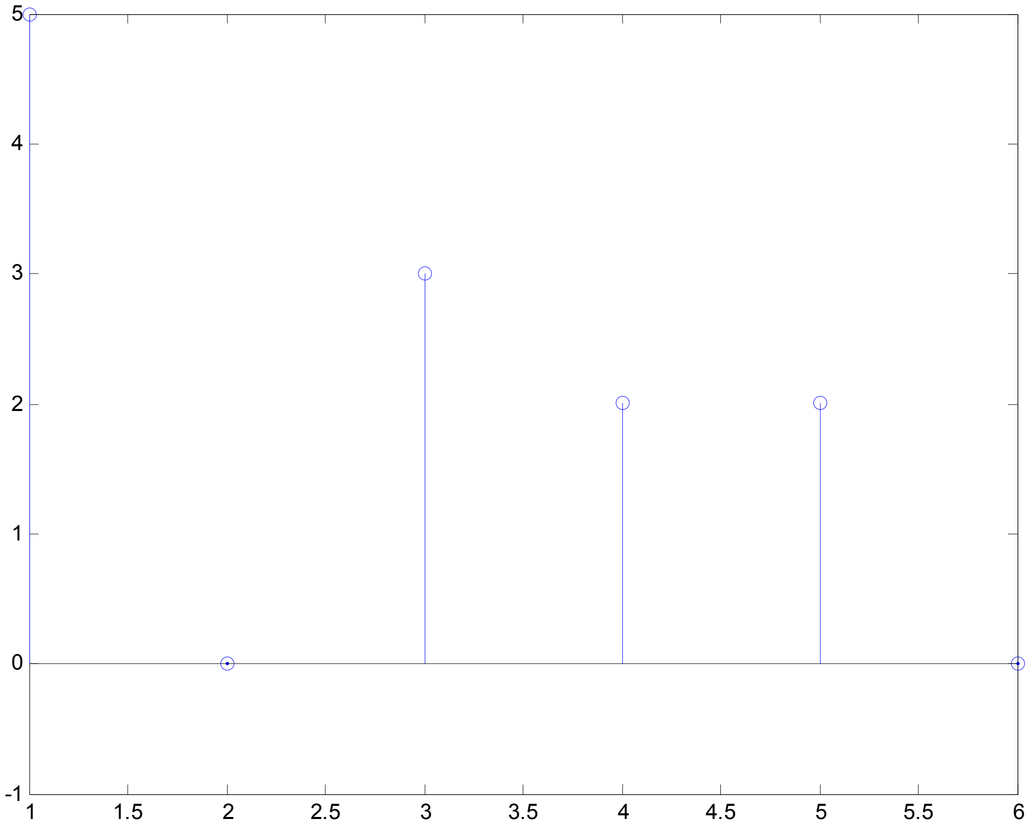
```
>> s=2+0.1666*exp(i*2.0943)*exp(-i*k*pi/3)+0.7638*exp(i*1.9043)*exp(-i*k*pi*2/3)+(-1.3333)*exp(-
i*k*pi)+0.7638*exp(-i*1.9043)*exp(-i*k*pi*4/3)+0.1666*exp(-i*2.0943)*exp(-i*k*pi*5/3)

s =

   0.0001 + 0.0000i   5.0000 + 0.0000i  -0.0001 - 0.0000i   2.9998 + 0.0000i   2.0002 + 0.0000i   2.0001 +
0.0000i

>>
```

Ha ábrázoljuk akkor is látszik:



2.4
Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!

Az azonos körfrekvenciájú tagok összevonása után(addíciós tétel):

$$s[k] = 2 + 0.3332\cos\left(-1.0473+\frac{\pi}{3}\cdot k\right)+1.5275\cos\left(-1.2373+2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot k\right)-1.3333\cos(\pi\cdot k)$$

A szögeket °-ban írva:

$$s[k] = 2 + 0.3332\cos\left(-60.0034^\circ+\frac{\pi}{3}\cdot k\right)+1.5275\cos\left(-70.8937^\circ+2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot k\right)-1.3333\cos(\pi\cdot k)$$

A hálózat linearitása miatt a választ a gerjesztés különböző körfrekvenciájú komponenseire adott válaszok szuperpozíciójaként kapjuk meg.
A következő táblázat a hálózat átviteli karakterisztikájának értékeit tartalmazza, azokon a frekvenciákon, amelyeket a gerjesztés is tartalmaz:

k	$k\cdot\vartheta$	$W(e^{-jk\vartheta})$ (radián)	$W(e^{-jk\vartheta})$ (fok)
0	0	4	4
1	$\frac{\pi}{3}$	$1.8987\cdot e^{j\cdot 0.1015}$	$1.8987\cdot e^{j\cdot 5.8155^\circ}$
2	$\frac{2\pi}{3}$	$0.7288\cdot e^{j\cdot -2.4750}$	$0.7288\cdot e^{j\cdot -141.8071^\circ}$
3	π	0	0

$$\boxed{W(e^{kj\vartheta})\Big|_{k=0}} = \frac{0.1-0.8+0.1+1}{1-1.45+0.55} = \boxed{4}$$

$$\boxed{W(e^{kj\vartheta})\Big|_{k=1}} = \frac{0.1e^{-j\frac{\pi}{3}}-0.8e^{-2j\frac{\pi}{3}}+0.1e^{-3j\frac{\pi}{3}}+e^{-4j\frac{\pi}{3}}}{1-1.45e^{-j\frac{\pi}{3}}+0.55e^{-2j\frac{\pi}{3}}} = \boxed{1.888\dot{8}+0.1925j} = \boxed{1.8987\cdot e^{j\cdot 0.1015}}$$

$$\boxed{W(e^{kj\vartheta})\Big|_{k=2}} = \frac{0.1e^{-j\frac{2\pi}{3}}-0.8e^{-2j\frac{2\pi}{3}}+0.1e^{-3j\frac{2\pi}{3}}+e^{-4j\frac{2\pi}{3}}}{1-1.45e^{-j\frac{2\pi}{3}}+0.55e^{-2j\frac{2\pi}{3}}} = \boxed{-0.5728-0.4506j} = \boxed{0.7288\cdot e^{j\cdot -2.4750}}$$

$$\boxed{W(e^{kj\vartheta})\Big|_{k=3}} = \frac{0.1e^{-j\pi}-0.8e^{-2j\pi}+0.1e^{-3j\pi}+e^{-4j\pi}}{1-1.45e^{-j\pi}+0.55e^{-2j\pi}} = \frac{0}{3} = \boxed{0}$$

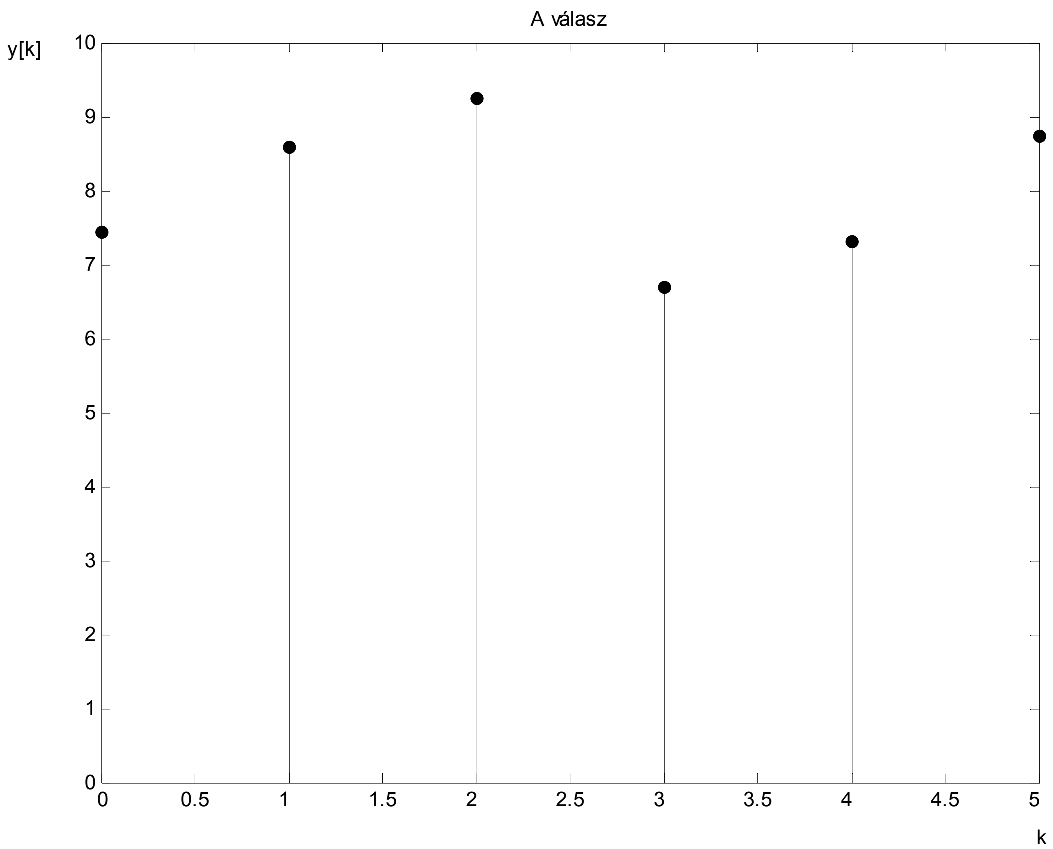
A hálózat válasza ezek alapján közvetlenül felírható:

$$y[k] = 8 + 0.6326\cos\left(-54.1879^\circ+\frac{\pi}{3}\cdot k\right)+1.113242\cos\left(147.2992^\circ+2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot k\right)$$

Összefoglalva egy táblázatba, K=0…5 értékeire:

k	$s[k]$	$y[k]$
0	0	7.4334
1	5	7.6401
2	0	8.2067
3	3	8.5666
4	2	8.3599
5	2	7.7933

Ábrázolva:



2.5
<u>Az 1.3.-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1. eredményével!</u>

Az 1.3-asban kiszámított impulzusválasz:

$$w[k]=0.1\cdot\delta[k]-0.655\cdot\delta[k-1]+E(k-2)\left(4.6022\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos\left(0.2121(k-2)-1.7687\right)\right)$$

Az addíciós tétal felhasználásával átalakítjuk, úgy hogy a cosinusos tag argumentumából eltűnjön az eltolás:

$$w[k]=0.1\cdot\delta[k]-0.655\cdot\delta[k-1]+E(k-2)\begin{pmatrix}4.6022\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos(-1.7687)\cos\left(0.2121(k-2)\right)\\ -4.6022\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\sin(-1.7687)\sin\left(0.2121(k-2)\right)\end{pmatrix}$$

A konstansokat összevonva:

$$w[k]=0.1\cdot\delta[k]-0.655\cdot\delta[k-1]+E(k-2)\begin{pmatrix}-0.9044\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos(0.2121(k-2))\\+4.5125\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\sin(0.2121(k-2))\end{pmatrix}$$

$$F\left\{E[k]\cdot a^k\cdot\cos(\vartheta_0 k)\right\}=\frac{1-a\cdot\cos(\vartheta_0)\cdot e^{-j\vartheta}}{1-2\cdot a\cdot\cos(\vartheta_0)\cdot e^{-j\vartheta}+a^2\cdot e^{-2j\vartheta}}$$

$$F\left\{E[k]\cdot a^k\cdot\sin(\vartheta_0 k)\right\}=\frac{a\cdot\sin(\vartheta_0)\cdot e^{-j\vartheta}}{1-2\cdot a\cdot\cos(\vartheta_0)\cdot e^{-j\vartheta}+a^2\cdot e^{-2j\vartheta}}$$

Alkalmazva az eltolási tételt, azt kapjuk, hogy:

$$F\{w[k]\}=0.1-0.655e^{-j\vartheta}$$
$$+\left(\frac{(-0.9044)\left(1-0.7416\cdot\cos(0.2121)\cdot e^{-j\vartheta}\right)+4.5125\cdot 0.7416\cdot\sin(0.2121)\cdot e^{-j\vartheta}}{1-2\cdot 0.7416\cdot\cos(0.2121)\cdot e^{-j\vartheta}+0.7416^2\cdot e^{-2j\vartheta}}\right)\cdot e^{-2j\vartheta}$$

$$F\{w[k]\}=0.1-0.655e^{-j\vartheta}+\left(\frac{-0.9044+0.6557\cdot e^{-j\vartheta}+0.7045\cdot e^{-j\vartheta}}{1-1.4500\cdot e^{-j\vartheta}+0.5500\cdot e^{-2j\vartheta}}\right)\cdot e^{-2j\vartheta}$$

$$F\{w[k]\}=\frac{\left(0.1-0.655e^{-j\vartheta}\right)\left(1-1.4500\cdot e^{-j\vartheta}+0.5500\cdot e^{-2j\vartheta}\right)-0.9044e^{-2j\vartheta}+1.3602\cdot e^{-3j\vartheta}}{1-1.4500\cdot e^{-j\vartheta}+0.5500\cdot e^{-2j\vartheta}}$$

$$\left(0.1-0.655e^{-j\vartheta}\right)\left(1-1.4500\cdot e^{-j\vartheta}+0.5500\cdot e^{-2j\vartheta}\right)=$$
$$0.1-0.655e^{-j\vartheta}\text{-}0.14500\cdot e^{-j\vartheta}+0.9498e^{-2j\vartheta}+0.05500\cdot e^{-2j\vartheta}\text{-}0.36025e^{-3j\vartheta}$$

Ebből adódik, hogy az impulzusválasz komplex spektruma:

$$\boxed{W\left(e^{-j\vartheta}\right)=F\{w[k]\}=\frac{0.1-0.8\cdot e^{-j\vartheta}+0.1004e^{-2j\vartheta}+0.9999e^{-3j\vartheta}}{1-1.4500\cdot e^{-j\vartheta}+0.5500\cdot e^{-2j\vartheta}}}$$

A 2.1-ben kapott eredmény:

$$W\left(e^{j\vartheta}\right)=\frac{\overline{Y}}{\overline{S}}=\frac{0.1-0.8e^{-j\vartheta}+0.1e^{-2j\vartheta}+e^{-3j\vartheta}}{1-1.45e^{-j\vartheta}+0.55e^{-2j\vartheta}}$$

Amiből látszik, hogy a két eredmény gyakorlatilag ugyanaz.

2.6
<u>Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!</u>

A hálózat rendszeregyenlete az átviteli karakterisztikából:

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{0.1 - 0.8e^{-j\vartheta} + 0.1e^{-2j\vartheta} + e^{-3j\vartheta}}{1 - 1.45e^{-j\vartheta} + 0.55e^{-2j\vartheta}}$$

$$\left(1 - 1.45e^{-j\vartheta} + 0.55e^{-2j\vartheta}\right)\overline{Y} = \left(0.1 - 0.8e^{-j\vartheta} + 0.1e^{-2j\vartheta} + e^{-3j\vartheta}\right)\overline{S}$$

Tudjuk hogy, az $e^{-j\vartheta}$ kifejezés 1x-es késleltetést jelent (és ennek megfelelően $e^{-2j\vartheta}$ kétszerest, $e^{-3j\vartheta}$ háromszorost).

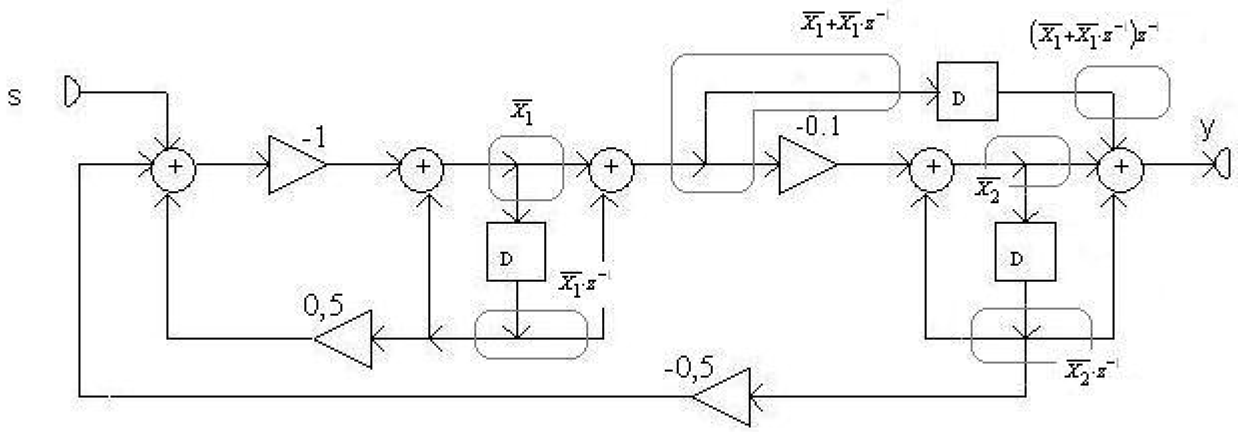
Ebből adódik, hogy a hálózat rendszeregyenlete:

$$\boxed{y[k] - 1.45y[k-1] + 0.55y[k-2] = 0.1s[k] - 0.8s[k-1] + 0.1s[k-2] + s[k-3]}$$

2.7
<u>(Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1. és a 2.2. pont eredményeit az ANDI programmal!</u>

3. Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

3.1.
<u>Határozza meg a hálózat átviteli függvényét a z-tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!</u>



