

Bevezetés a számításelméletbe II. vizsgafeladatok
2000. június 6.

1. Legyen G olyan véges egyszerű gráf, melynek minden foka páros és valamely $v \in V(G)$ csúcán az összes G -beli kör áthalad. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan G -beli séta, amely csupa különböző élet használ fel és nem folytatható valamely már felhasznált él újbóli felhasználása nélkül, szükségképpen Euler-kör. (G -beli sétának olyan $v_1e_1v_2e_2v_3e_3\cdots v_{k-1}e_{k-1}v_k$ sorozatot nevezünk, ahol minden i -re $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ és $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$)
2. Egy n -szer n -es sakktábla bizonyos mezőit kijelölték, ezekre színes golyókat kell helyezni úgy, hogy azonos sorba, illetve azonos oszlopba kerülő golyók nem lehetnek egyszínűek. Tudjuk, hogy semelyik sorban és semelyik oszlopban nincs k -nál több megjelölt mező. Igaz-e, hogy ekkor k -féle színű golyóval biztosan meg tudjuk oldani a feladatot (ha mindegyikből elég sokat használhatunk)?
3. Legyen G_1 és G_2 két véges egyszerű gráf, melyek kromatikus száma három. Definiáljuk általuk az alábbi F gráfot. F csúcsai az összes olyan rendezett (u, v) párok, melyekre $u \in V(G_1)$ és $v \in V(G_2)$. Két ilyen csúcs, (u_1, v_1) és (u_2, v_2) akkor és csak akkor van összekötve F -ben, ha $\{u_1, u_2\} \in E(G_1)$ és $\{v_1, v_2\} \in E(G_2)$ is teljesül. Bizonyítsuk be, hogy F kromatikus száma is három.
4. Minimálisan hány éle kell hogy legyen egy olyan n -csúcsú egyszerű gráfnak, amely háromszögmentes, de tetszőleges két még összekötetlen csúcsát összekötve keletkezik benne háromszög?
5. PERT-es példa. (...)
6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \geq 2$ pozitív egészre fennáll, hogy $\sigma(n) \cdot \varphi(n) < n^2$
7. Tudjuk, hogy az a egész számra teljesül, hogy $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$. Milyen maradékot ad 31-gyel való osztáskor az a egész szám?
8. Legyenek G és H véges csoportok és ϕ homomorfizmus G -ből H -ba. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $g \in G$ elemre a g elem rendje osztható a $\phi(g)$ elem (H -beli) rendjével.