1. feladat (4+4=8 pont)
Adja meg a következő komplex mennyiségeket algebrai alakban!

a) $\dfrac{3+2i}{3i-4} =$

Megoldás: $\dfrac{(3+2i)(-3i-4)}{(3i-4)(-3i-4)} = \dfrac{-6-17i}{25}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \dfrac{-6}{25} + \dfrac{-17}{25}i$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

b) $z^3 = 8i$ egyenlet megoldásai

Megoldás: $z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$ $= 2(\cos(\pi/6 + 2k\pi/3) + i\sin(\pi/6 + 2k\pi/3)), \qquad (k = 0, 1, 2)$ $\boxed{\textbf{2p.}}$;
$k = 0: \quad z = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = \sqrt{3} + i;$
$k = 1: \quad z = 2(\cos(\pi/6 + 2\pi/3) + i\sin(\pi/6 + 2\pi/3)) = -\sqrt{3} + i;$
$k = 2: \quad z = 2(\cos(\pi/6 + 4\pi/3) + i\sin(\pi/6 + 4\pi/3)) = -2i;$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

2. feladat (3+5=8 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$? (Írja le a definíciót!)

Megoldás: Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |a_n - A| < \varepsilon. \boxed{\textbf{3p.}}$$

b) A definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + n}{n^4 - 100} = 3.$$

Megoldás:

$$\left| \frac{3n^4 + n}{n^4 - 100} - 3 \right| < \varepsilon \boxed{\textbf{2p.}}$$

$$\left| \frac{3n^4 + n - (3n^4 - 300)}{n^4 - 100} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n + 300}{n^4 - 100} \right| < \varepsilon \boxed{\textbf{1p.}}$$

$n > 3 \implies n \geq 4 \implies n^4 \geq 256 \implies n^4/2 \geq 128 > 100 \implies 0 < n^4/2 = n^4 - n^4/2 < n^4 - 100$, így ekkor $\left| \dfrac{n + 300}{n^4 - 100} \right| = \dfrac{n + 300}{n^4 - 100} \leq \dfrac{301n}{n^4/2} = \dfrac{602}{n^3}$.

$\dfrac{602}{n^3} < \varepsilon \iff n > \sqrt[3]{\dfrac{602}{\varepsilon}}$. $\boxed{\textbf{1p.}}$

A küszöb lehet $N(\varepsilon) = \max\left\{3, \sqrt[3]{\dfrac{602}{\varepsilon}}\right\}$. $\boxed{\textbf{1p.}}$

3. feladat (5+5+5=15 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$a)\quad a_n = \sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+1}, \qquad b)\quad b_n = \frac{n^6 + 2^{2n+3}}{6^n + n^2}, \qquad c)\quad c_n = \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$$

Megoldás:

a) $$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+1}} \boxed{\mathbf{2p.}} = \frac{n^2+3n+4-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{3n+3}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{3+3/n}{\sqrt{1+3/n+4/n^2} + \sqrt{1+1/n^2}} \boxed{\mathbf{2p.}} \to \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{3}{2} \boxed{\mathbf{1p.}};$$

b) $$b_n = \frac{n^6/6^n + 8(4/6)^n}{1 + n^2/6^n} \boxed{\mathbf{3p.}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0 \boxed{\mathbf{2p.}};$$

c) $\dfrac{2n+1}{n+3} \to 2$, így $\dfrac{2n+1}{n+3} > \dfrac{3}{2}$ ha n elég nagy $\boxed{\mathbf{2p.}}$. Ekkor $c_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \to \infty \boxed{\mathbf{2p.}}$, és így a speciális rendőrelv miatt $c_n \to \infty \boxed{\mathbf{1p.}}$.

4. feladat (4+4+4=12 pont)

$$a_1 = 3, \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{10}{7 - a_n}.$$

a) Igazolja, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $2 < a_n < 5$!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton csökken!

c) Határozza meg az a_n sorozat határértékét!

Megoldás:

a) Teljes indukcióval: $n = 1$-re $2 < a_1 = 3 < 5$ $\boxed{\textbf{1p.}}$;

Indukciós lépés: $2 < a_n < 5 \overset{?}{\Longrightarrow} 2 < a_{n+1} < 5 \quad (n \in \mathbb{N})$. Ez teljesül, hiszen ha $2 < a_n < 5$, akkor $5 = 7 - 2 > 7 - a_n > 7 - 5 = 2$, ezért $2 = \dfrac{10}{5} < \dfrac{10}{7 - a_n} < \dfrac{10}{2} = 5$ $\boxed{\textbf{3p.}}$.

b) Be kell látni, hogy $a_{n+1} \le a_n \quad (n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$. $\dfrac{10}{7 - a_n} \le a_n$ azzal ekvivalens, hogy $0 \le -a_n^2 + 7a_n - 10$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2 < a_n < 5$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, amit az előbb már láttunk $\boxed{\textbf{1p.}}$.

c) Az előzőek szerint a_n konvergens $\boxed{\textbf{2p.}}$, jelölje határértékét $A \in \mathbb{R}$. Ekkor $a_{n+1} \to A$, mert részsorozat, másfelől a határérték és a műveletek kapcsolata miatt $A = \lim a_{n+1} = \lim \dfrac{10}{7 - a_n} = \dfrac{10}{7 - A}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$. Két megoldás van $A_1 = 2$ és $A_2 = 5$. Mivel a_n monoton csökkenő, ezért $A = \lim a_n = \inf a_n$, ami nem lehet 5, mert ez nem alsó korlát. Tehát $A = \lim a_n = 2$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

5. feladat (7 pont)

Határozza meg a következő sorozat limesz szuperiorját, limesz inferiorját valamint limeszét, ha létezik!

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{(-9)^n + 3^{2n} + 2^n}$$

Megoldás: $a_n = \dfrac{2 \cdot 2^n}{(-9)^n + 9^n + 2^n}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$, így

$$a_{2n} = \frac{2 \cdot 2^{2n}}{2 \cdot 9^{2n} + 2^{2n}} = \frac{2(4/81)^n}{2 + (4/81)^n} \to \frac{2 \cdot 0}{2 + 0} = 0, \text{ és } a_{2n-1} = \frac{2 \cdot 2^{2n-1}}{-9^{2n-1} + 9^{2n-1} + 2^{2n-1}} = \frac{2 \cdot 2^{2n-1}}{2^{2n-1}} = 2 \to 2$$ $\boxed{\textbf{3p.}}$.

Mivel a sorozat minden eleme szerepel a fenti két részsorozat valamelyikében, ezért a_n-nek 2 torlódási pontja van 0 és 2 $\boxed{\textbf{2p.}}$.

Ekkor $\limsup a_n = 2 \ne 0 = \liminf a_n$, és ezért nincs határérték $\boxed{\textbf{1p.}}$.