A megoldás gyakorlatilag analóg az 2.1 -es feladatban leírt megoldással:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X_1}&=0.5z^{-1}\overline{X_1}+0.5z^{-1}\overline{X_2}-\overline{S}\\
\overline{X_2}&=z^{-1}\overline{X_2}-0.1\left(\overline{X_1}+z^{-1}\overline{X_1}\right)\\
\overline{Y}&=\left(\overline{X_1}+z^{-1}\overline{X_1}\right)z^{-1}+\overline{X_2}+z^{-1}\overline{X_2}
\end{aligned}\right\}$$

Egyoldalra hozva az állapotváltozókat:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X_1}&=\frac{0.5z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}\overline{X_2}+\frac{-1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}\overline{S}\\
\overline{X_2}&=\frac{-0.1\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)}\overline{X_1}\\
\overline{Y}&=\left(1+\cdot z^{-1}\right)z^{-1}\overline{X_1}+\left(1+\cdot z^{-1}\right)\overline{X_2}
\end{aligned}\right\}$$

$\overline{X_2}$ -t behyettesítve a másik két egyenletbe:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X_1}&=\frac{0.5z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}\frac{-0.1\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)}\overline{X_1}+\frac{-1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}\overline{S}\\
\overline{Y}&=\left(1+\cdot z^{-1}\right)z^{-1}\overline{X_1}+\left(1+\cdot z^{-1}\right)\frac{-0.1\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)}\overline{X_1}
\end{aligned}\right\}$$

Ezt egyszerűsítve:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X_1}&=\frac{-\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)+0.05z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}\overline{S}\\
\overline{Y}&=\left(\frac{\left(1+\cdot z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)z^{-1}+-0.1\left(1+z^{-1}\right)^2}{\left(1-z^{-1}\right)}\right)\overline{X_1}
\end{aligned}\right\}$$

$\overline{X_1}$ -t behelyettesítve a másik egyenletbe:

$$\overline{Y}=\left(\frac{\left(1+\cdot z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)z^{-1}+-0.1\left(1+z^{-1}\right)^{2}}{\left(1-z^{-1}\right)}\right)\frac{-\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)+0.05z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}\overline{S}$$

Ezt egyszerűbb alakra hozva:

$$\overline{Y}=\frac{-\left(\left(1+\cdot z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)z^{-1}+-0.1\left(1+z^{-1}\right)^{2}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)+0.05z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}\overline{S}$$

Majd felbontva a zárójeleket:

$$\overline{Y}=\frac{-z^{-1}+z^{-3}+0.1+0.2z^{-1}+0.1z^{-2}}{1-0.5z^{-1}-z^{-1}+0.5z^{-2}+0.05z^{-1}+0.05z^{-2}}\overline{S}$$

És a közös kitevőjű eggyütthatókat összvonva azt kapjuk, hogy a hálózat átviteli függvénye:

$$\boxed{W\left(z\right)=\frac{\overline{Y}}{\overline{S}}=\frac{0.1-0.8z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}}{1-1.45z^{-1}+0.55z^{-2}}}$$

Az átviteli karakterisztika fügvényével összevetve láthatjuk, hogy a két rendszer számlálójában illetve nevezőjében ugyanazok a kitevők állnak, ami érthető, hiszen ezt vártuk.

3.2

Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés- válasz stabilitását!

Az átviteli függvény számlálójának gyökei a zérusok, nevezőjének gyökei a pólusok, ahhoz, hogy ezeket kiszámítsuk, használjuk a MATLAB-ot. Először bevisszük a számlálót és a nevezőt majd keressük külön-külön a gyököket:

```
A=[0.5, 0, 0.5; 1.5, 0, 0.5; -0.15, 0, 0.95 ];
B=[-1;-1;0.1];
C=[-0.15, 1, 1.95];
D = 0.1;
Ts = -1;
Hs=ss(A,B,C,D, Ts);
Hz = tf(Hs);
>> [num,den]=tfdata(Hz, 'v');
>> roots(den)
>> roots(num)
```

Amire kapjuk, hogy:

```
ans =

      0
  0.7250 + 0.1561i
  0.7250 - 0.1561i


ans =
```

7.7016
1.2984
-1.0000

Tehát az eredmény, hogy a pólusok:

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= 0.7250 \ + \ 0.1561\text{j} \\ p_3 &= 0.7250 \text{ - } 0.1561\text{j} \end{aligned}}$$

Illetve a zérusok:

