AZ 1B FELADAT MEGOLDÁSA

Mivel a Picard-Lindelöf tételt *explicit* diffegyenletekre mondtuk ki, első feladatunk a kérdéses diffegyenletek explicit alakra való hozása. Lássuk, hogyan tehető meg ez az egyes esetekben!

i)

$$x \mapsto y(x) = ?, \quad (y^3)' = x^2 - y', \quad y(0) = 0$$

Mármost $(y^3)' = 3y^2y'$, ezért diffegyenletünk: $3y^2y' = x^2 - y'$, azaz rendezve $(3y^2+1)y' = x^2$. Mivel $3y^2+1$ szigorúan pozitív, ezért leoszthatunk vele és így végül a következő explicit diffegyenletet kapjuk:

$$y' = \frac{x^2}{3y^2+1}.$$

Ez egy **szeparábilis** típusú diffegyenlet. Mivel az egyenletben szereplő kifejezés kellően "szép", a kérdéses kezdetiérték-problémára vonatkozik a Picard-Lindelöf tétel.

ii)

$$x \mapsto y(x) = ?, \quad y' = \frac{1}{x^2+1} + y'', \quad y(0) = 0$$

Különösebb rendezgetés nélkül, első ránézésre is látszik, hogy egy **másodrendű inhomogén lineáris** diffegyenlettel van dolgunk. Mivel nem első, hanem másodrendű, a kérdéses kezdetiérték-problémára a Picard-Lindelöf akkor vonatkozhatna, ha nem csak $y(0)$, hanem $y'(0)$ értéke is meg lenne adva. Ennek hiányában a megoldás nem egyértelmű.

iii)

$$x \mapsto y(x) = ?, \quad y' = e^{x^2+y}\sin(y), \quad y(0) = 0$$

Kicsit rendezve

$$y' = e^{x^2}\left(e^y \sin(y)\right),$$

azaz egy **szeparábilis** típusú diffegyenlettel van dolgunk. Mivel kifejezésünk kellően szép, a Picard-Lindelöf tétel erre a kezdetiérték-problémára vonatkozik.

iv)

$$x \mapsto y(x) = ?, \quad y' = 2y^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 0$$

Itt a diffegyenletünk természetesen **szeparábilis**, azonban a kifejezésben szereplő $t \mapsto 2t^{\frac{1}{2}}$ függvénynek a deriváltja a nullában a végtelenhez tart — márpedig a megadott kezdetiérték éppen a nulla! Itt tehát a Picard-Lindelöf tétel nem garantálja, hogy pontosan egy megoldása lesz a problémának. Valóban: egyszerű látni, hogy mind az $y(x) \equiv 0$ (azaz a konstans nulla függvény), mind pedig az

$$y(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

formulával megadott függvény diffható és kielégíti mind a szóban forgó diffegyenletet, mind pedig az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt.