1, a, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-2)^n (n+5)}{n^2+5}}_{a_n} x^n$

$\boxed{10}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{n+5}{n^2+5}} \xrightarrow{n\to\infty} 2 \; ; \; R = \frac{1}{2} \qquad 3$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{6n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{6n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{n+5}{n^2+5}} \le \sqrt[n]{1} \qquad 3$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1$$

Végpontok: Ha $x = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{n^2+5}$ Leibniz, tehát konvergens 2

Ha $x = -\frac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+5} \ge \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{6n^2} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (*)

divergens 2

Tehát a konv. tart.: $\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]}}$

$\boxed{4}$ b, Hatványsor a konv. tart. belső pontjaiban abszolút konv. 2

$x = \frac{1}{2}$-ben a sor nem abszolút konv., (*) miatt. 2

Tehát a sor a $\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \text{ intervallumon absz. konv.}}}$

2, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$; $\sqrt[n]{|n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow R = 1.$ 2

$\boxed{15}$

A végpontokban ($x = \pm 1$) a sor divergens, mert az általános tag nem tart 0-hoz. Tehát a konv. tart.: $\underline{\underline{(-1, +1)}}$ 3

10

Legyen $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, ha $x\in(-1,1)$ $\quad S(0)=0$.

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, t^{n-1}\right)dt \overset{3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x t^{n-1}\,dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n}\,\frac{x^n}{\cancel{n}}=\frac{x}{1-x} \quad 4,$$ tehát $\frac{S(x)}{x}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}$

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2} \quad 3$$

3, a, $x_0=0$

$\boxed{5}$ $f(x)=\frac{1}{x+5}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\left(\frac{-x}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n x^n$, 4 ha

$\left|\frac{-x}{5}\right|<1$, azaz $|x|<5=R$ 1

b, $x_0=3$

$\boxed{7}$ $g(x)=\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x-3+8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-(x-3)}{8}\right)}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{8}\right)^n (x-3)^n$ 3 2

ha $\left|\frac{-(x-3)}{8}\right|<1$, azaz $|x-3|<8=R$ 2

c, $x_0=0$

$\boxed{7}$ $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}}=(x+5)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{-1/2}=$ 2

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{5^n}\cdot x^n$, 3 ha $\left|\frac{x}{5}\right|<1$, azaz

$|x|<5=R$ 2

4, $\boxed{8}$ $f(x)=(x-2)^2+\sin(2x)$; $f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\sin(2x) = 2^4\sin(2x)$

$$T_3(x) = \underbrace{(x^2-4x+4)}_{(x-2)^2} + \underbrace{\left(2x - \frac{1}{3!}(2x)^3\right)}_{\sin(2x)\ \text{Taylor-sora}} = \underline{4 - 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3} \quad (5)$$

$$f(x) = T_3(x) + \underbrace{\frac{2^4}{4!}\sin(2\xi)\cdot x^4}_{\text{Lagrange-féle maradéktag}}, \quad \text{ahol } |\xi| < x \quad (3)$$

5, a, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ az I-n, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
$\boxed{4}$ küszöbindex, hogy $\forall x \in I$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

b, $\boxed{4}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-1, +1) \\ 1, & \text{ha } x = \pm 1 \\ \nexists & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$\boxed{3}$ c, f_n <u>nem egyenletesen konvergens</u> $[-1,0]$-n, mert f_n folyt. de f nem folytonos $[-1,0]$-án, és folytonos elemű, egyenletesen konv. függvénysorozat határfüggvénye is folytonos.

6,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{2x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a, $\boxed{6}$ Legyen $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$$\lim_{\rho\to 0+} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{3\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(2\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} =$$

−4−

$$= \lim_{\rho\to 0+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{3\rho}\; \underbrace{\frac{\cos\varphi \sin^2\varphi}{2+\sin^2\varphi}}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0,0), \text{ tehát}$$

<u>f folytonos az origóban</u> (4)

Ha <u>$(x,y)\neq(0,0)$</u>, a nevező nem nulla, a két polinom hányadosa <u>folytonos.</u> (2)

b, Ha $(x,y)\neq(0,0)$, a szabályok alapján:

$\boxed{9}$

$$f'_x(x,y) = \frac{3y^2(2x^2+3y^2) - 3xy^2\cdot 4x}{(2x^2+3y^2)^2} \overset{(3)}{=} \frac{-6x^2y^2+9y^4}{(2x^2+3y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{6xy(2x^2+3y^2) - 3xy^2\cdot 6y}{(2x^2+3y^2)^2} \overset{(3)}{=} \frac{12x^3y}{(2x^2+3y^2)^2}$$

Ha $(x,y)=(0,0)$, akkor a def. alapján:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \quad f'_y(0,0) = 0 \quad (3)$$

(hasonlóan)

c, $\boxed{5}$

$$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}, \quad \frac{df(0,0)}{d\underline{e}} = \lim_{t\to 0+}\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt2}, \frac{-t}{\sqrt2}\right) - f(0,0)}{t} \overset{(2)}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left(\frac{\frac{3}{2\sqrt2}t^3}{t^2+\frac32 t^2} - 0\right)\frac1t = \frac{3/(2\sqrt2)}{1+3/2} = \underline{\underline{\frac{3}{5\sqrt2}}} \quad (3)$$

d, Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor $\exists$ grad $f(x,y)$, mert az origón kívül

$\boxed{5}$ f parc. deriváltjai léteznek és folytonosak. (2)

$\nexists$ grad $f(0,0)$, mert ha létezne, akkor $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ miatt <u>minden</u> iránymenti derivált is 0 lenne, ami ellentmond c)-nek (3)

— o —

7, $\boxed{8}$

$$f(x,y) = g\left(\frac{2x}{y^2+1}\right); \quad f'_x(x,y) = \frac{2}{y^2+1}\cdot g'\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) \quad (2)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2}\, g'\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) \;(2); \quad f''_{xy}(x,y) \underset{(2)}{=} f''_{yx}(x,y) = \frac{-4y}{(y^2+1)^2} g'\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) - \frac{8xy}{(y^2+1)^3} g''\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) \quad (2)$$