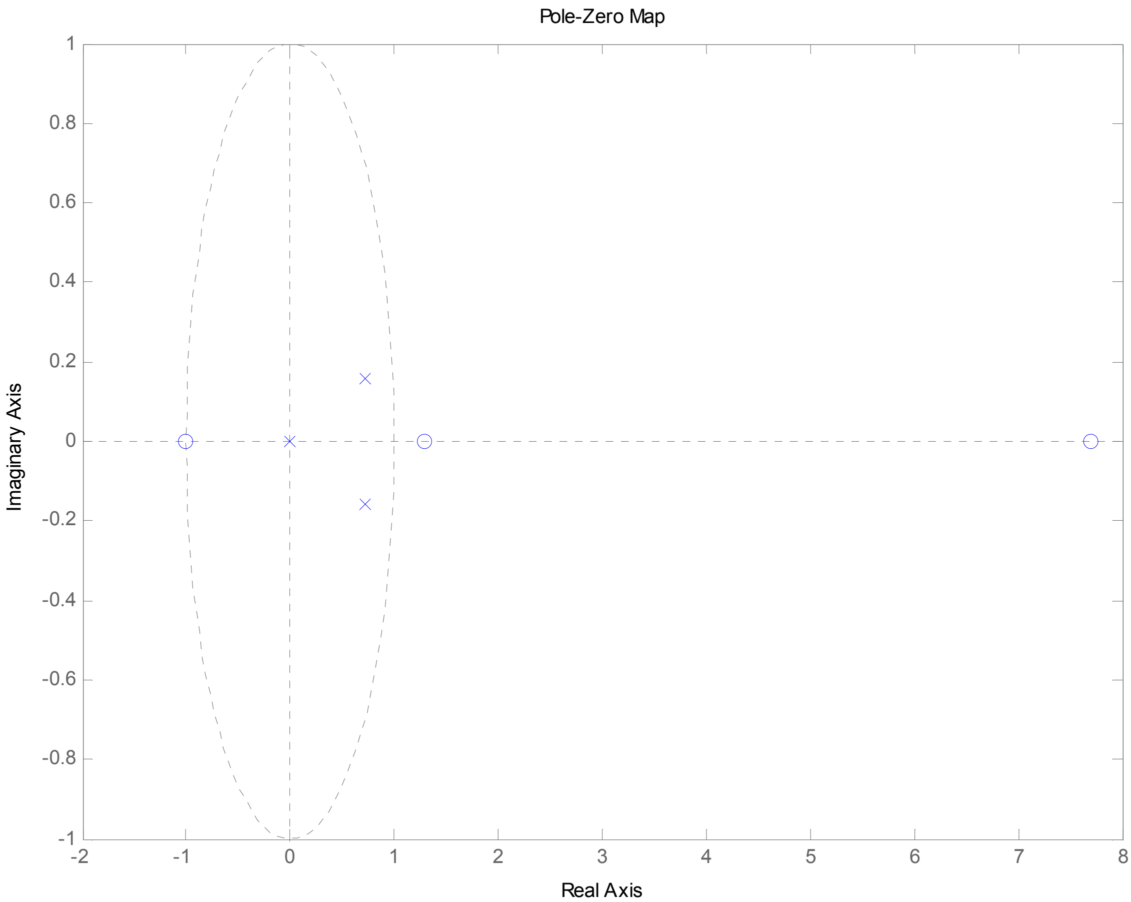
$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= 7.7016 \\ z_2 &= 1.2984 \\ z_3 &= -1.0000 \end{aligned}}$$

Stabilitásvizsgálat:

$$\left.\begin{aligned} |p_1| &= 0 \\ |p_2| &= \sqrt{0.7250^2 \ + \ 0.1561^2} = 0.7318 \\ |p_3| &= \sqrt{0.7250^2 + (\text{-}0.1561)^2} = 0.7318 \end{aligned}\right\}$$

A pólus zérus ábrából lehet látni, hogy GV-stabilis a rendszer, ugyanis mindegyik pólus az egységkörön belül helyezkedik el, azaz abszolút értéke kisebb 1-nél.

Ábrázolva:



A p=0 pólus nyilvánvaló a másik kettő pedig következik az 1.2-ben kiszámított sajátértékekkel.

<u>3.3</u>
<u>Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3.-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt k = 0, 1, ...5-re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!</u>

Az átviteli függvény inverz Z transzformáltja az impulzusválasz. Ahhoz, hogy a transzformációt elvégezzük, legelőször valódi törtet kell csinálnunk az átviteli függvényből(ugyanis a z^{-1}, a számlálóban magasabb hatványon szerepel, mint a nevezőben), majd azt részlettörtekre kell bontani:

$$w[k] = Z^{-1}\{W(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{0.1-0.8z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}}{1-1.45z^{-1}+0.55z^{-2}}\right\}$$

Polinóm osztás:

$$\left(0.1-0.8z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}\right):\left(1-1.45z^{-1}+0.55z^{-2}\right)=0.1-0.655z^{-1}$$
$$-\left(\underline{0.1-0.145z^{-1}+0.055z^{-2}}\right)$$
$$-0.655z^{-1}+0.045z^{-2}+z^{-3}$$
$$-\quad \underline{\left(-0.655z^{-1}+0.94975z^{-2}-0.36025z^{-3}\right)}$$
$$\text{-}0.9047z^{-2}+0.6398z^{-3}$$

Tehát:

$$W(z)=\frac{0.1-0.8z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}}{1-1.45z^{-1}+0.55z^{-2}}=0.1-0.655z^{-1}+z^{-1}\frac{\text{-}0.9047z+1.36025}{z^{2}-1.45z+0.55}$$

Részlettörtekre bontás:

$$\frac{-0.9047z+1.36025}{z^{2}-1.45z+0.55}=\frac{-0.9047z+1.36025}{\left(\mathrm{z}-\left(0.7250+0.1561\mathrm{j}\right)\right)\left(\mathrm{z}-\left(0.7250-0.1561\mathrm{j}\right)\right)}$$

$$\frac{-0.9047\left(0.7250+0.1561\mathrm{j}\right)+1.36025}{\left(0.7250+0.1561\mathrm{j}\right)\text{-}0.7250+0.1561\mathrm{j}}=\text{-}0.4524\text{ - }2.2561\mathrm{j}$$
$$\frac{-0.9047\left(0.7250\text{ - }0.1561\mathrm{j}\right)+1.36025}{\left(0.7250\text{ - }0.1561\mathrm{j}\right)\text{-}0.7250\text{ - }0.1561\mathrm{j}}=\text{-}0.4524+2.2561\mathrm{j}$$

$$\frac{0.04025z+1.26025}{z^{2}-1.45z+0.55}=\frac{\text{-}0.4524\text{ - }0.0516\mathrm{j}}{\left(\mathrm{z}-\left(0.7250+0.1561\mathrm{j}\right)\right)}+\frac{\text{-}0.4524+0.0516\mathrm{j}}{\left(\mathrm{z}-\left(0.7250-0.1561\mathrm{j}\right)\right)}$$

Visszahelyettesítve a kapott eredményt:

$$W(z)=0.1-0.655z^{-1}+z^{-1}\left(\begin{array}{l}\left(\text{-}0.4524\text{ - }0.0516\mathrm{j}\right)\dfrac{1}{\left(\mathrm{z}\text{-}\left(0.7250+0.1561\mathrm{j}\right)\right)}\\ +\left(\text{-}0.4524+0.0516\mathrm{j}\right)\dfrac{1}{\left(\mathrm{z}\text{-}\left(0.7250\text{ - }0.1561\mathrm{j}\right)\right)}\end{array}\right)$$

$$W(z)=0.1-0.655z^{-1}+z^{-2}\left(\begin{array}{l}2.3010\cdot e^{-j1.7687}\dfrac{z}{\left(\mathrm{z}\text{-}0.7416e^{j0.2121}\right)}\\ +2.3010\cdot e^{\mathrm{j}1.7687}\dfrac{z}{\left(\mathrm{z}\text{-}0.7416e^{-j0.2121}\right)}\end{array}\right)$$

$$w[k]=0.1\delta[k]-0.655\delta[k-1]$$
$$+E[k-2]2.3010\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\left(\mathrm{e}^{j\left(0.2121(k-2)\text{-}1.7687\right)}+e^{-j\left(0.2121(k-2)\text{-}1.7687\right)}\right)$$

Megkapjuk az impuzusválaszt analitikus alakban:

$$\boxed{w[k]=0.1\delta[k]-0.655\delta[k-1]+E[k-2]4.6020\cdot 0.7416^{(k-2)}\cdot\cos\left(0.2121(k-2)\text{-}1.7687\right)}$$

Láthatjuk, hogy az eredmény teljes mértékben ekvivalens az 1.3 -as feladatban kapot eredménnyel.

Az eredmény ellenőrzése k = 0, 1, ...5-re, polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval:

$$\left(0.1-0.8z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}\right):\left(1-1.45z^{-1}+0.55z^{-2}\right)=0.1-0.655z^{-1}-0.9047z^{-2}+0.04845z^{-3}+0.56785z^{-4}+0.7968z^{-5}$$

$$-\left(\underline{0.1-0.145z^{-1}+0.055z^{-2}}\right)$$

$$-0.655z^{-1}+0.045z^{-2}+z^{-3}$$

$$-\ \left(\underline{-0.655z^{-1}+0.94975z^{-2}-0.36025z^{-3}}\right)$$

$$\text{-}0.9047z^{-2}+1.36025z^{-3}$$

$$\left(\underline{\text{-}0.9047z^{-2}+1.3118z^{-3}\text{-}0.4976z^{-4}}\right)$$

$$0.04845\,z^{-3}+0.4976z^{-4}$$

$$\left(\underline{0.04845z^{-3}\text{-}0.070252z^{-4}+0.0266z^{-5}}\right)$$

$$0.56785z^{-4}-0.0266z^{-5}$$

$$\left(\underline{0.56785z^{-4}-\ 0.8234z^{-5}+0.3123z^{-6}}\right)$$

$$0.7968z^{-5}-0.3123z^{-6}$$

$$\left(\underline{0.7968z^{-5}-1.1554z^{-6}+0.4382z^{-7}}\right)$$

$$0.8431\,z^{-6}-0.4382z^{-7}$$

$$W[z]\Big|_{k=0\ldots5}=0.1-0.655z^{-1}-0.9047z^{-2}+0.04845z^{-3}+0.56785z^{-4}+0.7968z^{-5}$$

Ezután elvégezhetjük az inverz transzformációt, minek eredményeképpen megkapjuk az 1.3-as táblázatbeli értékeket.

$$\boxed{\begin{aligned}&w[k]\Big|_{k=0\ldots5}=0.1\cdot\delta[k]-0.655\cdot\delta[k-1]-0.9047\cdot\delta[k-2]+\\&0.04845\cdot\delta[k-3]+0.56785\cdot\delta[k-4]+0.7968\cdot\delta[k-5]\end{aligned}}$$

<u>3.4.</u>
<u>Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztõ jel: s[k[= ε[k] (F + Gp^k) !</u>

F	G	p
3	0,9	-14/13

Az adott táblázat alapján felírható a gerjesztés:

$$s[k]=\varepsilon[k]\left(F+Gp^{k}\right)=\varepsilon[k]\left(3+0.9\cdot\left(\frac{-14}{13}\right)^{k}\right)$$

A gerjesztés Z-transzformáltja megszorozva a hálózat átviteli függvényével, megadja a válasz Ztranszformáltját. Ebből inverz Z-transzformációval kapjuk a válasz időfüggvényét:

$$y[k] = Z^{-1}\{Y(z)\} = Z^{-1}\{S(z)\cdot W(z)\} = Z^{-1}\{Z\{s[k]\}\cdot W(z)\}$$

$$S(z) = Z\{s[k]\} = \frac{3\cdot z}{z-1} + \frac{0.9\cdot z}{z-\left(\frac{-14}{13}\right)} = \frac{3\cdot z}{z-1} + \frac{0.9\cdot z}{\left(\frac{13z+14}{13}\right)} = \frac{3\cdot z}{z-1} + \frac{0.9\cdot 13z}{13z+14}$$

A válasz transzformálását két részre lehet bontani:

$$Y(z) = \frac{3\cdot z}{z-1}\frac{\left(0.1z^3-0.8z^2+0.1z+1\right)}{z\left(z^2-1.45z+0.55\right)} + \frac{0.9\cdot z}{z-(-1.0769)}\frac{\left(0.1z^3-0.8z^2+0.1z+1\right)}{z\left(z^2-1.45z+0.55\right)} = Y(z)_1 + Y(z)_2$$

$$Y(z)_1 = \frac{\left(0.1z^3-0.8z^2+0.1z+1\right)0.3}{\left(z^2-1.45z+0.55\right)(z-1)} = 3\left(\frac{4}{(z-1)} + \frac{-2.2775 + 6.9091j}{(z-(0.7250 + 0.1561j))} + \frac{-2.2775 - 6.9091j}{(z-(0.7250 - 0.1561j))}\right)$$

A következő MATLAB utasítással lehet részlettörtekre bontani a kifejezést:

```
szam1=[0.1 -0.8 0.1 1];
nev1=conv([1 -1],[1 -1.45 0.55]);
[r1,p1,k1]=residue(szam1,nev1)

>>
r1 =

   4.0000
  -2.2775 + 6.9091i
  -2.2775 - 6.9091i


p1 =

   1.0000
   0.7250 + 0.1561i
   0.7250 - 0.1561i


k1 =

    0.1000
```

A Z-transzformációnál szűkségünk lesz egy z szorzóra, ezért megszorozzuk a törtet $z^{-1}\cdot z$-vel:

$$Y(z)_1 = z^{-1}\left(\frac{12z}{(z-1)} + \frac{(-6.83 + 20.73j)z}{(z-(0.7250 + 0.1561j))} + \frac{(-6.83 - 20.73j)z}{(z-(0.7250 - 0.1561j))}\right)$$

Letranszformálás után az egyenlet így néz ki:

$$y[k]_1 = \varepsilon[k-1]\left(1.2+(-6.83 + 20.73j)(0.7250 + 0.1561j)^{(k-1)}+(-6.83 - 20.73j)(0.7250 - 0.1561j)^{(k-1)}\right)$$

Ugyanezt a műveletet elvégezzük a 2. részére is:

$$Y(z)_2 = \frac{\left(0.1z^3 - 0.8z^2 + 0.1z + 1\right)0.9}{\left(z^2 - 1.45z + 0.55\right)\left(z - (-1.0769)\right)} = 0.9\left(\frac{\text{-0.0490}}{z - 1.0769} + \frac{\text{-0.3568 - 1.2209j}}{\left(z - (0.7250 + 0.1561\text{j})\right)} + \frac{\text{-0.3568 + 1.2209j}}{\left(z - (0.7250\ \text{j}\ 0.1561\text{j})\right)}\right)$$

$$Y(z)_2 = z^{-1}\left(\frac{\text{-0.044z}}{z - 1.0769} + \frac{(\text{-0.321 - 1.099j})\text{z}}{\left(z - (0.7250 + 0.1561\text{j})\right)} + \frac{(\text{-0.321 + 1.099j})\text{z}}{\left(z - (0.7250\ \text{-}\ \text{j}\ 0.1561\text{j})\right)}\right)$$

Letranszformálás után a második egyenlet így néz ki:

$$y[k]_2 = \varepsilon[k-1]\begin{pmatrix} \text{-0.044} \cdot 1.0769^{(k-1)} \\ +(\text{-0.321 - 1.099j})(0.7250 + 0.1561\text{j})^{(k-1)} \\ +(\text{-0.321 + 1.099j})(0.7250\ \text{-}\ 0.1561\text{j})^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

A két egyenletből összerakható a válasz:

$$y[k] = \varepsilon[k-1]\begin{pmatrix} 12\text{-}0.044 \cdot 1.0769^{(k-1)} \\ +(\text{-6.83 + 20.73j-0.321 - 1.099j})(0.7250 + 0.1561\text{j})^{(k-1)} \\ +(\text{-6.83 - 20.73j-0.321 + 1.099j})(0.7250\ \text{-}\ 0.1561\text{j})^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

$$y[k] = \varepsilon[k-1]\,j\begin{pmatrix} 12\text{-}0.044 \cdot 1.0769^{(k-1)} \\ +(\text{-7.154 + 19.628j})(0.7250 + 0.1561\text{j})^{(k-1)} \\ +(\text{-7.154 - 19.628j})(0.7250\ \text{-}\ 0.1561\text{j})^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

$$y[k] = \varepsilon[k-1]\begin{pmatrix} 12\text{-}0.044 \cdot 1.0769^{(k-1)} \\ +20.891 \cdot e^{j1.9203} \cdot 0.7416^{(k-1)} \cdot e^{j0.2121(k-1)} \\ +20.891 \cdot e^{-j1.9203} \cdot 0.7416^{(k-1)} \cdot e^{-j0.2121(k-1)} \end{pmatrix}$$

$$y[k] = \varepsilon[k-1]\begin{pmatrix} 12\text{-}0.044 \cdot 1.0769^{(k-1)} \\ +20.891 \cdot 0.7416^{(k-1)} \cdot \begin{pmatrix} e^{j(0.2121(k-1)+1.9203)} \\ +e^{-j(0.2121(k-1)+1.9203)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Így megkaptuk a választ analitikus alakban:

$$y[k]=\varepsilon[k-1]\left(12\text{-}0.044\cdot 1.0769^{(k-1)}+41.782\cdot 0.7416^{(k-1)}\cdot\cos\left(0.2121(k-1)+1.9203\right)\right)$$

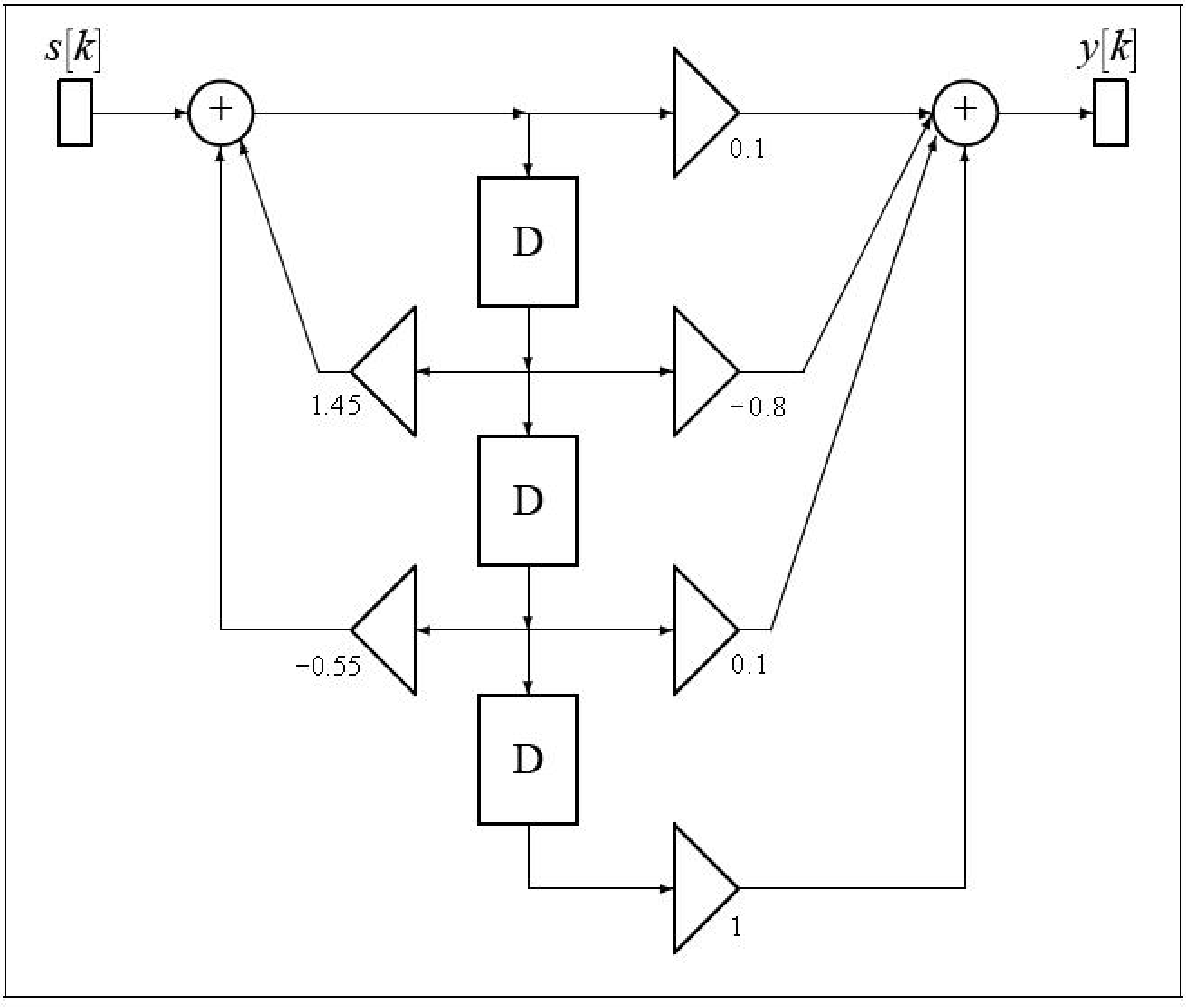
3.5

Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!

A hálózat függvényét megvalósító egy lehetséges kanonikus kapcsolást a következő ábra mutatja:

$$W(z)=\frac{0.1-0.8z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}}{1-1.45z^{-1}+0.55z^{-2}}$$

Látható, hogy a hálózat megkonstruálása semmilyen gondot nem jelent. A „létrát” addig folytatjuk lefelé, amíg el nem fogy a számláló és a nevező, az erősítőkre pedig ráírogatjuk a *z*-hatványok együtthatóit. Ha valamilyen közbenső *z*-hatvány nem szerepel a törtben, akkor a neki megfelel ˝o erősítőt kihagynánk.



$$y[k]=1.45y[k-1]-0.55y[k-2]+0.1s[k]-0.8s[k-1]+0.1s[k-2]+s[k-3]$$

Ebből a hálózat rendszeregyenlete:

$$\boxed{y[k]-1.45y[k-1]+0.55y[k-2]=0.1s[k]-0.8s[k-1]+0.1s[k-2]+s[k-3]}$$

Mint ahogy azt a 2.6-os feladatban egyszer már ki is jött.

3.6
A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4. feladat megoldását a k = 0, 1, 2,...8 ütemre!

A rendszeregyenlet alapján:

k	$s[k]$	$y[k]$
0	3.9	0.39
1	2.0308	-2.3514
2	4.0438	-4.4545
3	1.8759	-4.1101
4	4.2105	-2.1542
5	1.6963	0.16951
6	4.4039	2.8109
7	1.4881	4.9884
8	4.6282	7.0963

A táblázat MATLAB segítségével lett kitöltve:

```
k = 0:8;
sk = 3 + 0.9 * ((-14/13).^k);
yk = zeros(1, length(k));
yk(1)=0.39;
yk(2)=-2.3514;
yk(3)=-4.4545;
for i = 4:length(k)
    yk(i) = 0.1*sk(i) - 0.8*sk(i-1) + 0.1*sk(i-2) + sk(i-3) + 1.45*yk(i-1) - 0.55 * yk(i-2);
end;
```

A 3.4-es feladat megoldás:

k	$y[k]$
0	0.39
1	-2.3515
2	-4.5485
3	-4.1084
4	-2.2624
5	0.1716
6	2.6850
7	4.9902
8	6.9495

Szintén a MATLAB-bal ellenőrzöm:

```
k=1:10;
```

```
y=12+-0.044.*(1.0769.^(k-1))+41.782.*(0.7416.^(k-1)).*cos(0.2121.*(k-1)+1.9203)

y =

  Columns 1 through 6

   -2.3515   -4.5485   -4.1084   -2.2624    0.1716    2.6850

  Columns 7 through 10

    4.9902    6.9495    8.5220    9.7237
```

Ugyanezt az eredményt kapjuk a 3.4. pontban kapott formulából, a rendszeregyenletbe és az állapotegyenletekbe való fokozatos behelyettesítésből, és az 1.4.pontban, ahol csak a k=0…5 tartományt tekintettük, ugyanezt kaptuk diszkrét konvolúcióval is.

3.7
(Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!
3.8
(Nem kötelezõ) Az ANDI program felhasználásával ellenõrizze eredményeit!

A javító megjegyzései: